



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Лисенко О.В.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІЗИЦІ

Конспект лекцій
У двох частинах
Частина 1

Суми
Сумський державний університет
2023

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Лисенко О.В.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІЗИЦІ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика»

У двох частинах
Частина 1

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики та
моделювання складних систем
як конспект лекцій із дисципліни
«Математичні моделі у фізиці».
Частина 1.
Протокол № 2 від 07.02.2023.

Суми
Сумський державний університет
2023

«Математичні моделі у фізиці» : конспект лекцій : у двох частинах / укладач О. В. Лисенко. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – Ч. 1. – 191 с.

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

ЗМІСТ

	С.
РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В КЛАСИЧНІЙ МЕХАНІЦІ	9
ТЕМА 1 КІНЕМАТИКА	9
§ 1 Простір і час. Система відліку. Матеріальна точка. Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення.....	9
§ 2 Середня й миттєва швидкість. Визначення переміщення і шляху тіла за його швидкістю	10
§ 3 Прискорення. Визначення швидкості тіла за його прискоренням. Швидкість та координати тіла під час рівноприскореного руху	12
§ 4 Тангенціальне й нормальне прискорення. Радіус кривизни.....	14
§ 5 Вектор кутового зміщення. Кутові швидкість і прискорення. Зв'язок між кутовими й лінійними величинами	16
ТЕМА 2 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	18
§ 6 Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку.....	18
§ 7 Інертність. Маса. Сила. Другий закон Ньютона	19
§ 8 Третій закон Ньютона. Приклади, що ілюструють третій закон Ньютона.....	21
§ 9 Одиниці вимірювань фізичних величин. Основні й похідні одиниці вимірювань. Розмірність.....	21
§ 10 Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння і вага тіла. Вага тіла, що рухається з прискоренням	23
§ 11 Сила тертя спокою, коефіцієнт тертя спокою. Сила тертя ковзання, коефіцієнт тертя ковзання	25
§ 12 Сила пружності. Закон Гука. Розтягування і стискування стержнів, модуль Юнга	26
ТЕМА 3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	27
§ 13 Закон збереження імпульсу для системи матеріальних точок	27
§ 14 Центр мас системи матеріальних точок. Швидкість і прискорення центра мас	29
§ 15 Робота змінної сили. Теорема про кінетичну енергію для системи матеріальних точок.....	29
§ 16 Робота сили тяжіння, сили всесвітнього тяжіння, сили пружності. Консервативні сили	31
§ 17 Потенціальна енергія. Взаємний зв'язок потенціальної енергії і консервативної сили	33
§ 18 Повна механічна енергія системи матеріальних точок. Закон збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок. Робота неконсервативних сил.....	35
§ 19 Зіткнення тіл. Швидкості тіл після центрального абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів	36
§ 20 Момент сили і момент імпульсу. Рівняння моментів для матеріальної точки.....	38
§ 21 Рівняння моментів для системи матеріальних точок. Закон збереження моменту імпульсу	39
ТЕМА 4 ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ.....	41
§ 22 Швидкість довільної точки твердого тіла під час його плоского руху. Кутова швидкість обертання твердого тіла. Миттєва вісь обертання	41
§ 23 Рух центра мас твердого тіла. Прискорення центра мас твердого тіла	42
§ 24 Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння динаміки обертального руху щодо нерухомої осі	44
§ 25 Момент інерції циліндра (диска) щодо осі симетрії.....	45
§ 26 Момент інерції стрижня.....	46

§ 27 Теорема Гюйгенса – Штейнера	47
§ 28 Робота тіла, що обертається навколо нерухомої осі	47
§ 29 Кінетична енергія твердого тіла за умови плоского руху	48
§ 30 Рівняння руху і рівноваги твердого тіла. Прискорення циліндра, який котиться без ковзання з похилої площини.....	49
ТЕМА 5 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ	51
§ 31 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції. Поступальна сила інерції.....	51
§ 32 Відцентрова сила інерції.....	53
§ 33 Сила Коріоліса.....	54
ТЕМА 6 МЕХАНІКА РІДИН	55
§ 34 Методи Лагранжа та Ейлера для опису течії рідини. Трубка течії	55
§ 35 Теорема про нерозривність потоку	56
§ 36 Рівняння Бернуллі	57
§ 37 Витікання рідини з малого отвору. Формула Торрічеллі	59
§ 38 Сила внутрішнього тертя. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя. В'язкість. Ламінарна і турбулентна течія рідини. Число Рейнольдса	59
§ 39 Рух тіл у рідинах і газах. Сила лобового опору. Піднімальна сила. Парадокс Д'Аламбера. Вплив в'язкості на характер обтікання тіла рідиною. Сила Стокса.....	62
ТЕМА 7 ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	64
§ 40 Принцип відносності Галілея. Перетворення Галілея	64
§ 41 Постулати спеціальної теорії відносності. Відносність одночасності.....	66
§ 42 Перетворення Лоренца.....	67
§ 43 Перетворення швидкостей у спеціальній теорії відносності.....	68
§ 44 Лоренцеве скорочення довжини.....	69
§ 45 Релятивістське уповільнення ходу часу	70
§ 46 Інтервал і його інваріантність. Швидкість світла як гранична швидкість поширення довільного сигналу	71
§ 47 Закон збереження імпульсу в спеціальній теорії відносності. Релятивістське рівняння динаміки	73
§ 48 Кінетична енергія в спеціальній теорії відносності.....	74
§ 49 Енергія спокою. Повна енергія. Взаємозв'язок маси й енергії спокою	75
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ В МОЛЕКУЛЯРНІЙ ФІЗИЦІ ТА ТЕРМОДИНАМІЦІ.....	9
ТЕМА 8 МАКРОСКОПІЧНИЙ СТАН.....	78
§ 50 Статистичний і термодинамічний підходи до вивчення теплових властивостей макроскопічних тіл	78
§ 51 Термодинамічна система. Параметри стану системи. Рівноважні та нерівноважні стани. Термодинамічний процес. Квазістатичний процес	79
§ 52 Температура. Термометр. Загальний (нульовий) закон термодинаміки. Основна властивість температури. Шкала температур Цельсія. Абсолютна температура.....	79
§ 53 Основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини. Броунівський рух	81
§ 54 Рівняння стану термодинамічної системи. Рівняння стану ідеального газу як результат узагальнення експериментальних досліджень	83
§ 55 Барометрична формула	84
§ 56 Тиск ідеального газу з погляду молекулярно-кінетичної теорії	85
§ 57 Молекулярно-кінетичний зміст абсолютної температури	88
§ 58 Ступені вільності механічної системи. Теорема про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності. Середня енергія молекули	89
ТЕМА 9 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ	90
§ 59 Внутрішня енергія термодинамічної системи.....	90

§ 60 Робота, що виконується тілом в разі зміни його об'єму.....	91
§ 61 Кількість теплоти. Перший закон термодинаміки. Вічний двигун першого роду	92
§ 62 Теплоємність. Питома й молярна теплоємність. Теплоємність за умови постійного тиску, за постійного об'єму. Внутрішня енергія ідеального газу. Рівняння Майєра. Стала адіабати.....	93
§ 63 Рівняння адіабати ідеального газу.....	96
§ 64 Політропічні процеси. Показник політропи. Рівняння політропи.....	97
§ 65 Робота, яку виконує газ під час ізопроцесів.....	99
§ 66 Класична теорія теплоємності ідеального газу.....	101
ТЕМА 10 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ.....	102
§ 67 Будова і принцип дії теплової машини. Коефіцієнт корисної дії теплової машини.....	102
§ 68 Вічний двигун другого роду. Другий закон термодинаміки. Формулювання другого закону термодинаміки Томсона і Клаузіуса.....	103
§ 69 Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно. Перша і друга теореми Карно.....	104
§ 70 Нерівність і рівність Клаузіуса. Ентропія. Закон зростання ентропії.....	105
§ 71 Ентропія ідеального газу.....	108
ТЕМА 11 СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ.....	108
§ 72 Функція розподілу ймовірності. Функції розподілу молекул за швидкостями Максвелла.....	108
§ 73 Середні швидкості молекул. Число ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу.....	112
§ 74 Розподіл Больцмана.....	116
ТЕМА 12 ЯВИЩА ПЕРЕНЕСЕННЯ.....	117
§ 75 Довжина вільного пробігу молекул.....	117
§ 76 Емпіричні рівняння, що описують дифузію, теплопровідність, внутрішнє тертя. Якісне пояснення явищ перенесення в газах.....	119
ТЕМА 13 РЕАЛЬНІ ГАЗИ ТА РІДКИЙ СТАН.....	122
§ 77 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса.....	122
§ 78 Ізотерми Ван-дер-Ваальсівського газу. Критичні температура, тиск, об'єм і їхній зв'язок із сталими Ван-дер-Ваальса.....	124
§ 79 Експериментальні ізотерми.....	126
§ 80 Фаза в термодинаміці. Фазове перетворення першого і другого роду. Приклади фазових перетворень. Діаграма станів.....	129
§ 81 Будова рідин. Поверхневий натяг рідин. Коефіцієнт поверхневого натягу. Крайовий кут.....	131
§ 82 Формула Лапласа. Капілярні явища. Висота підняття й опускання рідини в капілярах.....	134
РОЗДІЛ 3 МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРИЦІ.....	78
ТЕМА 14 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ.....	137
§ 83 Явище електризації. Електричний заряд. Елементарний електричний заряд. Дискретність заряду. Закон збереження електричного заряду.....	137
§ 84 Закон Кулона. Принцип суперпозиції електричних сил. Одиниці вимірювання заряду.....	139
§ 85 Електричне поле. Напруженість електричного поля. Напруженість електричного поля точкового заряду. Принцип суперпозиції електричних полів.....	140
§ 86 Робота з переміщення заряду в електростатичному полі. Теорема про циркуляцію електростатичного поля. Потенціальна енергія точкового заряду. Потенціал електричного поля. Потенціал системи зарядів.....	142

§ 87 Зв'язок між напруженістю електростатичного поля і потенціалом. Силові лінії та еквіпотенціальні поверхні. Перпендикулярність силових ліній і еквіпотенціальних поверхонь.....	144
§ 88 Поле електричного диполя	146
§ 89 Потік вектора. Теорема Гаусса для вектора напруженості електричного поля 148	
§ 90 Напруженість електричного поля нескінченної однорідно зарядженої пластини	150
§ 91 Напруженість електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні.....	152
§ 92 Напруженість електричного поля об'ємно зарядженої кулі.....	153
§ 93 Диференціальна форма електростатичної теореми Гаусса. Значення теореми Гаусса в теорії електрики	154
ТЕМА 15 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ.....	155
§ 94 Поляризація діелектриків. Зв'язані заряди. Механізми поляризації.....	155
§ 95 Вектор поляризації. Поверхнева густина зв'язаних зарядів. Зв'язаний заряд усередині діелектрика.....	157
§ 96 Вектор електричної індукції. Теорема Гаусса для діелектриків	158
§ 97 Поляризованість і діелектрична проникність	159
§ 98 Умови на межі поділу двох діелектриків	160
§ 99 Електричне поле всередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля. Електричне поле всередині діелектричного сферичного шару. Фізичний зміст діелектричної проникності.....	161
ТЕМА 16 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ.....	163
§ 100 Умови рівноваги зарядів на провіднику. Електричне поле всередині провідника. Напруженість електричного поля біля поверхні провідника.....	163
§ 101 Електроємність відокремленого провідника. Ємність кулі.....	165
§ 102 Конденсатор. Ємність конденсатора. Ємність плоского і циліндричного конденсатора. Ємність системи, що складається з послідовно та паралельно з'єднаних конденсаторів.....	166
ТЕМА 17 ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ	169
§ 103 Енергія системи точкових зарядів.....	169
§ 104 Енергія зарядженого провідника. Енергія зарядженого конденсатора.....	170
§ 105 Енергія електричного поля	171
ТЕМА 18 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.....	172
§ 106 Електричний струм. Густина електричного струму з мікроскопічного погляду. Рівняння неперервності для електричного заряду.....	172
§ 107 Сторонні сили. Електрорушійна сила. Робота над електричним зарядом на ділянці кола	174
§ 108 Закон Ома для однорідної ділянки кола. Залежність опору від геометричних розмірів провідника. Закон Ома в диференціальній формі. Провідність.....	176
§ 109 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола в диференціальній і інтегральній формі. Закон Ома для замкнутого кола.....	177
§ 110 Правила Кірхгофа.....	177
§ 111 Потужність струму. Закон Джоуля – Ленца в інтегральній і диференціальній формі.....	179
§ 112 Процеси встановлення струму під час заряду і розряду конденсатора.....	180
§ 113 Природа носіїв струму в металах. Дослід Рікке. Ідея Лоренца визначення відношення заряду до маси носія електричного струму в металах. Дослід Толмена і Стюарта	182

§ 114 Якісні уявлення про електропровідність металів із погляду класичної теорії. Закон Ома та Джоуля – Ленца з погляду класичної теорії електропровідності. Недоліки класичної теорії електропровідності.....	183
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	137
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	187

РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В КЛАСИЧНІЙ МЕХАНІЦІ

ТЕМА 1 КІНЕМАТИКА

§ 1 Простір і час. Система відліку. Матеріальна точка. Радіус-вектор. Траєкторія, шлях, переміщення

1 Фізика – наука, яка вивчає найпростіші і найбільш загальні властивості й закони руху об'єктів матеріального світу. Починаємо вивчення фізики з **механіки**, розділу фізики, що вивчає найпростішу форму руху матерії – **механічний рух**. **Механічним рухом** називають зміну з часом взаємного розміщення тіл або їхніх частин у просторі.

Одними з фундаментальних понять є поняття про **простір і час**. Коли йдеться про простір, то під цим розуміють розміщення однієї або іншої точки щодо інших тіл і спосіб вимірювання відстаней між точками та тілами. Коли йдеться про час, то розуміють деякий періодичний процес, який відбувається в системі тіл, який служить виміру проміжків часу.

2 Вивчення механіки почнемо з кінематики. **Кінематикою** називають розділ механіки, який присвячено опису руху тіл, без з'ясування причин такого руху.

У механіці для опису тіл використовують різні моделі. Зупинимось на одній із них. **Матеріальною точкою** називають тіло, розмірами якого в даних умовах руху можна знехтувати. Знехтувати можна розмірами тіла коли: а) відстані до інших тіл набагато більші порівняно з розмірами самого тіла; б) коли відстані, які проходить тіло, є набагато більші порівняно з розмірами тіла; в) коли тіло рухається поступально, тобто всі точки тіла рухаються однаково.

Щоб описати рух будь-якого тіла, потрібно вказати інше тіло щодо якого розглядають рух даного тіла, потрібно вказати систему координат та визначити, як ми будемо слідкувати за часом. Усе це вважають системою відліку. **Системою відліку** називають тіло відліку, систему координат, що пов'язана з тілом відліку, та прилад для виміру часу. Отже, рух тіла розглядають щодо системи відліку.

Розміщення матеріальної точки у просторі визначає радіус-вектор \vec{r} . **Вектор**, початок якого збігається з початком координат, а кінець визначає положення деякої матеріальної точки, називається **радіус-вектором** \vec{r} цієї точки (рис. 1.1). У прямокутній системі координат $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, де x, y, z – координати точки, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (або, відповідно, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) – орти координатних осей (вектори одиничної довжини, які спрямовані вздовж відповідних осей).

Зміну положення матеріальної точки у просторі за час t визначається вектором переміщення $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2). **Вектор переміщення** $\Delta\vec{r}$ – вектор, проведений із початкового положення матеріальної точки \vec{r}_1 в її кінцеве положення \vec{r}_2 . Вектор переміщення дорівнює різниці радіус-векторів у кінцевому \vec{r}_2 і початковому \vec{r}_1 положеннях матеріальної точки

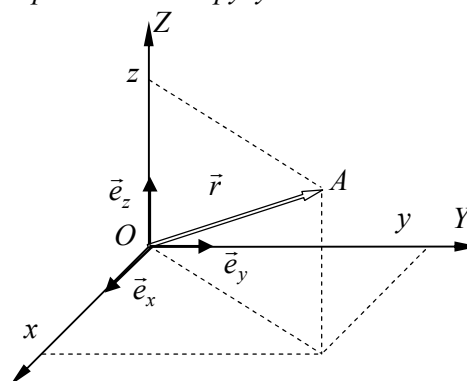


Рисунок 1.1

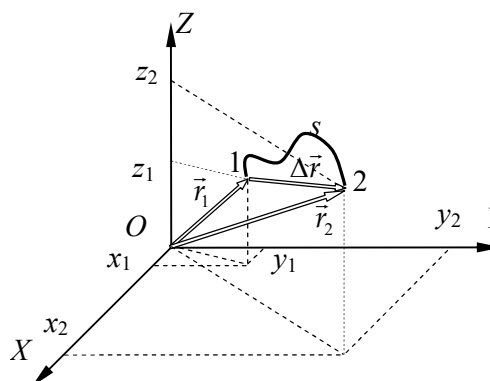


Рисунок 1.2

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z$. Модуль переміщення дорівнює $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Траєкторією називають лінію, вздовж якої рухається тіло. **Шляхом** s називають довжину траєкторії. Шлях, модуль переміщення, модуль радіус-вектора вимірюють у системі СІ у метрах.

§ 2 Середня й миттєва швидкість. Визначення переміщення і шляху тіла за його швидкістю

1 Середньою швидкістю руху за даний проміжок часу називається векторна величина, яка чисельно дорівнює відношенню вектора переміщення до проміжку часу, за яке це переміщення відбулось

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Вимірюють середню швидкість у системі СІ у метрах за секунду (м/с).

2 У багатьох випадках нас цікавить не середня швидкість тіла за деякий проміжок часу, а швидкість тіла в даний момент часу, або миттєва швидкість. Для визначення миттєвої швидкості матеріальної точки варто взяти до уваги те, що миттєва швидкість змінюється неперервно. Тому чим менше проміжок часу, протягом якого відбувається вимірювання переміщення, тим менше встигне змінитися середня швидкість і тим ближчою буде середня швидкість до її миттєвого значення.

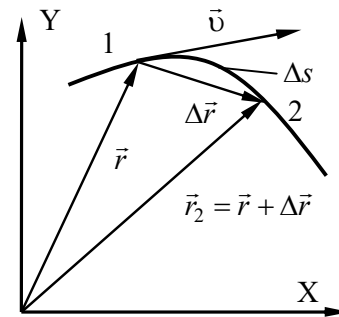


Рисунок 2.1

На підставі вищесказаного, можна визначити миттєву швидкість у такий спосіб. Нехай у деякий момент часу t радіус-вектор, що характеризує положення тіла у просторі, дорівнює \vec{r} (рис. 2.1). У момент часу $t_2 = t + \Delta t$ радіус-вектор буде $\vec{r}_2 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$, де $\Delta\vec{r}$ – переміщення за час Δt . Тоді середня швидкість за цей проміжок часу буде дорівнювати

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{t_2 - t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Чим меншим буде проміжок часу Δt , тим менше буде відрізнятися середня швидкість на проміжку часу Δt від миттєвої швидкості в момент часу t . Тому **миттєву швидкість** визначимо як **граніцю, до якої прямує середня швидкість за нескінченно малий проміжок часу**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}. \quad (2.2)$$

У математиці таку граніцю називають похідною. Тому **миттєва швидкість** є похідною від радіус-вектора за часом. З рисунка 2.1 випливає, що вектор швидкості \vec{v} спрямований за дотичною до траєкторії в тій точці, де міститься частинка в даний момент часу, у той бік, куди рухається частинка. Зазвичай миттєву швидкість часто називають просто швидкістю. Вимірюють миттєву швидкість у системі СІ у метрах за секунду (м/с).

Знайдемо модуль виразу (2.2), тобто модуль швидкості $|\vec{v}|$

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

З рисунка 2.1 бачимо, що відношення $|\Delta\vec{r}|/\Delta s$, де Δs – шлях, який тіло проходить між точками 1 та 2, у разі зменшення Δt прямує до одиниці. Тому ми можемо записати вираз (2.3) у вигляді

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.4)$$

Отже, модуль вектора миттєвої швидкості дорівнює похідній від шляху за часом, тобто миттєвій шляховій швидкості.

Підставимо у визначення (2.2) радіус-вектор, який виражений через орти та координати матеріальної точки $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Візьмемо до уваги, що $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ є постійними в часі векторами, й отримаємо

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \quad (2.5)$$

Разом із цим вектор швидкості \vec{v} можна подати через його проєкції v_x, v_y, v_z на координатні осі у вигляді

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z. \quad (2.6)$$

Порівняння виразів (2.5) і (2.6) призводить до співвідношень

$$\boxed{v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}.} \quad (2.7)$$

Отже, проєкції вектора дорівнюють похідним відповідних координат за часом.

3 Знайдемо за відомим у кожний момент часу вектором швидкості $\vec{v}(t)$ переміщення матеріальної точки $\Delta\vec{r}_{12}$ від моменту часу t_1 до моменту t_2 .

Розіб'ємо інтервал часу $t_2 - t_1$ на N малі (не обов'язково однакові) проміжки Δt_i (i – номер проміжку, що набуває значення $1, 2, \dots, N$). Відповідно до формули (2.2) можна вважати, що на i -му проміжку часу вектор швидкості приблизно дорівнює $\vec{v}(t_i) \approx \Delta\vec{r}_i / \Delta t_i$. Тобто переміщення за проміжок часу Δt_i дорівнює

$$\Delta\vec{r}_i \approx \vec{v}(t_i) \cdot \Delta t_i. \quad (2.8)$$

Зрозуміло, що сумарне переміщення за час від t_1 до t_2 буде дорівнювати

$$\Delta\vec{r}_{12} \approx \sum_{i=1}^N \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{v}(t_i) \Delta t_i. \quad (2.9)$$

Точне значення переміщення знайдемо, коли малі інтервали часу будуть прямувати до нуля: $\max(\Delta t_i) \rightarrow 0$

$$\Delta\vec{r}_{12} = \lim_{\max(\Delta t_i) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}(t_i) \Delta t_i \right). \quad (2.10)$$

У математиці границю суми

$$\boxed{\lim_{\max(\Delta t_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i}, \quad (2.11)$$

яка складена для значень x , що знаходиться в межах від a до b , називають **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$, узятим за змінною x від нижньої межі $x = a$ й верхньої межі $x = b$, і позначають символом

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx}. \quad (2.12)$$

Порівняння виразів (2.10) і (2.11) показує, що переміщення $\Delta\vec{r}_{12}$, яке виконано частинкою за проміжок часу від t_1 до t_2 , дорівнює визначеному інтегралу від функції $\vec{v}(t)$, яка показує, як змінюється вектор швидкості з часом

$$\Delta\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (2.13)$$

Можна пояснити знаходження переміщення $\Delta\vec{r}_{12}$ за час від моменту t_1 до моменту t_2 більш коротко. З вищенаведених міркувань випливає, що в точних формулах як для знаходження похідної, так і для знаходження визначеного інтеграла потрібно використовувати проміжки часу Δt , які прямують до нуля. Позначимо такий елементарний проміжок часу, який прямує до нуля, через dt . Тоді за цей проміжок часу dt елементарне переміщення $d\vec{r}$ (теж прямує до нуля) буде визначатися, на відміну від наближеного співвідношення (2.8), точною формулою

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt. \quad (2.14)$$

Зазначимо, що формулу (2.14) можна отримати з (2.2), розглядаючи похідну як відношення елементарного переміщення до елементарного часу. Ми і далі будемо розглядати похідну як відношення відповідних елементарних величин. Геометрична сума елементарних переміщень дасть результуюче переміщення за час від моменту t_1 до t_2 .

$$\Delta\vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt,$$

яке збігається з (2.13).

4 З урахуванням виразу (2.13) середнє значення вектора швидкості (формулу (2.1)) за час руху $t_2 - t_1$ можна подати у вигляді

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (2.15)$$

Аналогічно обчислюються середні значення будь-яких інших функцій.

§ 3 Прискорення. Визначення швидкості тіла за його прискоренням. Швидкість та координати тіла під час рівноприскореного руху

1 Щоб охарактеризувати зміну швидкості частинки з часом, використовується величина

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \quad (3.1)$$

яка називається **прискоренням частинки**. Узявши до уваги визначення швидкості, можна написати

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (3.2)$$

Отже, прискорення можна визначити як першу похідну швидкості за часом або як другу похідну радіус-вектора за часом.

Підставимо у формулу (3.2) радіус-вектор, який виражений через орти та координати матеріальної точки $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Візьмемо до уваги, що $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ є постійними векторами, й отримаємо

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z. \quad (3.3)$$

Водночас прискорення, як і будь-який інший вектор, можна виразити через його проєкції:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$$

Порівняння цього виразу з (3.3) дає, що

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Отже, компоненти прискорення дорівнюють другим похідним відповідних координат за часом.

2 Знайдемо швидкість $\vec{v}(t)$ та радіус-вектор $\vec{r}(t)$ матеріальної точки в момент часу t за відомим в кожний момент часу вектором прискорення $\vec{a}(t)$, початковою швидкістю \vec{v}_0 та початковим радіус-вектором \vec{r}_0 , які мало тіло в момент часу t_0 .

Використовуючи визначення прискорення (3.1), можемо записати

$$d\vec{v} = \vec{a}(t) \cdot dt.$$

Далі проінтегруємо праву і ліву частини цього співвідношення. Водночас візьмемо до уваги, що в момент часу t_0 швидкість мала значення \vec{v}_0 , а в момент часу t швидкість мала значення \vec{v}

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') \cdot dt'.$$

Тут також перевизначили в підінтегральному виразі t на t' (визначений інтеграл від позначення змінної інтегрування не залежить). Далі отримуємо шукану залежність швидкості тіла від часу

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') \cdot dt'}. \quad (3.5)$$

Для знаходження радіус-вектора $\vec{r}(t)$ матеріальної точки в момент часу t використаємо визначення швидкості $\vec{v} = d\vec{r} / dt$. Звідси

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt.$$

Далі, аналогічно як і в попередньому випадку, інтегруємо праву і ліву частини цього співвідношення. Візьмемо до уваги, що в момент часу t_0 радіус-вектор мав значення \vec{r}_0 , а в момент часу t – \vec{r} , і отримуємо

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') \cdot dt'}. \quad (3.6)$$

Отже, отримали формули (3.5) і (3.6), які дозволяють знайти швидкість і радіус-вектор матеріальної точки в довільний момент часу за відомою залежністю прискорення від часу $\vec{a}(t)$.

3 Рівноприскореним рухом називають такий рух, коли вектор прискорення тіла в будь-який момент часу має одне і те ж саме значення як за модулем, так і за напрямком ($\vec{a} = \text{const}$).

Знайдемо, як змінюються з часом швидкість і радіус-вектор тіла за рівноприскореного руху. Для розв'язання цієї задачі використаємо формули (3.5) та (3.6). Для спрощення математичних формул візьмемо, що $t_0 = 0$.

Зі співвідношення (3.5) знаходимо швидкість за рівноприскореного руху

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} \cdot dt' = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t. \quad (3.7)$$

Тут під час інтегрування використали, що для рівноприскореного руху $\vec{a} = \text{const}$. Далі отриману швидкість (3.7) підставляємо в (3.6) і знаходимо шуканий радіус-вектор

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') \cdot dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t') \cdot dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} t^2 / 2. \quad (3.8)$$

Зазвичай використовують формули (3.7), (3.8) не у векторній формі, а в скалярній. Спроекуємо ці формули, наприклад на вісь Y , і отримаємо

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t, \quad y = y_0 + v_{0y} t + a_y t^2 / 2. \quad (3.9)$$

§ 4 Тангенціальне й нормальне прискорення. Радіус кривизни

1 Розглянемо криволінійний плоский рух, у якому швидкість змінюється як за величиною, так і за напрямком. Виявляється, що в цьому разі зручно використовувати поняття тангенціального та нормального прискорень.

Тангенціальним прискоренням \vec{a}_τ називають компоненту повного прискорення \vec{a} , яка паралельна дотичній до траєкторії руху (рис. 4.1). **Нормальним прискоренням** \vec{a}_n

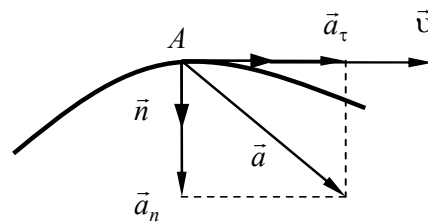


Рисунок 4.1

називають компоненту повного прискорення \vec{a} , яка перпендикулярна дотичній до траєкторії руху (рис. 4.1). Зрозуміло, що з вищесформульованих визначень випливає, що між повним, тангенціальним і нормальним прискореннями є зв'язок

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (4.1)$$

Крім цього, вектор тангенціального прискорення є перпендикулярним до вектора нормального прискорення (рис. 4.1). Це означає, що модулі цих прискорень пов'язані між собою співвідношенням

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (4.2)$$

2 З'ясуємо, як пов'язана швидкість тіла, яке рухається за криволінійною траєкторією, з тангенціальним і нормальним прискореннями.

Введемо одиничний вектор $\vec{\tau}$, який пов'язаний із тілом A і спрямований за дотичною до траєкторії в напрямку руху тіла (рис. 4.1). Зрозуміло, що $\vec{\tau}$ є змінним вектором, у різних точках траєкторії він матиме різний напрямок (модуль цього вектора залишається постійним і таким, що дорівнює одиниці). Вектор швидкості \vec{v} тіла A також спрямований за дотичною до траєкторії (рис. 4.1). Тому його можна подати у вигляді

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (4.3)$$

де v – модуль вектора швидкості. Підставимо (4.1) у визначення прискорення (3.1) і отримаємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (4.4)$$

Аналізуючи співвідношення (4.4), бачимо, що перший доданок у правій частині (4.4) має напрямок, який паралельний $\vec{\tau}$, тобто є паралельним дотичній. Це означає, що ця

компонента повного прискорення, відповідно до визначення, є тангенціальним прискоренням

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}}. \quad (4.5)$$

Тепер розглянемо другий доданок у (4.4). Знайдемо похідну

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} \right).$$

Для цього розглянемо рисунок 4.2. У точках 1 та 2 напрямки швидкості тіла визначають вектори $\vec{\tau}_1$ та $\vec{\tau}_2$. Побудуємо перпендикуляри до дотичних у точках 1 і 2. Ці перпендикуляри перетнуться в деякій точці O і кут між ними буде дорівнювати $\Delta\varphi$. Кут між векторами $\vec{\tau}_1$ та $\vec{\tau}_2$ буде теж дорівнювати $\Delta\varphi$. Модуль вектора $\Delta\vec{\tau}$, як це випливає з рисунка 4.2, дорівнює

$$|\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1| = |\tau| \cdot 2 \sin(\Delta\varphi/2) = 2 \sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi.$$

Тут використали відому формулу, що коли $\alpha \ll 1$, то $\sin \alpha \approx \alpha$. Тоді

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Зрозуміло, що коли $\Delta t \rightarrow 0$, то точки 1 і 2 будуть наближатись одна до одної і кут $\Delta\varphi$ буде теж наближатись до нуля. Це означає, що в цьому разі вектори $\vec{\tau}_1$ та $\vec{\tau}_2$ будуть збігатися, а вектор $\Delta\vec{\tau}$ буде перпендикулярним до них, а отже, паралельним вектору \vec{n} – одиничному вектору, перпендикулярному дотичній до траєкторії. Отже,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}. \quad (4.6)$$

Використаємо визначення радіуса кривизни кривої. Згідно з визначенням **радіусом кривизни** називають величину, що дорівнює

$$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} \right) = \frac{ds}{d\varphi}, \quad (4.7)$$

де Δs є довжиною кривої між точками 1 та 2, на яку опирається кут $\Delta\varphi$ (рис. 4.2). Тоді (4.6) можемо подати у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \vec{n} = \frac{1}{R} v \vec{n}.$$

Тут, крім (4.7), використали те, що ds/dt дорівнює модулю швидкості тіла. Тепер можемо записати другу компоненту (4.4) в дещо іншому вигляді. Зрозуміло, що ця компонента прискорення перпендикулярна дотичній до кривої і тому є за визначенням **нормальним прискоренням**

$$\boxed{\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \frac{1}{R} v \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n}}. \quad (4.8)$$

Це прискорення часто ще називають **доцентровим прискоренням**, тому що коли тіло рухається колом, то це прискорення завжди спрямовано до центра кола.

Отже,

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}}. \quad (4.9)$$

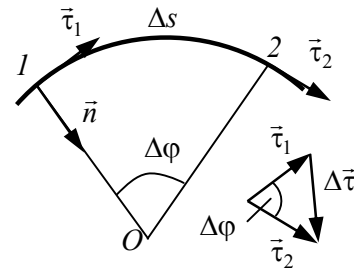


Рисунок 4.2

§ 5 Вектор кутового зміщення. Кутові швидкість і прискорення. Зв'язок між кутовими й лінійними величинами

1 Не завжди тіло, рух якого ми вивчаємо, можна вважати матеріальною точкою. Розглянемо таку модель тіла – абсолютно тверде тіло.

Абсолютно твердим тілом називають тіло, у якому в даних умовах задачі можна знехтувати деформаціями (відстані між довільними двома точками можна вважати постійними).

Рух твердого тіла можна подати як сукупність двох видів руху поступального та обертального.

Поступальним називають такий рух, коли будь-яка пряма, що жорстко пов'язана з тілом, яке рухається, залишається паралельною сама собі. Математично поступальний рух є еквівалентним паралельному перенесенню.

Обертальним називають такий рух, коли всі точки тіла рухаються колами, центри яких лежать на одній і тій же самій прямій. Цю пряму називають віссю обертання.

2 Розглянемо детально обертальний рух твердого тіла. Описувати цей рух за допомогою лінійних швидкостей і лінійних прискорень стає незручно, тому що різні точки твердого тіла мають різні швидкості та прискорення. Потрібно ввести величини, які характеризують обертання твердого тіла як цілого.

Виберемо довільну точку твердого тіла A (рис. 5.1). Проведемо радіус від центра кола O , щодо якого обертається точка A до самої точки A . Через проміжок часу Δt т. A переміститься в положення A' . Кут $\varphi = \angle OAA'$ характеризує поворот твердого тіла. Водночас довільна пряма, яка проведена в площині, перпендикулярна до осі обертання (рис. 5.1), повернеться на такий самий кут φ (рис. 5.1). Кут φ називають **кутом повороту**.

Для того щоб вказати, у якому напрямку відбувається обертання, вводять вектор кутового зміщення. **Вектором кутового зміщення** $\vec{\varphi}$ називають вектор, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з обертанням тіла правилом правого гвинта (рис. 5.2). Установимо правий гвинт уздовж осі обертання, повернемо його за напрямком обертання твердого тіла, поступальний рух гвинта вкаже на напрямок вектора $\vec{\varphi}$. Вектор повороту в системі СІ вимірюється в радіанах $[\vec{\varphi}]_{CI} = \text{рад}$.

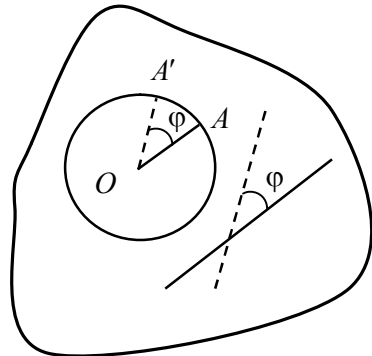


Рисунок 5.1

Для того щоб охарактеризувати, як швидко змінюється вектор повороту $\vec{\varphi}$, використовують поняття кутової швидкості. **Кутовою швидкістю** $\vec{\omega}$ називають $\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt$. Вектор кутової швидкості в системі СІ вимірюється в рад/с $[\vec{\omega}]_{CI} = \text{рад/с}$.

Для того щоб охарактеризувати, як швидко змінюється кутова швидкість $\vec{\omega}$, використовують поняття кутового прискорення. **Кутовим прискоренням** $\vec{\beta}$ називають $\vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt$. Вектор кутового прискорення в системі СІ вимірюється в рад/с² $[\vec{\beta}]_{CI} = \text{рад/с}^2$.

Між вектором кутового зміщення, кутовою швидкістю та кутовим прискоренням є аналогія

$$\vec{r} \leftrightarrow \vec{\varphi},$$

$$\vec{v} \leftrightarrow \vec{\omega} \quad (d\vec{r} / dt \leftrightarrow d\vec{\varphi} / dt),$$

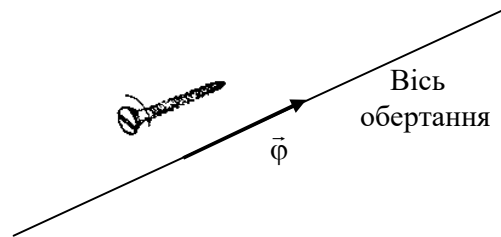


Рисунок 5.2

$$\vec{a} \leftrightarrow \vec{\beta} \quad (d\vec{v}/dt \leftrightarrow d\vec{\omega}/dt). \quad (5.1)$$

3 За відомими кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і кутовим прискоренням $\vec{\beta}$ можна знайти лінійні швидкості та лінійні прискорення для будь-якої точки твердого тіла.

Розглянемо точку A твердого тіла, яка рухається по колу щодо центра кола O , який міститься на осі обертання Z (рис. 5.3). За час dt точка A пройде по колу шлях ds , який відповідає куту повороту $d\varphi$. На підставі цього, можемо записати

$$v = ds/dt = R \cdot d\varphi/dt = R \cdot \omega. \quad (5.2)$$

Для того щоб вказати напрямок вектора, використаємо векторний добуток. Зважаючи на напрямки векторів, зображених на рисунку, можемо записати

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]. \quad (5.3)$$

Цей вираз можна узагальнити. Нескладно впевнитися, що коли визначати положення точки A щодо довільної розміщеної на осі обертання точки O' вектором \vec{r} (рис. 5.3), то можемо записати

$$[\vec{\omega} \times \vec{r}] = [\vec{\omega} \times (\vec{OO}' + \vec{R})] = [\vec{\omega} \times \vec{OO}'] + [\vec{\omega} \times \vec{R}] = 0 + [\vec{\omega} \times \vec{R}] = [\vec{\omega} \times \vec{R}].$$

Тут використали, що $\vec{\omega} \parallel \vec{OO}'$ (рис. 5.3), тобто $[\vec{\omega} \times \vec{OO}'] = 0$. Отже, рівняння (5.3) можемо записати у вигляді

$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]}. \quad (5.4)$$

Для нормального прискорення можемо записати $a_n = v^2/R = \omega^2 R$. Звідси з урахуванням напрямків векторів маємо

$$\boxed{\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}}. \quad (5.5)$$

Для тангенціального прискорення можемо записати

$$a_\tau = dv/dt = d(\omega R)/dt = R \cdot d\omega/dt = R \cdot \beta.$$

Звідси з урахуванням напрямків векторів (аналогічно до (5.4)) запишемо

$$\boxed{\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{R}] = [\vec{\beta} \times \vec{r}]}. \quad (5.6)$$

Формули (5.4), (5.5) та (5.6) розв'язують поставлені в цьому пункті задачі.

4 На підставі інформації про вектор кутового прискорення можна знайти вектор кутової швидкості, а потім і вектор кутового зміщення. Розглянемо це детально. Використовуємо визначення для кутового прискорення, знаходимо кутову швидкість

$$\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt, \quad \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}} d\vec{\omega} = \int_{t_0}^t \vec{\beta} dt, \quad \boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\beta} dt}. \quad (5.7)$$

Далі використовуючи визначення кутової швидкості, знаходимо кут повороту

$$\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt, \quad \int_{\vec{\varphi}_0}^{\vec{\varphi}} d\vec{\varphi} = \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt, \quad \boxed{\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt}. \quad (5.8)$$

Формули (5.6) та (5.7) розв'язують поставлену задачу.

5 Знайдемо кут повороту та його швидкість, коли тіло має постійне за напрямком і модулем кутове прискорення $\vec{\beta} = \text{const}$. Для цього використаємо формули (5.7) та (5.8).

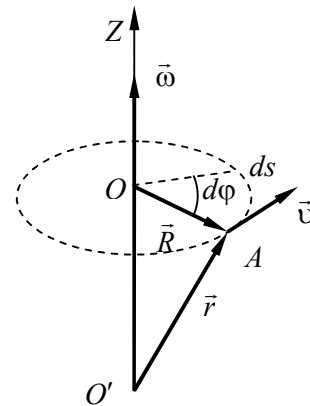


Рисунок 5.3

На підставі того, що кутове прискорення є сталим $\vec{\beta} = \overset{\rightarrow}{const}$, вісь обертання позначимо через вісь Z і запишемо співвідношення (5.7) та (5.8) для проєкцій на цю вісь

$$\omega_z = \omega_{z0} + \int_{t_0}^t \beta_z dt, \quad \varphi_z = \varphi_{z0} + \int_{t_0}^t \omega_z dt. \quad (5.9)$$

Використовуючи, що $\beta_z = const$, а також вибираючи початковий час таким, що дорівнює нулю $t_0 = 0$, можемо легко провести інтегрування в (5.9) і отримати

$$\boxed{\omega_z = \omega_{z0} + \beta_z t}, \quad \boxed{\varphi_z = \varphi_{z0} + \omega_{z0} t + \beta_z t^2 / 2}. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) вирішує поставлене завдання.

Варто також зазначити, що матеріальну точку можна розглядати як частинний випадок абсолютно твердого тіла. Тому отримані результати для абсолютно твердого тіла можна застосувати і для матеріальної точки, яка рухається по колу.

ТЕМА 2 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§ 6 Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку

1 Динамікою називають розділ механіки, у якому вивчають механічний рух тіл під дією прикладених до них сил (під дією інших тіл).

Закони динаміки були встановлені Ньютоном і мають його ім'я. Ці закони, як і інші принципи, що лежать в основі фізики, є узагальненням дослідних фактів.

Наприкінці XVI ст. дві дуже важливі задачі призвели до проблеми вивчення руху тіл у зв'язку з їхньою взаємодією з іншими тілами. По-перше, з розвитком артилерії потрібно було знайти закони руху снарядів. По-друге, у зв'язку з виникненням геліоцентричної системи Коперника стало зрозуміло, що Земля не є центром Всесвіту, а є звичайною планетою, що обертається разом з іншими планетами навколо Сонця. Звідси випливав висновок, що планети (отже, й інші тіла) рухаються самі собою, тому що зовсім було б неймовірним, щоб Землю й інші планети щось підштовхувало до руху протягом мільярдів років.

Для правильного розв'язання проблеми руху потрібно насамперед відволіктися від усяких зовнішніх впливів і сформулювати проблему так: *що відбудеться з тілом, якщо воно перестане взаємодіяти з іншими тілами?* Тут на допомогу повинен прийти уявний експеримент, ідея якого й була висунута Г. Галілеєм. Дійсно, у всякому реальному експерименті на Землі ми не можемо звільнити тіло від дії сили тяжіння й сили тертя. Однак можна поставити питання так: а що відбудеться, якщо ми ці сили, хоча б подумки, станемо поступово зменшувати?

Припустимо, що візок рухається по піску, тоді він швидко зупиниться. А от на горизонтальному льоду він буде рухатися значно довше, хоча й тут зрештою зупиниться. А якщо лід стане абсолютно гладким? Очевидно, візок не зупиниться, а буде сам собою рухатися необмежено довго.

Ось така ідея уявного експерименту над тілом, що є вільним від усяких зовнішніх впливів, і дозволила Г. Галілею дійти до ідеї інерціального руху тіла. І хоча сам Г. Галілей і помилявся, вважаючи, що за інерцією тіло може не тільки рухатися рівномірно й прямолінійно, але й рівномірно рухатися по колу (останнє неправильно!), його ідея дозволила І. Ньютону правильно сформулювати принцип інерції: якщо тіло не взаємодіє з навколишніми тілами, то швидкість його руху не змінюється ні за величиною, ні за напрямком, тобто воно рухається прямолінійно й рівномірно.

2 Вищезапропоноване формулювання принципу інерції не може бути визнане абсолютно точним. Дійсно, там мова йде про рух тіла, але вказано систему відліку, у якій відбувається рух. Однак відомо, що говорити про форму траєкторії, а також про швидкість

можна лише щодо деякої системи відліку. Так, наприклад, траєкторія, яка є прямолінійною в одній системі відліку, може виявитися криволінійною в іншій системі.

Тому необхідно змінити формулювання принципу інерції, указавши на систему відліку, щодо якої цей рух розглядається. **Перший закон Ньютона** (принцип інерції) точно формулюється так: *існують системи відліку, щодо яких усі тіла, що не взаємодіють з іншими тілами, рухаються прямолінійно й рівномірно.*

Системи відліку, у яких тіла, що не взаємодіють з іншими тілами, рухаються прямолінійно й рівномірно, називаються інерціальними системами.

§ 7 Інертність. Маса. Сила. Другий закон Ньютона

1 Інертність – властивість тіл, яка проявляється в тому, що тіло зберігає свою швидкість постійною в інерціальній системі відліку, коли на це тіло інші тіла не діють або їхня дія взаємно скомпенсована. Коли ж на тіло діють інші тіла, то властивість інертності проявляється в тому, що зміна його швидкості відбувається не миттєво, а поступово. Водночас чим повільніше змінюється швидкість, тим більша інертність тіла.

2 Мірою інертності тіла є маса. Чим більш інертне тіло, тим більша його маса. Для точного кількісного визначення маси розглянемо замкнену систему, що складається із двох матеріальних точок. **Замкненою, або ізолюваною системою** називають систему тіл, настільки віддалених від усіх інших тіл, що ті практично не впливають на систему, яка розглядається. Тіла замкненої системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

Унаслідок взаємодії двох матеріальних точок, що становлять замкнену систему, їхні швидкості з часом змінюються. Тобто тіла рухаються з прискоренням. Позначимо через \vec{a}_1 прискорення точки 1, через \vec{a}_2 – прискорення точки 2. Як свідчить експеримент (приклад схеми одного з таких експериментів подано на рисунку 7.1), ці прискорення мають протилежні напрямки й пов'язані між собою співвідношенням

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad \text{або} \quad \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1} = \text{const}, \quad (7.1)$$

де величини m_1 і m_2 – сталі й мають однакові знаки. Величини m_1 і m_2 зовсім не залежать від характеру взаємодії між матеріальними точками 1 і 2. Наприклад, взаємодія може відбуватися методом зіткнення матеріальних точок між собою. Його можна здійснити, надавши матеріальним точкам електричних зарядів або помістивши між ними маленьку пружинку, тощо. Під час цього експерименту вектори \vec{a}_1 і \vec{a}_2 будуть змінюватись. Однак коефіцієнти m_1 і m_2 , а точніше їхнє відношення залишаться тим самим. Ці результати потрібно розглядати як дослідні факти, підтверджені незліченною кількістю експериментів. Коефіцієнти m_1 і m_2 можуть залежати тільки від властивостей самих матеріальних точок. *Ці коефіцієнти m_1 і m_2 називаються масами* або, більш точно, інертними масами матеріальних точок 1 і 2.

Отже, з визначення мас випливає, що відношення мас двох матеріальних точок дорівнює оберненому відношенню модулів прискорень цих точок унаслідок взаємодії між ними

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}. \quad (7.2)$$

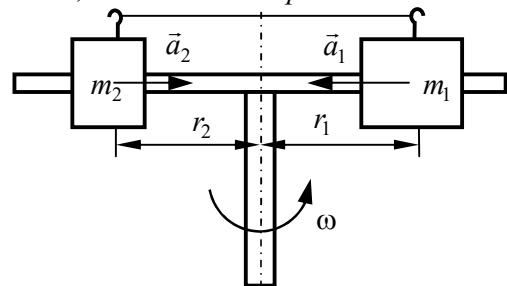


Рисунок 7.1

3 Щоб від відношення мас перейти до самих мас, потрібно домовитися масу деякого певного тіла вважати такою, що дорівнює одиниці. Таке тіло називається еталоном маси. У фізиці за одиницю маси взято кілограм. Кілограм є масою етальної гирі зі сплаву іридію із платиною, що зберігається в Севрі (Франція) у Міжнародному бюро з мір і ваг, $m_{em} = 1$ кг. Приблизно одному кілограму дорівнює маса кубічного дециметра чистої води за температури 4 °С. Тоді, виконуючи вищеописаний експеримент з еталоном і тілом шуканої маси m_2 , знаходимо масу m_2 з використанням формули (7.2)

$$m_2 = m_{em} \frac{|\vec{a}_{em}|}{|\vec{a}_2|}. \quad (7.3)$$

Так можемо знайти масу будь-якого тіла.

4 Коли матеріальна точка не взаємодіє з іншими тілами, то відповідно до першого закону Ньютона швидкість цієї точки залишається сталою щодо інерціальної системи відліку. Якщо ж матеріальна точка не ізольована, то через взаємодію з навколишніми тілами її швидкість змінюється. Тому природно за міру інтенсивності взаємодії взяти величину, яка пропорційна похідній від швидкості за часом, тобто прискоренню $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Одним із фундаментальних узагальнень класичної механіки є встановлення того факту, що добуток маси тіла на похідну швидкості визначається положенням розглянутої матеріальної точки щодо навколишніх її тіл, а іноді також і її відносною швидкістю. Тобто $m\vec{a} = m d\vec{v}/dt$ є функцією радіуса-вектора \vec{r} і швидкості \vec{v} матеріальної точки й може залежати також від координат і швидкостей навколишніх матеріальних точок як від параметрів. Позначимо цю функцію $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$. Тоді

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}} \text{ або } \boxed{m\vec{a} = \vec{F}}. \quad (7.4)$$

Функція координат і швидкості матеріальної точки $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$, що визначає добуток маси тіла на похідну її швидкості за часом, **називається силою**. Сила є вектором, тому що вона визначає вектор прискорення.

Отже, сила, що діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на прискорення, яке надає ця сила. Це положення називається **другим законом Ньютона**. Рівняння (7.4), що виражає цей закон, називається **рівнянням руху матеріальної точки**.

5 Фактичний зміст другого закону Ньютона полягає в тому, що сила \vec{F} залежить тільки від координат і швидкості матеріальної точки (не залежить від прискорення). Другий закон Ньютона й рівняння руху (7.4) отримують конкретний зміст тільки після того, як визначена функція $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$.

Під час розгляду різних динамічних задач механіка ставить і розв'язує два питання: 1) за відомим рухом тіл обчислити сили, що діють на них; 2) за відомими силами визначити рух тіл. Задачі першого типу порівняно прості. Вони зводяться до обчислення прискорень матеріальних точок (диференціювання), з яких складається система. Задачі другого типу є набагато складнішими і є основними в механіці. Тут насамперед потрібно написати рівняння руху для кожної матеріальної точки, що входить у систему, на яку діють сили, що залежать від координат і швидкостей цих самих матеріальних точок. Унаслідок цього отримуємо систему диференціальних рівнянь, розв'язок якої (за певних початкових умов) дасть повну уяву про всі деталі руху. Отже, для розв'язання таких задач потрібно проінтегрувати диференціальні рівняння, а це значно складніше за диференціювання.

6 Коли на тіло діють декілька сил, то під силою \vec{F} у співвідношенні (7.4) йдеться про **рівнодійну (результуючу) силу**, тобто векторну суму усіх сил, що діють на тіло.

Силу в системі СІ вимірюють в ньютонах (Н) $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$

§ 8 Третій закон Ньютона. Приклади, що ілюструють третій закон Ньютона

1 Розглянемо замкнену систему, що складається із двох матеріальних точок (також вище § 6). Унаслідок взаємодії ці матеріальні точки будуть рухатися з прискоренням. Позначимо через \vec{a}_1 прискорення точки 1, через \vec{a}_2 – прискорення точки 2. Як доводять експерименти, ці прискорення мають протилежні напрямки й пов'язані між собою співвідношенням

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2, \quad (8.1)$$

де m_1 і m_2 маси відповідних тіл. Згідно з другим законом Ньютона сила, що діє на перше тіло, дорівнює $\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1$, а сила, що діє на друге тіло, дорівнює $\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2$. Звідси отримуємо рівність

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}, \quad (8.2)$$

яка математично виражає **третій закон Ньютона**: тіла діють одне на одне із силами, які спрямовані вздовж однієї прямої, рівні за модулем і протилежні за напрямком.

2 Зазначимо, що сили, які виникають під час взаємодії двох тіл, завжди мають однакову природу. Так, наприклад, коли Земля притягує яблуко, що висить на гілці дерева силою тяжіння, то і яблуко притягує Землю теж силою тяжіння. Коли яблуко діє на гілку із силою пружності (вага тіла), то і гілка діє на яблуко із силою пружності (сила реакції опори).

Застосовуючи третій закон Ньютона, завжди потрібно пам'ятати, що однакові за модулем і протилежні за напрямком сили діють на різні тіла, і тому не можуть урівноважувати одна одну.

Закони Ньютона виконуються тільки в інерціальних системах відліку, вони перестають бути правильними для об'єктів дуже малих розмірів, які порівнянні з розмірами атомів, та коли рух відбувається зі швидкостями наближеними до швидкості світла.

§ 9 Одиниці вимірювань фізичних величин. Основні й похідні одиниці вимірювань. Розмірність

1 Виміряти деяку фізичну величину означає знайти її відношення до подібної фізичної величини, яка взята за одиницю вимірювання.

Для кожної фізичної величини можна було б встановити одиницю довільно, незалежно від одиниць інших величин. Однак це призвело б до появи у формулах, які пов'язують між собою різні величини, «незручних» числових коефіцієнтів (ми маємо незручності, наприклад, коли одні довжини вимірюються в метрах, а інші в дюймах). Тому довільно визначаються тільки одиниці невеликої кількості величин (**ці одиниці називають основними**). Одиниці ж інших величин визначають за допомогою фізичних законів, що пов'язують ці величини з тими, одиниці яких обрані як основні (**такі одиниці називають похідними**). Наприклад, установивши одиниці довжини й часу, за одиницю швидкості беруть таку швидкість, за якої частинка за одиницю часу проходить шлях, який дорівнює одиниці (відповідно до формули $v = s/t$). Установивши одиниці маси й прискорення, одиницю сили визначають так, щоб одиниця сили надавала одиниці маси прискорення, яке дорівнює одиниці.

За такого визначення одиниць формули набувають більш простого вигляду, а сукупність одиниць утворює певну систему. Існує кілька систем, що відрізняються вибором основних одиниць. Найбільш вживаною є Міжнародна система (СІ).

2 За основні в системі СІ взято сім одиниць: довжини – метр (м), маси – кілограм (кг), часу – секунда (с), сили електричного струму – ампер (А), термодинамічної температури – кельвін (К), сили світла – кандела (кд), кількості речовини – моль (моль).

У механіці ми матимемо справу з одиницями довжини, маси й часу, а також із похідними від них одиницями.

У 1983 р. XVII Генеральною конференцією з мір та ваг було ухвалено визначення **метра**, відповідно до якого метр являє собою відстань, що проходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за $1/299792458$ секунди. Метр приблизно дорівнює $1/40000000$ довжини земного меридіана. Застосовуються також кратні й роздільні одиниці: кілометр ($1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$), сантиметр ($1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$), міліметр ($1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$), мікрометр ($1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$) тощо.

Кілограм дорівнює масі платиноїридієвого циліндричного тіла (діаметром і висотою 39 мм), що зберігається в Міжнародному бюро з мір і ваг у Севрі (біля Парижа). Це тіло називається міжнародним прототипом кілограма. Його маса близька до маси 1000 см^3 чистої води за 4°C . Грам (г) дорівнює 10^{-3} кілограма.

Секунда дорівнює $9\,192\,631\,770$ періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома рівнями надтонкої структури основного стану атому цезію-133. Секунда приблизно дорівнює $1/86400$ середньої сонячної доби.

Визначення інших основних одиниць будуть дані далі в цьому курсі.

3 Нагадаємо декілька похідних одиниць вимірювань, які використовуються в механіці. **Одиницею швидкості є метр за секунду (м/с)**. Вона дорівнює швидкості частинки, що рівномірно рухається і проходить за секунду шлях, який дорівнює одному метру. **Одиниця прискорення – метр за секунду у квадраті (м/с^2)**. Це таке прискорення рівноприскореного руху, за якого швидкість частинки зростає за секунду на 1 м/с . **Одиниця сили на честь І. Ньютона названа ньютон (Н)**. Згідно з другим законом Ньютона вона дорівнює силі, під дією якої тіло з масою 1 кг отримує прискорення 1 м/с^2 . Похідні одиниці інших фізичних величин визначаються аналогічно.

4 Крім системи одиниць вимірювання СІ у науці й техніці використовують іноді й інші системи одиниць. У науковій практиці часто застосовують так звану СГС-систему. Основними одиницями в цій системі є сантиметр, грам і секунда. Одиниця сили в СГС-системі називається діною (дін). Одна діна дорівнює силі, під дією якої тіло з масою 1 г отримує прискорення 1 см/с^2 . Між ньютон і діною існує співвідношення

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 10^3 \text{ г} \cdot 10^2 \text{ см/с}^2 = 10^5 \text{ дін}.$$

Нескладно бачити, що зміна основних одиниць спричиняє зміну похідних одиниць. Для того щоб охарактеризувати цей зв'язок похідних і основних одиниць вимірювання, у фізиці вводиться поняття розмірності фізичної величини. *Співвідношення, яке показує, як змінюється значення одиниці вимірювання фізичної величини із зміною основних одиниць, називають **розмірністю** цієї одиниці*. Для позначення розмірності довільної величини використовують її літерне позначення, узяті у квадратні дужки. Так, наприклад, символ $[\upsilon]$ означає розмірність швидкості. Розмірність основних величин позначають спеціальним способом: розмірність довжини – L ; часу – T ; маси – M . Отже, позначивши довжину буквою l , час буквою t , масу буквою m , можна написати:

$$[l] = L; [m] = M; [t] = T.$$

Яка, наприклад, розмірність швидкості? Модуль швидкості визначається співвідношенням $\upsilon = \Delta s / \Delta t$ (для будь-яких малих Δt). Тому що фізичні визначення й закони не можуть залежати від вибору одиниць вимірювання величин, що фігурують у них, розмірності обох частин рівнянь, які виражають ці закони, повинні бути однакові. Розмірність Δs дорівнює L , розмірність Δt дорівнює T . Отже, розмірність швидкості дорівнює

$$[\upsilon] = LT^{-1}.$$

Останній запис означає, що в разі збільшення одиниці довжини в n_1 разів одиниця вимірювання швидкості збільшиться в n_1 разів, а відповідне число, яким виражається швидкість у цих одиницях, зменшиться в n_1 разів. А за збільшення одиниці часу в n_2 разів одиниця вимірювання швидкості зменшиться в n_2 разів, а число, що виражає швидкість,

збільшиться в n_2 разів. Наприклад, нехай задане значення швидкості $v = 10$ м/с, а ми хочемо подати її в одиницях (км/година). У цьому разі $n_1 = 1000$, а $n_2 = 3600$. Унаслідок цього в нових одиницях виміру значення швидкості буде дорівнювати

$$v = 10 \cdot (3600/1000) \text{ км/год} = 36 \text{ км/год}.$$

Аналогічно швидкості можна встановити розмірність прискорення

$$a = [\Delta v]/[\Delta t] = LT^{-1}/T = LT^{-2}.$$

Розмірність сили буде така

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}.$$

Аналогічно встановлюються розмірності всіх інших величин. У кожному конкретному випадку «інструментом» для введення нової одиниці є фізичний закон, у якому вперше з'являється відповідна величина.

Відзначимо, що контроль розмірності фізичних формул є потужним інструментом перевірки правильності проведених обчислень. Крім того, у сучасній фізиці (а насамперед – саме в механіці) на цій ідеї засновані деякі теоретичні методи отримання нової інформації (точніше, вони ґрунтуються на законах подібності).

§ 10 Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння і вага тіла. Вага тіла, що рухається з прискоренням

1 У класичній механіці ми маємо справу з гравітаційними та електромагнітними силами, а також пружними силами та силами тертя. Гравітаційні та електромагнітні сили не можна звести до інших, більш простих сил. Тому їх називають **фундаментальними**. Сили пружності та сили тертя є за своєю природою електромагнітними і тому не можуть вважатися фундаментальними. Для цих сил можна отримати лише наближені емпіричні (отримані з досліду) формули.

Закон всесвітнього тяжіння визначає взаємодію між двома точковими тілами масами m_1 і m_2 , які розміщені на відстані r_{12} один від одного

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (10.1)$$

Тут \vec{F}_2 – сила, що діє на точкове тіло масою m_2 із боку точкового тіла масою m_1 (рис. 10.1). Вектор \vec{r}_{12} з'єднує тіло масою m_1 із тілом масою m_2 . $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – універсальна гравітаційна стала. Закон всесвітнього тяжіння можна застосовувати також і до куль. Водночас за відстань між ними потрібно брати відстань між центрами цих куль.

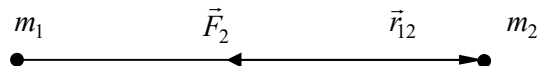


Рисунок 10.1

2 **Силою тяжіння** називають силу, з якою тіла притягуються до Землі біля поверхні Землі

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}. \quad (10.2)$$

Тут m маса тіла, g – прискорення вільного падіння, яке отримує тіло, рухаючись під впливом притягування Землі. Воно однакове для всіх тіл, залежить від географічної широти тіла, його висоти над рівнем моря та інших чинників. Для проведення розрахунків, згідно з рішенням третьої Генеральної конференції з мір і ваг у 1901 році, було ухвалено **стандартне значення прискорення вільного падіння** $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$, а в технічних розрахунках, зазвичай,

беруть $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Можна вважати, що вектор прискорення вільного падіння \vec{g} спрямований до центру Землі. За своєю природою сила тяжіння належить до гравітаційних сил.

3 Вагою тіла називають силу \vec{P} , з якою тіло діє на опору або підвіс (рис. 10.2). Вага тіла є різновидом сил пружності. Вагу тіла \vec{P} потрібно відрізнити від сили тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$. Це різні сили за своєю природою, вони прикладені до різних тіл. Сила тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$ діє на тіло, а вага тіла \vec{P} діє на опору або підвіс (рис. 10.2).

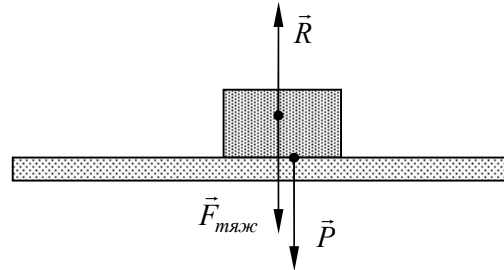


Рисунок 10.2

4 Силою реакції опори називають силу \vec{R} , з якою опора або підвіс діють на тіло (рис. 10.2). Варто зазначити що, сила реакції опори \vec{R} і вага тіла \vec{P} однакові за модулем та протилежні за напрямком відповідно до третього закону Ньютона

$$\vec{R} = -\vec{P}. \quad (10.3)$$

5 Знайдемо вагу тіла для випадку, коли тіло перебуває у стані спокою та коли тіло рухається з прискоренням.

У випадку, зображеному на рисунку 10.2, тіло масою m перебуває у спокої щодо Землі. Це означає, що рівнодійна сил, які діють на це тіло, дорівнює нулю. На це тіло, як впливає з рисунка, діють дві сили: сила тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$ з боку Землі та сила реакції опори \vec{R} . Отже,

$$\vec{R} + \vec{F}_{\text{тяж}} = 0. \quad (10.4)$$

Якщо взяти до уваги співвідношення (10.3), то з урахуванням (10.4) можемо записати

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{тяж}}. \quad (10.5)$$

Отже, вага та сила тяжіння дорівнюють одна одній. Однак потрібно зазначити, що ці сили прикладені до різних тіл – вага до опори, сила тяжіння до самого тіла.

Рівність (10.5) є правильною тільки тоді, коли підвіс або опора (а отже, і тіло) перебувають у стані спокою щодо Землі (або рухаються без прискорення). Коли опора рухається з прискоренням, вага тіла перестає дорівнювати силі тяжіння.

Припустимо, що тіло підвішене до стелі ліфта, який рухається з прискоренням \vec{a} (рис. 10.3). З таким самим прискоренням рухається й тіло. Тому рівняння руху має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}.$$

Звідси з урахуванням (10.3) отримуємо

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g} - \vec{P} \text{ або } \boxed{\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}}. \quad (10.6)$$

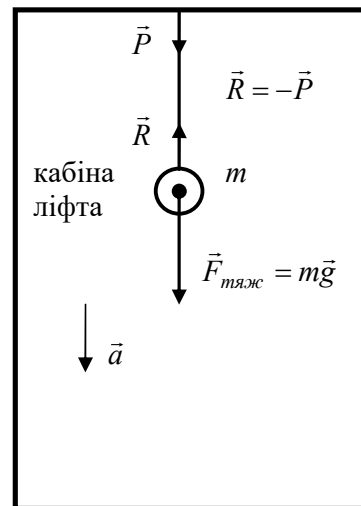


Рисунок 10.3

Отже, формула (10.6) визначає вагу тіла, що рухається з прискоренням.

Коли б ліфт обірвався і почав падати з прискоренням, що дорівнює прискоренню вільного падіння $\vec{a} = \vec{g}$, то тіло б перестало б діяти на підвіс $\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$. Стан, у якому вага тіла дорівнює нулю, визначають як **стан невагомості**.

§ 11 Сила тертя спокою, коефіцієнт тертя спокою. Сила тертя ковзання, коефіцієнт тертя ковзання

1 Сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{терт.сп.}}$ виникає під час дії на тіло деякої сили, за якій відносного руху тіла не виникає. Сила тертя спокою однакова за модулем і протилежно спрямована до компоненти сили, яка прикладена до тіла та паралельна поверхні дотику тіл. Максимальне значення сили тертя спокою визначається співвідношенням

$$F_{\text{терт.сп.макс}} = \mu N, \quad (11.1)$$

де N – модуль нормальної складової сили реакції опори (перпендикулярна до поверхні дотику), що діє на тіло; μ – коефіцієнт тертя.

У випадку, зображеному на рисунку 11.1, сила тертя спокою (вважаємо, що тіло, яке розміщене на похилій площині, не рухається), однакова за модулем і протилежно спрямована до компоненти сили тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$, яка паралельна поверхні дотику тіл. Нормальна складова сили реакції опори \vec{N} теж прикладена до тіла та спрямована перпендикулярно до поверхні дотику тіл (рис. 11.1). Потрібно зазначити, що нормальна складова сили реакції опори \vec{N} разом із силою тертя спокою $\vec{F}_{\text{терт.сп.}}$ утворюють повну силу реакції опору \vec{R} : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{терт.сп.}}$. Сила реакції опори та вага тіла відповідно до третього закону Ньютона однакові за модулем та протилежні за напрямком: $\vec{R} = -\vec{P}$, тобто $\vec{N} + \vec{F}_{\text{терт.сп.}} = -\vec{P}$.

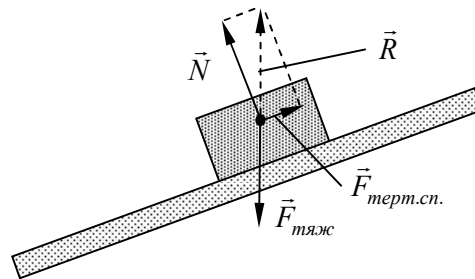


Рисунок 11.1

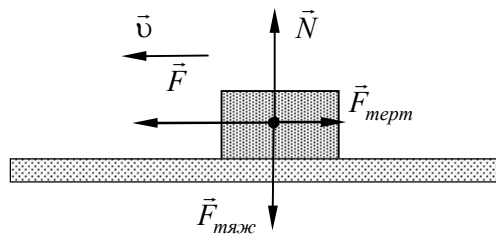


Рисунок 11.2

2 Сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{терт.ковз.}}$ виникає під час ковзання тіла по поверхні іншого тіла (рис. 11.2). Вона спрямована протилежно до напрямку вектора відносної швидкості, а її модуль визначається співвідношенням

$$F_{\text{терт.ковз.}} = \mu N, \quad (11.2)$$

де N – модуль нормальної складової сили реакції опори, що діє на тіло, μ – коефіцієнт тертя.

§ 12 Сила пружності. Закон Гука. Розтягування і стискування стержнів, модуль Юнга

1 Під дією зовнішніх сил виникають **деформації** (тобто зміни розмірів і форми) тіл. Якщо після припинення дії зовнішніх сил відновлюються попередні форма й розміри тіла, то таку деформацію називають **пружною**. Деформація має пружний характер у разі, коли зовнішня сила не перевищує певного значення, яке називається **межею пружності**. У разі перевищення цієї межі деформація стає **пластичною**. У цьому разі після усунення зовнішніх сил початкова форма й розміри тіла повністю не відновлюються. Далі ми будемо розглядати тільки пружні деформації.

2 У деформованому тілі виникають пружні сили, які врівноважують зовнішні сили, які викликали деформацію. Пояснимо це таким прикладом (рис. 12.1). Під дією зовнішньої сили $\vec{F}_{\text{зовн}}$ пружина отримує видовження x , унаслідок чого в пружині виникає пружна сила $\vec{F}_{\text{пруж}}$, що

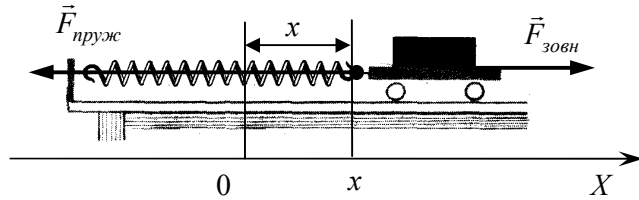


Рисунок 12.1

врівноважує силу $\vec{F}_{\text{зовн}}$. Пружні сили виникають у всій деформованій пружині. Будь-яка частина пружини діє на іншу частину із силою, що дорівнює $\vec{F}_{\text{пруж}}$ (рис. 12.2).

Установлений експериментально **закон Гука** стверджує, що за пружної деформації **видовження пружини пропорційно зовнішній силі**. Аналітично цей закон можна записати у вигляді

$$F_{\text{пруж},x} = -kx, \quad (12.1)$$

де $F_{\text{пруж},x}$ – проєкція сили пружності на вісь X (рис. 12.1); x – деформація (видовження або стиснення) пружини щодо недеформованого стану пружини, k – коефіцієнт жорсткості пружини.

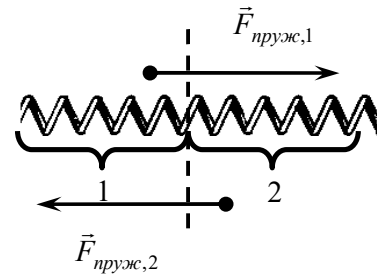


Рисунок 12.2

Жорсткість k пружини залежить від матеріалу, розмірів витка й довжини пружини. Якщо розрізати деформовану пружину на дві однакові частини, пружні сили в кожній із частин залишаться попередніми, а видовження x половини пружини буде вдвічі менше, ніж у первісній пружині. Звідси згідно з (12.1) випливає, що жорсткість «половинної» пружини вдвічі більше, ніж цілої.

3 Однорідні стержні поведуться під час розтягування й стиснення подібно пружині. Деформація спричиняє виникнення у стержні пружних сил. Ці сили зазвичай характеризують **напругою** σ , яку визначають як модуль сили, що припадає на одиницю площі:

$$\sigma = F_{\text{пруж}\perp} / S \quad (12.2)$$

(S – площа поперечного перерізу стрижня; вважаємо, що пружна сила розподілена рівномірно по перетину; значок « \perp » вказує на те, що сила перпендикулярна до площі, на яку вона діє). У разі розтягання σ вважається додатною, у разі стиснення – від'ємною. Одиниця напруги (а також тиску), що дорівнює ньютону на квадратний метр, називається **паскалем** (Па) $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

Дослід дає, що збільшення довжини стрижня Δl пропорційно напрузі σ і початковій довжині стрижня l_0 (рис. 12.3)

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}. \quad (12.3)$$

Відзначимо, що знак Δl збігається зі знаком σ . Коефіцієнт E у формулі (12.3) характеризує пружні властивості матеріалу стрижня. Цей коефіцієнт називають **модулем Юнга**. Модуль Юнга вимірюється в паскалях (Па).

Формулу (12.3) можна перетворити, позначивши відносне збільшення довжини стрижня літерою $\varepsilon = \Delta l / l_0$. Унаслідок цього отримуємо формулу

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma}, \quad (12.4)$$

відповідно до якої відносне видовження стрижня прямо пропорційно напрузі й обернено пропорційно модулю Юнга. Формула (12.4) виражає **закон Гука для стрижня**.

З (12.4) випливає, що модуль Юнга дорівнює такій нормальній напрузі, за якого відносне видовження дорівнювало б одиниці (тобто збільшення довжини Δl дорівнювало б початковій довжині l_0 стрижня), якби настільки великі пружні деформації були можливі. У дійсності, наприклад, залізні стрижні руйнуються за умови, що σ дорівнюють приблизно $0,002 E$; межа пружності досягається за ще менших напруг.

Знаючи, що розтягання і стиснення стрижнів супроводжується відповідною зміною і їхніх поперечних розмірів.

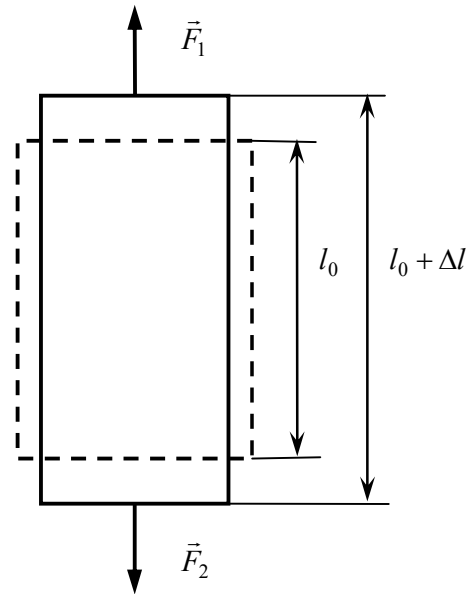


Рисунок 12.3

ТЕМА 3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

§ 13 Закон збереження імпульсу для системи матеріальних точок

1 У фізиці дуже важливу роль відіграють закони збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу. Ці закони збереження мають загальний характер – їх можна застосовувати не тільки до механічних явищ, але й зазвичай до всіх явищ природи. Закони збереження не залежать від природи й характеру сил. Тому за їхньою допомогою можна дійти до низки важливих висновків про поведінку механічних систем навіть у тих випадках, коли сили залишаються невідомими.

2 Векторну величину

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}},$$

де m – маса матеріальної точки, а \vec{v} – її швидкість, називають **імпульсом матеріальної точки**.

Використовуючи поняття імпульсу і беручи до уваги, що маса тіла в класичній механіці є величиною сталою, рівняння другого закону Ньютона $m d\vec{v} / dt = \vec{F}$ для матеріальної точки можна записати у вигляді

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}. \quad (13.1)$$

3 Розглянемо систему, що складається з N частинок (матеріальних точок). Знайдемо рівняння, яке визначає зміну в часі повного імпульсу цієї системи.

Імпульсом системи або повним імпульсом системи \vec{p} називають векторну величину, що дорівнює сумі імпульсів матеріальних точок цієї системи

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i}. \quad (13.2)$$

Тіла системи можуть взаємодіяти як між собою, так і з тілами, що не входять у систему. Відповідно до цього сили, що діють на тіла системи, поділяються на внутрішні й зовнішні. **Внутрішніми** називають сили, з якими тіла системи взаємодіють між собою, **зовнішніми** – сили, обумовлені впливом тіл, що не належать системі.

Розглянемо систему, яка складається з N частинок (матеріальних точок). Позначимо через \vec{F}_{ik} силу, що діє на i -ту частинку з боку k -ї частинки (перший індекс вказує номер частинки, на яку діє сила, другий індекс – номер частинки, впливом якої обумовлена ця сила). Зрозуміло, \vec{F}_{ik} є внутрішніми силами. Позначимо через \vec{F}_i результуючу всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту частинку. Напишемо рівняння руху всіх N частинок

$$d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{1k} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1 \quad (k \neq 1),$$

.....,

$$d\vec{p}_i / dt = \vec{F}_{i1} + \dots + \vec{F}_{ik} + \dots + \vec{F}_{iN} + \vec{F}_i \quad (k \neq i),$$

.....,

$$d\vec{p}_N / dt = \vec{F}_{N1} + \dots + \vec{F}_{Nk} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_N \quad (k \neq N).$$

Тут \vec{p}_i – імпульс i -ї частинки.

Просумуємо відповідно праві та ліві частини цих рівнянь. Ліворуч отримаємо похідну за часом від повного імпульсу системи

$$\sum_i^N \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i^N \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \vec{p}.$$

Праворуч відмінною від нуля буде тільки сума зовнішніх сил $\sum \vec{F}_i$. Дійсно, суму внутрішніх сил можна подати у вигляді

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki}) + \dots + (\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}).$$

Відповідно до третього закону Ньютона вираз у кожній із дужок дорівнює нулю. Отже, сума внутрішніх сил, що діють на тіла системи, завжди дорівнює нулю

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki}) + \dots + (\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}) = 0.$$

З урахуванням цього отримуємо, що

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i}. \quad (13.3)$$

Отже, похідна за часом від повного імпульсу системи дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на тіла системи. Формула (2.3) є розв'язком поставленої задачі.

4 Якщо система замкнена, то зовнішні сили відсутні й права частина рівняння (13.3) дорівнює нулю. Відповідно $d\vec{p} / dt = 0$ і, отже, $\vec{p} = const$.

Отже, ми дійшли висновку, що повний, сумарний імпульс замкненої системи матеріальних точок залишається постійним. Це твердження становить **зміст закону збереження імпульсу**.

Зазначимо, що відповідно до формули (13.3) повний імпульс залишається постійним і для незамкненої системи в тому разі, коли сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю.

Спроектуюмо всі вектори, що входять до рівняння (13.3), на деякий напрямок X і отримаємо

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{xi}. \quad (13.4)$$

Звідси випливає, що для того щоб проекція повного імпульсу на деякий напрямок X була сталою, достатньо, щоб сума проекцій зовнішніх сил на цей напрямок дорівнювала нулю.

§ 14 Центр мас системи матеріальних точок. Швидкість і прискорення центра мас

1 Центром мас системи матеріальних точок називається точка C , яка визначається радіус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i, \quad (14.1)$$

де m_i – маса i -ї частинки; \vec{r}_i – радіус-вектор, що задає положення цієї частинки; $m_{\text{сист}}$ – сумарна маса системи.

Спроектувавши \vec{r}_C на координатні осі, отримуємо декартові координати центра мас

$$x_C = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i z_i. \quad (14.2)$$

2 Знайдемо швидкість центра мас. Для цього продиференціюємо \vec{r}_C за часом

$$\vec{v}_C = \frac{d}{dt}(\vec{r}_C) = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{m_{\text{сист}}}, \quad \text{тобто } \vec{v}_C = \frac{\vec{p}}{m_{\text{сист}}}. \quad (14.3)$$

У цих виразах \vec{v}_i – швидкість, а \vec{p}_i – імпульс i -ї частинки; \vec{p} – повний імпульс системи.

3 Знайдемо прискорення центра мас. Для цього продиференціюємо швидкість центра мас \vec{v}_C за часом

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad \text{тобто } \vec{a}_C = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (14.4)$$

Тут ми використали співвідношення (13.3), згідно з яким похідна за часом від повного імпульсу системи дорівнює сумі зовнішніх сил $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i\right)$. Отже, *центр мас рухається*

так, як рухалася б матеріальна точка з масою, що дорівнює масі системи, під дією результуючої всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіл системи.

Для замкненої системи $\vec{a}_C = \frac{1}{m_{\text{сист}}}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$. Це означає, що центр мас замкненої системи рухається прямолінійно й рівномірно або перебуває у стані спокою.

§ 15 Робота змінної сили. Теорема про кінетичну енергію для системи матеріальних точок

1 Елементарною роботою сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярний добуток цієї сили \vec{F} на переміщення $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos \alpha, \quad (15.1)$$

де α – кут між векторами \vec{F} й $d\vec{r}$ (рис. 15.1). Оскільки переміщення $d\vec{r}$ вважається нескінченно малим, величина dA називається елементарною роботою, на відміну від роботи на скінченному переміщенні.

Загалом, коли матеріальна точка, рухаючись криволінійною траєкторією, проходить шлях скінченної довжини, можна уявно розбити цей шлях на нескінченно малі ділянки, на кожній із яких сила \vec{F} може вважатися постійною, і елементарна робота може бути обчислена за формулою (15.1). Якщо скласти всі ці елементарні роботи й перейти до границі, спрямувавши до нуля довжини всіх елементарних переміщень, то отримаємо

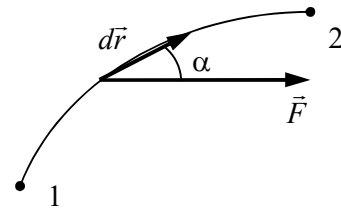


Рисунок 15.1

$$A = \lim_{\max(\Delta A_i) \rightarrow 0} \sum_i \Delta A_i = \lim_{\max(\Delta \vec{r}_i) \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (15.2)$$

Цей вираз називається криволінійним інтегралом вектора \vec{F} уздовж траєкторії L . Цей інтеграл, за визначенням, і є **роботою сили \vec{F} під час переміщення уздовж кривої L** .

Якщо $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то елементарна робота цієї сили буде дорівнювати

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = dA_1 + dA_2.$$

Отже, елементарна робота результуючої двох або декількох сил дорівнює сумі елементарних робіт цих сил. Очевидно, це твердження справедливо і для робіт на скінченних переміщеннях

$$A = A_1 + A_2. \quad (15.3)$$

Одиницею роботи в системі СІ є джоуль (Дж). Джоуль є роботою сили в один ньютон на переміщенні в один метр за умови, що напрямок сили збігається з напрямком переміщення.

Потужністю називають величину

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (15.4)$$

Потужність, як бачимо, чисельно дорівнює роботі, яку виконує сила за одиницю часу. Її одиницями є джоуль на секунду, або ват (Вт).

2 Знайдемо зв'язок між роботою сили та зміною кінетичної енергії частинки.

Обчислимо роботу сили (15.2), що діє на матеріальну точку, скориставшись другим законом Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

а також тим, що елементарне переміщення пов'язано зі швидкістю руху співвідношенням

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt.$$

Тоді формула (15.2) набуде вигляду

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} \cdot dt = \int m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}. \quad (15.5)$$

Тут вектор $d\vec{v}$ означає елементарне збільшення вектора \vec{v} , причому це збільшення може й не збігатися за напрямком з вектором \vec{v} . Якщо ми домовимося розуміти під v довжину вектора \vec{v} , то, очевидно $(v)^2 = (\vec{v})^2$. Дійсно, праворуч стоїть скалярний добуток вектора \vec{v} на самого себе, який дорівнює квадрату довжини вектора, як це безпосередньо впливає з визначення скалярного добутку. Диференціюючи тепер обидві частини співвідношення $(v)^2 = (\vec{v})^2$, знаходимо $v dv = \vec{v} \cdot d\vec{v}$. Зрозуміло, що подібне співвідношення виконується для будь-якого вектора. Підставляємо отримане співвідношення в (15.5) і отримуємо

$$A_{12} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (15.6)$$

де v_1 – початкова, а v_2 – кінцева швидкості точки. Біля літери A ми поставили індекси 1, 2, щоб підкреслити, що мова йде про роботу під час переміщення матеріальної точки з початкового положення 1 у кінцеве положення 2 (рис. 15.1).

Кінетичною енергією матеріальної точки називають величину

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (15.7)$$

Інколи кінетичну енергію позначають так W_k , T , K . Одиницею кінетичної енергії в системі СІ є джоуль (Дж). За допомогою поняття про кінетичну енергію співвідношення (15.6) можна записати у вигляді

$$A_{12} = E_{k,2} - E_{k,1} \quad (15.8)$$

*Отже, робота сили під час переміщення матеріальної точки дорівнює збільшенню кінетичної енергії цієї точки. Це твердження (співвідношення (15.8)) називають **теоремою про кінетичну енергію матеріальної точки**.*

Формула (15.8) виконує поставлене в цьому пункті завдання.

3 Проведемо узагальнення теореми про кінетичну енергію для матеріальної точки на випадок системи матеріальних точок.

Отриманий результат нескладно узагальнити на випадок довільної системи матеріальних точок. **Кінетичною енергією системи називається сума кінетичних енергій матеріальних точок, з яких ця система складається**

$$E_{k,сум} = \sum_i E_{k,i}. \quad (15.9)$$

Напишемо співвідношення (15.8) для кожної матеріальної точки системи, а потім усі такі співвідношення складемо. Унаслідок цього отримаємо співвідношення, аналогічне до формули (15.8), але вже не для однієї матеріальної точки, а для системи матеріальних точок

$$A_{12,сум} = E_{k,сум,2} - E_{k,сум,1}. \quad (15.10)$$

Під $A_{12,сум}$ розуміємо суму робіт усіх сил як внутрішніх, так і зовнішніх, що діють на матеріальні точки системи, у разі переходу системи із стану 1 в стан 2. *Отже, робота всіх сил, що діють на систему матеріальних точок, дорівнює збільшенню кінетичної енергії цієї системи. Це твердження (співвідношення (15.10)) називають **теоремою про кінетичну енергію для системи матеріальних точок**.*

§ 16 Робота сили тяжіння, сили всесвітнього тяжіння, сили пружності. Консервативні сили

Усі сили, що трапляються в макроскопічній механіці, зазвичай розділяють на консервативні й неконсервативні. Розглянемо приклади.

1 Знайдемо роботу сили тяжіння $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$, яку вона виконує в разі переміщення матеріальної точки маси m із положення 1 у положення 2 (рис. 16.1). Застосуємо визначення для роботи сили й отримаємо

$$A_{12} = \int_{L_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12}} (-mg\vec{e}_y) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = \int_{L_{12}} (-mg) \cdot dy = -mgy \Big|_{y_1}^{y_2}$$

або

$$A_{12} = -(mgy_2 - mgy_1) = mgy_1 - mgy_2. \quad (16.1)$$

Тут використали, що $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$, y_1 та y_2 y -координати початку та кінця траєкторії матеріальної точки.

Проаналізуємо отриманий результат. Бачимо, що робота сили тяжіння визначається початковим (y_1) та кінцевим (y_2) положеннями матеріальної точки. Якщо замість траєкторії L_{12a} узяти будь-яку іншу траєкторію між тими самими початковими положеннями 1 і 2, наприклад L_{12b} , то робота сили тяжіння не зміниться, тому що вона визначається тільки різницею $y_2 - y_1$, яка від форми траєкторії руху матеріальної точки не залежить. Отже, робота сили тяжіння (16.1) не залежить від форми траєкторії руху, а визначається тільки початковим і кінцевим положеннями матеріальної точки, що переміщується.

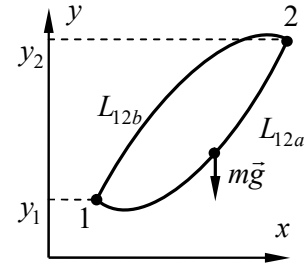


Рисунок 16.1

2 Знайдемо роботу сили всесвітнього тяжіння $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r}$, яку вона виконує у разі переміщення матеріальної точки маси m із положення 1 у положення 2. Застосуємо визначення для роботи сили й отримаємо

$$A_{12} = \int_{L_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12}} -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = - \int_{L_{12}} G \frac{mM}{r^3} r \cdot dr = G \frac{mM}{r} \Big|_{r_1}^{r_2}$$

або

$$A_{12} = - \left(\left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) \right) = \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_2} \right). \quad (16.2)$$

Тут ми використали, що $\vec{r} d\vec{r} = r dr$ (для доведення цього достатньо продиференціювати тотожність $(\vec{r})^2 = (r)^2$).

Бачимо, що робота сили всесвітнього тяжіння (16.2) визначається початковим (r_1) і кінцевим (r_2) положеннями матеріальної точки з масою m і не залежить від форми траєкторії.

3 Знайдемо роботу сили пружності $F_x = -kx$, яку вона виконує в разі деформації пружини (тіла) з положення 1 у положення 2 вздовж осі X . Застосуємо визначення для роботи сили й отримаємо

$$A_{12} = \int_{L_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_{12}} -kx \cdot dx = - \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

або

$$A_{12} = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right) = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (16.3)$$

Тут x_1 – деформація пружини (зміщення щодо недеформованого стану) у початковому положенні; x_2 – деформація пружини в кінцевому положенні. Бачимо, що робота сили пружності (16.3) визначається початковою (x_1) та кінцевою (x_2) деформаціями.

4 Отже, в усіх вищенаведених прикладах робота сили не залежить від форми траєкторії руху, а визначається тільки початковим і кінцевим положеннями матеріальної точки, що переміщується. Такі сили отримали назву консервативні.

Консервативними силами називають такі сили, які залежать тільки від координат і робота яких у разі переміщення матеріальної точки з довільного початкового положення в

довільне кінцеве положення не залежить від способу переходу (форми траєкторії), а визначається тільки початковими та кінцевими положеннями.

Можна дати інше визначення консервативних сил, еквівалентне вищевказаному: **консервативними** називаються сили, що залежать тільки від координат системи і робота яких з переміщення матеріальної точки довільною замкненою траєкторією дорівнює нулю. Еквівалентність формулювань тут доводити не будемо.

Усі сили, що не є консервативними, називають *неконсервативними силами*. До них належать, насамперед, так звані дисипативні сили (робота яких завжди від'ємна), наприклад, сили тертя, що виникають у разі ковзання будь-якого тіла по поверхні іншого. Неконсервативними силами є сили опору, що діють на тіло під час руху в рідкому або газоподібному середовищі. Їх також іноді називають силами тертя. усі ці сили залежать не тільки від координат тіл, але й від їхніх відносних швидкостей. Вони спрямовані завжди проти швидкості тіла (щодо поверхні, по якій тіло ковзає, або щодо середовища, у якому тіло рухається).

Укажемо ще на один вид неконсервативних сил, які називають *гіроскопічними силами*. Ці сили залежать від швидкості матеріальної точки й діють завжди перпендикулярно до цієї швидкості. Робота таких сил дорівнює нулю за будь-якого переміщення матеріальної точки, зокрема і під час її руху по замкненій траєкторії (тут завжди сила перпендикулярна до елементарного переміщення і тому елементарна робота завжди дорівнює нулю $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\pi/2) = 0$). Від консервативних гіроскопічні сили відрізняються тим, що вони визначаються не тільки положенням, але й швидкістю матеріальної точки, що рухається. Прикладом гіроскопічних сил є магнітна складова сили Лоренца, тобто сила, що діє на заряджену частинку в магнітному полі.

§ 17 Потенціальна енергія. Взаємний зв'язок потенціальної енергії і консервативної сили

1 Якщо на частинку діє консервативна сила, то для неї можна ввести поняття потенціальної енергії. Нескладно показати, що роботу консервативної сили у разі переміщення тіла з положення 1 в положення 2 можна подати у вигляді зменшення деякої функції $E_p(x, y, z)$, яка залежить лише від координат,

$$A_{12} = -(E_p(x_2, y_2, z_2) - E_p(x_1, y_1, z_1)) = E_p(x_1, y_1, z_1) - E_p(x_2, y_2, z_2). \quad (17.1)$$

Така функція називається **потенціальною енергією частинки в полі консервативної сили**. Інколи потенціальну енергію позначають через W_p , U , Π . Одиницею потенціальної енергії в системі СІ є джоуль (Дж).

Зрозуміло, що введена в такий спосіб потенціальна енергія визначається з точністю до довільної сталої. Тобто функція $E'_p(x, y, z) = E_p(x, y, z) + C$, де C – довільна стала, теж задовольняє співвідношенню (17.1)

$$\begin{aligned} A_{12} &= E_p(x_1, y_1, z_1) - E_p(x_2, y_2, z_2) = \\ &= (E'_p(x_1, y_1, z_1) - C) - (E'_p(x_2, y_2, z_2) - C) = E'_p(x_1, y_1, z_1) - E'_p(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Отже, потенціальна енергія визначена неоднозначно, з точністю до довільної сталої. Саме тому для довільної точки простору можна вибрати довільну сталу так, щоб потенціальна енергія в цій точці дорівнювала нулю.

Будемо вважати, що в положенні 2 потенціальна енергія дорівнює нулю ($E_p(x_2, y_2, z_2) = 0$). Тоді із співвідношення (17.1) отримаємо, що

$$A_{12} = E_p(x_1, y_1, z_1) - E_p(x_2, y_2, z_2) = E_p(x_1, y_1, z_1). \quad (17.2)$$

Використовуючи отримане співвідношення (17.2), можемо дати інше, еквівалентне визначення потенціальної енергії. **Потенціальною енергією тіла в даній точці простору називається величина, яка дорівнює роботі консервативної сили у разі переходу із даної точки простору в точку, де потенціальна енергія вважається такою, що дорівнює нулю.**

2 Узагальнимо співвідношення (17.1) на випадок довільної системи матеріальних точок, на які діють лише консервативні сили.

Введемо поняття потенціальної енергії системи матеріальних точок. **Потенціальною енергією системи матеріальних точок називається сума потенціальних енергій тіл, з яких ця система складається**

$$E_{p,сист} = \sum_i E_{p,i}. \quad (17.3)$$

Напишемо співвідношення (17.1) для кожної матеріальної точки системи, а потім всі такі співвідношення складемо. Унаслідок цього отримаємо співвідношення аналогічне до формули (17.1), але вже не для однієї матеріальної точки, а для системи матеріальних точок

$$A_{12,сист} = E_{p,сист,1} - E_{p,сист,2} \quad (17.4)$$

Під $A_{12,сист}$ розуміємо суму робіт всіх консервативних сил, що діють на матеріальні точки системи під час переходу з положення 1 в положення 2.

3 Обчислимо потенціальну енергію в деяких найпростіших випадках. Порівнюючи визначення для потенціальної енергії (17.1) та вирази для роботи консервативних сил, можемо записати вирази для відповідних потенціальних енергій.

Потенціальна енергія тіла в полі сили тяжіння

$$E_{p,тяж} = mgy, \quad (17.5)$$

де вважаємо, що в точці з координатою $y = 0$ потенціальна енергія дорівнює нулю.

Потенціальна енергія тіла в полі сили всесвітнього тяжіння

$$E_{p,всесв.тяж} = -G \frac{mM}{r}, \quad (17.6)$$

де вважаємо, що в точці з координатою $r = \infty$ потенціальна енергія дорівнює нулю.

Потенціальна енергія розтягнутої пружини

$$E_{p,пружн.} = \frac{kx^2}{2}, \quad (17.7)$$

де вважаємо, що в точці з координатою $x = 0$ (коли пружина недеформована) потенціальна енергія дорівнює нулю.

4 Знайдемо силу, що діє на частинку в кожній точці поля, за відомим виразом для потенційної енергії $E_p(x, y, z)$.

Нехай частинка виконала елементарне переміщення $d\vec{r}$. У цьому разі сили поля виконують над частинкою роботу

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz. \quad (17.8)$$

З іншого боку, відповідно до формули (17.1), ця робота повинна дорівнювати зменшенню потенціальної енергії

$$dA = -dE_p(x, y, z) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right). \quad (17.9)$$

Тут написали, наприклад, $\partial E_p(x, y, z) / \partial x$ замість $dE_p(x, y, z) / dx$, щоб підкреслити ту обставину, що похідна за x обчислюється за умови, що координати y та z залишаються

постійними. **Похідна, яка обчислена за такої умови, називається частинною.** Далі прирівняємо (17.8) та (17.9) і знайдемо, що

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right),$$

або

$$F_x = - \frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

Зрозуміло, що сума добутків компонент сили на відповідні орти координатних осей дає вектор сили

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (17.10)$$

Отже, співвідношення (17.10) виконує завдання, що було сформульоване в цьому пункті.

5 Потрібно зазначити, що вирази, подібні до (17.10) часто трапляються у фізиці й математиці. У зв'язку з цим у математиці вводять поняття градієнта. **Градiєнтом скалярної функції $\varphi(x, y, z)$ називають векторну функцію з компонентами**

$$\text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (17.11)$$

Вираз (17.11) можна розглядати як результат дії на функцію $\varphi(x, y, z)$ оператора

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (17.12)$$

який називається **оператором набла**. Тому градієнт функції $\varphi(x, y, z)$ можна подати у вигляді

$$\text{grad}(\varphi) = \vec{\nabla} \varphi. \quad (17.13)$$

Отже, використовуючи поняття градієнта та оператора набла, співвідношення (17.10) можемо записати у вигляді

$$\vec{F} = -\text{grad}(E_p) \quad \text{або} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p. \quad (17.14)$$

Тобто **консервативна сила дорівнює градієнту потенціальної енергії частинки, узятому зі зворотним знаком.**

§ 18 Повна механічна енергія системи матеріальних точок. Закон збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок. Робота неконсервативних сил

1 Розглянемо перехід системи матеріальних точок із стану 1 у стан 2. Вважаємо, що в системі діють лише консервативні сили. З'ясуємо, як під час цього переходу змінюється енергія системи.

За цих умов робота, що виконують усі консервативні сили, що діють на матеріальні точки системи в разі переходу з положення 1 у положення 2, визначається співвідношенням (17.4)

$$A_{12, \text{сис}т} = E_{p, \text{сис}т, 1} - E_{p, \text{сис}т, 2}. \quad (18.1)$$

З іншого боку, згідно з теоремою про кінетичну енергію для системи матеріальних точок можемо записати

$$A_{12,cуст} = E_{k,cуст,2} - E_{k,cуст,1}. \quad (18.2)$$

Прирівнюємо вирази (18.1) та (18.2) і отримуємо

$$E_{p,cуст,1} - E_{p,cуст,2} = E_{k,cуст,2} - E_{k,cуст,1}$$

або

$$E_{k,cуст,1} + E_{p,cуст,1} = E_{k,cуст,2} + E_{p,cуст,2}. \quad (18.3)$$

Сума кінетичної й потенціальної енергій системи називається **повною механічною енергією системи матеріальних точок**

$$E_{cуст} = E_{p,cуст} + E_{k,cуст}.$$

Тоді співвідношення (18.3) можна записати у вигляді

$$E_{cуст,1} = E_{cуст,2} \quad \text{або} \quad E_{cуст} = const. \quad (18.4)$$

Отже, у системі, у якій діють лише консервативні (і гіроскопічні) сили повна механічна енергія залишається незмінною. Це твердження називається **законом збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок**.

2 Розглянемо випадок, коли разом з консервативними діють також і неконсервативні сили. Знайдемо роботу неконсервативних сил. Робота всіх сил $A_{12,cуст}$ у разі переходу системи з положення 1 у положення 2 як і раніше, згідно з теоремою про кінетичну енергію системи матеріальних точок дорівнює збільшенню її кінетичної енергії

$$A_{12,cуст} = E_{k,cуст,2} - E_{k,cуст,1}. \quad (18.5)$$

Але в розглянутому випадку цю роботу можна подати у вигляді суми роботи консервативних сил $A_{12,cуст}^{конс}$ і роботи неконсервативних сил $A_{12,cуст}^{неконс}$

$$A_{12,cуст} = A_{12,cуст}^{конс} + A_{12,cуст}^{неконс}. \quad (18.6)$$

Роботу ж консервативних сил системи, як відомо, можна виразити через зменшення її потенціальної енергії

$$A_{12,cуст}^{конс} = E_{p,cуст,1} - E_{p,cуст,2}. \quad (18.7)$$

Підставляємо співвідношення (18.5), (18.7) в (18.6) і отримуємо

$$E_{k,cуст,2} - E_{k,cуст,1} = E_{p,cуст,1} - E_{p,cуст,2} + A_{12,cуст}^{неконс}$$

або

$$(E_{k,cуст,2} + E_{p,cуст,2}) - (E_{k,cуст,1} + E_{p,cуст,1}) = A_{12,cуст}^{неконс}.$$

Використаємо поняття повної механічної енергії ($E_{cуст} = E_{k,cуст} + E_{p,cуст}$) і отримуємо

$$A_{12,cуст}^{неконс} = E_{cуст,2} - E_{cуст,1}. \quad (18.8)$$

Отже, у випадку, коли в системі діють неконсервативні сили, повна механічна енергія системи матеріальних точок не залишається постійною. Робота неконсервативних сил дорівнює зміні повної механічної енергії системи матеріальних точок.

§ 19 Зіткнення тіл. Швидкості тіл після центрального абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів

1 Під час зіткнення тіла деформуються. Водночас кінетична енергія тіл частково або повністю переходить у потенціальну енергію пружної деформації й у внутрішню енергію тіл. Збільшення внутрішньої енергії призводить до нагрівання тіл. З допомогою законів збереження імпульсу та повної механічної енергії можна знайти швидкості тіл після

зіткнення, не використовуючи явний вид сил пружності, за допомогою яких відбувається взаємодія тіл.

Розглянемо два граничних види зіткнення – абсолютно непружний і абсолютно пружний удар. **Абсолютно непружним** називається удар, за якої потенціальна енергія пружної деформації не виникає; кінетична енергія тіл частково або повністю перетворюється у внутрішню енергію; після удару тіла рухаються з однаковою швидкістю (тобто як одне тіло) або перебувають у стані спокою. За такого удару виконується тільки закон збереження імпульсу, закон же збереження механічної енергії не виконується – механічна енергія частково або повністю переходить у внутрішню.

Абсолютно пружним називається такий удар, за якого повна механічна енергія тіл зберігається. Спочатку кінетична енергія частково або повністю переходить у потенціальну енергію пружної деформації. Потім тіла повертаються до початкової форми, відштовхуючись одне від одного. У підсумку потенціальна енергія пружної деформації знову переходить у кінетичну й тіла розлітаються зі швидкостями, обумовленими двома умовами – збереженням повної механічної енергії й повного імпульсу тіл.

Обмежимося розглядом центрального удару двох однорідних куль. **Удар називається центральним**, якщо кулі до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їхні центри. З міркувань симетрії ясно, що після удару кулі будуть рухатися уздовж тієї самої прямої. Будемо вважати, що кулі рухаються поступально (тобто не обертаючись). Будемо також припускати, що кулі утворюють замкнену систему або зовнішні сили, що прикладені до куль, урівноважують одна одну.

2 Розглянемо абсолютно непружний удар. Позначимо маси куль m_1 і m_2 , швидкості куль до удару \vec{v}_1 й \vec{v}_2 . Ці величини будемо вважати відомими. Знайдемо швидкості куль після удару \vec{u}_1 й \vec{u}_2 .

Відповідно до закону збереження імпульсу сумарний імпульс куль після удару повинен бути таким, як і до удару. Тому

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

де $\vec{u} = \vec{u}_1 = \vec{u}_2$, тобто швидкості куль після абсолютно непружного удару однакові. Тоді

$$\boxed{\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}. \quad (19.1)$$

Формула (19.1) розв'язує поставлену задачу. Для числових розрахунків потрібно спроектувати всі вектори на координатні осі.

3 Розглянемо центральний абсолютно пружний удар двох куль. Позначимо маси куль m_1 і m_2 , швидкості куль до удару \vec{v}_1 й \vec{v}_2 . Ці величини будемо вважати відомими. Знайдемо швидкості цих куль після удару \vec{u}_1 й \vec{u}_2 .

Запишемо рівняння законів збереження імпульсу й енергії:

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} &= \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Перетворимо ці рівняння так:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \quad (19.2)$$

$$[m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)](\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = [m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)](\vec{u}_2 + \vec{v}_2). \quad (19.3)$$

Тут ми скористалися тим, що $(\vec{A}^2 - \vec{B}^2) = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$.

Далі, використовуючи те, що $m_1(\bar{v}_1 - \bar{u}_1) = m_2(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) \neq 0$, рівняння (19.3) можемо розділити на рівняння (19.2). Унаслідок цього отримаємо

$$\bar{v}_1 + \bar{u}_1 = \bar{u}_2 + \bar{v}_2. \quad (19.4)$$

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь (19.2) та (19.4) щодо невідомих \bar{u}_1 та \bar{u}_2 , знайдемо швидкості куль після удару

$$\bar{u}_1 = \frac{2m_2\bar{v}_2 + (m_1 - m_2)\bar{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad \bar{u}_2 = \frac{2m_1\bar{v}_1 + (m_2 - m_1)\bar{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (19.5)$$

Зазначимо, що вираз для u_2 відрізняється від виразу для u_1 тільки перестановкою індексів 1 і 2. Це природно, оскільки кулі в процесі зіткнення абсолютно рівноправні, й байдуже, яку з куль вважати першою, а яку другою.

Щоб виконати розрахунки, потрібно спроектувати всі вектори на вісь X , вздовж якої рухаються тіла. У цьому разі формули (19.5) набудуть вигляду

$$u_{1x} = \frac{2m_2v_{2x} + (m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (19.6)$$

Формули (19.6) розв'язують поставлену задачу.

§ 20 Момент сили і момент імпульсу. Рівняння моментів для матеріальної точки

1 Важливі закони механіки пов'язані з поняттями моменту імпульсу та моменту сили. Потрібно розрізнити й не змішувати один з одним моменти цих векторів щодо *точки й щодо осі*. Момент вектора щодо точки й щодо осі – різні поняття, хоча й пов'язані між собою. Момент вектора щодо точки є *вектором*. Момент того самого вектора щодо осі є *проекцією* вектора на цю вісь його моменту щодо точки, що лежить на тій же осі.

2 Розглянемо моменти щодо точки. Нехай O – будь-яка точка, щодо якої розглядається момент вектора сили або вектора імпульсу (рис. 20.1). Цю точку називають полюсом. Позначимо через \vec{r} радіус-вектор, проведений від цієї точки до точки прикладення сили \vec{F} . **Моментом сили \vec{F} щодо точки O називається векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} на силу \vec{F}**

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (20.1)$$

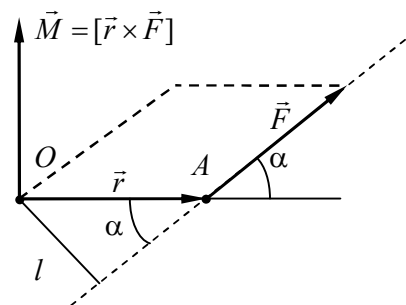


Рисунок 20.1

Для системи матеріальних точок **моментом сили системи** щодо деякого полюсу O називається сума моментів сил цих точок щодо того самого полюсу.

Аналогічно **моментом імпульсу** матеріальної точки щодо точки або полюса O називається вектор, що дорівнює

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (20.2)$$

де \vec{p} – імпульс матеріальної точки; \vec{r} – радіус-вектор, що визначає положенням цієї точки.

Для системи матеріальних точок **повним моментом імпульсу системи** щодо деякого полюсу O називається сума моментів імпульсів точок системи щодо того самого полюсу.

3 Доцільність введення моментів імпульсу й сили можна виправдувати тим, що вони пов'язані між собою важливим співвідношенням, яке називається рівнянням моментів. Розглянемо випадок, коли точка O є нерухомою. У разі однієї матеріальної точки, диференціюючи вираз (20.2) за часом, дістанемо $d\vec{L}/dt = [\vec{r} \times d\vec{p}/dt] + [d\vec{r}/dt \times \vec{p}]$. Водночас потрібно взяти до уваги, що імпульс частинки \vec{p} є паралельним до її швидкості $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

Тобто $[[d\vec{r}/dt \times \vec{p}]] = [[\vec{v} \times \vec{p}]] = v \cdot p \cdot \sin 0 = 0$. Крім того, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Отже, $[\vec{r} \times d\vec{p}/dt] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$. Унаслідок цього отримуємо

$$\boxed{d\vec{L}/dt = \vec{M}}. \quad (20.3)$$

Це рівняння називають **рівнянням моментів для однієї матеріальної точки** щодо точки обертання O .

4 Момент сили \vec{M} характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки. Модуль моменту сили на підставі (20.1) і визначення векторного добутку дорівнює

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha, \quad (20.4)$$

де α – кут між вектором \vec{r} і \vec{F} (рис. 20.1). Вираз (20.4) можна перетворити

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot l, \quad (20.5)$$

де $l = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$ – плече сили (рис. 20.1). За визначенням, **плечем сили** називають довжину перпендикуляра, який опущено з точки O на пряму, вздовж якої діє сила (рис. 20.1).

Аналізуючи вираз (20.5), можемо зробити висновок, що **здатність сили обертати тіло залежить не тільки від величини сили $|\vec{F}|$, але й від плеча сили l .**

5 Обертання, зазвичай, відбувається не навколо деякої точки O , а навколо осі обертання Z . Проектуючи вектор рівняння (20.3) на вісь обертання Z , отримаємо **рівняння моментів щодо осі обертання**:

$$\boxed{dL_z/dt = M_z}, \quad (20.6)$$

де M_z і L_z є відповідними проекціями векторів \vec{M} та \vec{L} на вісь обертання Z .

§ 21 Рівняння моментів для системи матеріальних точок. Закон збереження моменту імпульсу

1 Узагальнимо рівняння моментів на випадок системи матеріальних точок.

Розглянемо систему, яка складається з N частинок (матеріальних точок). Позначимо через \vec{F}_{ik} силу, що діє на i -ту частинку з боку k -ї частинки (перший індекс вказує номер частинки, на яку діє сила, другий індекс – номер частинки, впливом якої обумовлена ця сила). Зрозуміло, \vec{F}_{ik} є внутрішніми силами. Позначимо через \vec{F}_i результуючу всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту частинку. Напишемо рівняння моментів для кожної матеріальної точки

$$d\vec{L}_1/dt = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + \dots + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1k}] + \dots + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1N}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] \quad (k \neq 1),$$

.....,

$$d\vec{L}_i/dt = [\vec{r}_i \times \vec{F}_{i1}] + \dots + [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + \dots + [\vec{r}_i \times \vec{F}_{iN}] + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \quad (k \neq i),$$

.....,

$$d\vec{L}_N/dt = [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N1}] + \dots + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{Nk}] + \dots + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N,N-1}] + [\vec{r}_N \times \vec{F}_N] \quad (k \neq N),$$

де \vec{L}_i – момент імпульсу i -ї частинки.

Складемо разом ці рівняння. Ліворуч отримаємо похідну за часом від повного моменту імпульсу системи

$$\sum_i^N \left(\frac{d}{dt} \vec{L}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i^N \vec{L}_i \right) = \frac{d}{dt} \vec{L}. \quad (21.1)$$

Праворуч відмінною від нуля буде тільки сума зовнішніх моментів сил $\sum [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum \vec{M}_{i, \text{зовн}}$. Дійсно, суму внутрішніх сил можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}] + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{13}] + [\vec{r}_3 \times \vec{F}_{31}] + \dots + (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}] + \dots + \\ & \quad + (\vec{r}_{N-1} \times \vec{F}_{N-1,N}] + [\vec{r}_N \times \vec{F}_{N,N-1}] = \\ & = ([(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}]) + ([(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{13}]) + \dots + ([(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}]) + \dots + ([(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) \times \vec{F}_{N-1,N}]) = 0. \end{aligned}$$

Тут, відповідно до третього закону Ньютона, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ і спрямовані ці сили вздовж лінії, що з'єднують точки, до яких ці сили прикладені. Тобто вектори \vec{F}_{ik} , \vec{F}_{ki} та $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ є паралельними. Це означає, що $|[(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}]| = |(\vec{r}_i - \vec{r}_k)| \cdot |\vec{F}_{ik}| \cdot \sin 0 = 0$. Тобто вираз у кожній із дужок дорівнює нулю.

З урахуванням цього отримуємо, що

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum \vec{M}_{i, \text{зовн}}}. \quad (21.2)$$

Отже, похідна за часом від повного моменту імпульсу системи щодо довільної нерухомої точки O дорівнює геометричній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на тіла системи щодо цієї самої точки. Це твердження називають **рівнянням моментів для системи матеріальних точок**.

2 Обертання, зазвичай, відбувається не навколо деякої точки O , а навколо осі обертання Z . Проектуючи вектора рівняння (21.2) на вісь обертання Z , отримуємо **рівняння моментів для системи матеріальних точок щодо осі обертання**

$$\boxed{dL_z / dt = \sum M_{z,i, \text{зовн}}}, \quad (21.3)$$

де $M_{z,i, \text{зовн}}$ і L_z є відповідними проекціями векторів $\vec{M}_{i, \text{зовн}}$ та \vec{L} на вісь обертання Z .

3 Коли система замкнена, то зовнішні сили відсутні й права частина рівняння (21.2) дорівнює нулю. Це означає, що

$$d\vec{L} / dt = 0, \quad \boxed{\vec{L} = \vec{const}}. \quad (21.4)$$

Отже, ми дійшли висновку, що **повний, сумарний момент імпульсу замкненої системи матеріальних точок залишається постійним**. Це твердження становить **зміст закону збереження моменту імпульсу**.

Зазначимо, що відповідно до формули (21.2) повний момент імпульсу залишається постійним і для незамкненої системи в тому разі, коли сума всіх моментів зовнішніх сил дорівнює нулю ($\sum \vec{M}_{i, \text{зовн}} = 0$).

Також повний момент імпульсу залишається постійним і в тому разі, коли в системі діють **центральної сили**. **Центральними** називають такі сили, напрямки яких проходять через нерухомий центр O . З визначення центральної сили випливає, що момент центральної сили завжди буде таким, що дорівнює нулю ($|\vec{M}_i| = |\vec{r}_i| \cdot |\vec{F}_i| \cdot \sin 0 = 0$). Прикладами центральних сил є сила всесвітнього тяжіння, сила Кулона.

Закон збереження моменту імпульсу разом із законами збереження імпульсу й енергії є одним із найважливіших фундаментальних законів фізики.

ТЕМА 4 ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ

§ 22 Швидкість довільної точки твердого тіла під час його плоского руху. Кутова швидкість обертання твердого тіла. Миттєва вісь обертання

1 Плоским називається такий рух, за якого всі точки тіла рухаються в паралельних площинах.

Довільний плоский рух можна подати як сукупність поступального й обертального рухів.

Виберемо в тілі довільну точку O (рис. 22.1). Як згадано вище, будь-який плоский рух тіла можна розкласти на поступальний зі швидкістю \vec{v}_O , яка дорівнює швидкості точки O , і обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через цю точку. Позначаючи через $\vec{\omega}$ вектор кутової швидкості тіла, складову швидкості точок тіла, що обумовлена обертанням, можна подати у вигляді $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$, де \vec{r} – радіус-вектор, який проведено з точки O в дану точку тіла (рис. 22.1). Тоді, використовуючи закон додавання швидкостей, знаходимо швидкість будь-якої точки A тіла щодо нерухомої системи відліку

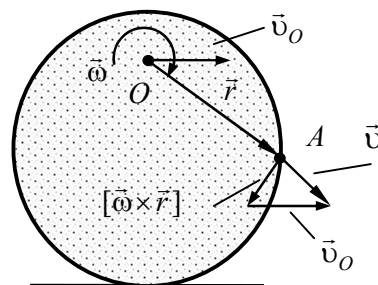


Рисунок 22.1

$$\vec{v} = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (22.1)$$

2 Розбити рух на поступальний і обертальний можна здійснити великою кількістю способів (на рисунку 22.2 подано три з них), які відрізняються значеннями швидкості поступального руху \vec{v}_O (залежить від вибору точки O), але мають одну і ту саму кутову швидкість $\vec{\omega}$. Отже, кутова швидкість обертання твердого тіла не залежить від точки, відносно якої проходить вісь обертання, є важливою характеристикою процесу його обертання. Покажемо це на прикладі циліндра, що котиться без ковзання по площині (рис. 22.2).

Розглянемо рисунок 22.2 а. У цьому разі швидкості точок циліндра можна подати як поступальний рух точки A зі швидкістю v_A й обертання навколо осі A з кутовою швидкістю ω_A . Значимо, що точка A є точкою дотику циліндра й площини. Через те, що ковзання відсутнє, то в точці дотику швидкості циліндра й площини повинні бути однаковими. Площина ж має швидкість, що дорівнює нулю. Отже, поступальна швидкість точки A дорівнює нулю $v_A = 0$. Використовуючи формулу (22.1), можна знайти модулі швидкостей точок C та B

$$v_C = \omega_A R, \quad v_B = 2\omega_A R. \quad (22.2)$$

У цій формулі R є радіусом циліндра.

Розглянемо рисунок 22.2 б. У цьому разі швидкості точок циліндра можна подати як поступальний рух точки C зі швидкістю v_C й обертання навколо осі C із кутовою швидкістю ω_C . Використовуючи формулу (22.1), знаходимо модулі швидкостей точок A та B

$$v_A = v_C - \omega_C R, \quad v_B = v_C + \omega_C R. \quad (22.3)$$

Розглянемо рисунок 22.2 в. У цьому разі швидкості точок циліндра можна подати як поступальний рух точки B зі швидкістю v_B й обертання навколо осі B із кутовою швидкістю ω_B . Використовуючи формулу (22.1), можна знайти модулі швидкостей точок A та C

$$v_A = v_B - 2\omega_B R, \quad v_C = v_B - \omega_B R. \quad (22.4)$$

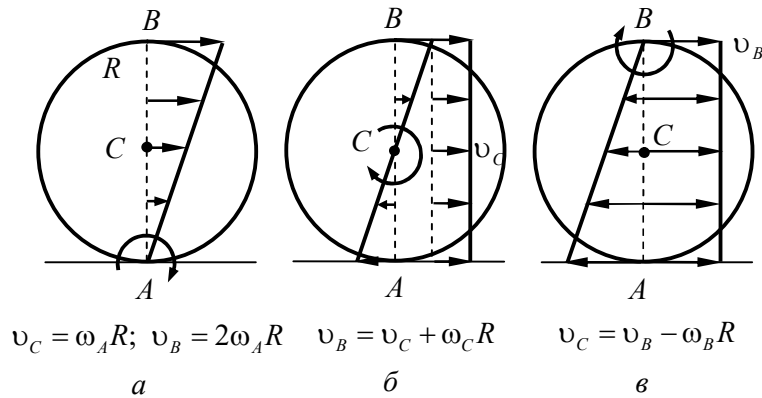


Рисунок 22.1

Якщо підставити значення v_C та v_B з (22.2) у друге рівняння (22.3), то отримаємо, що

$$\omega_C = \omega_A.$$

Якщо підставити значення v_C та v_A з (22.4) у перше рівняння (22.3), то отримаємо, що

$$\omega_C = \omega_B.$$

Отже,

$$\boxed{\omega_A = \omega_B = \omega_C}, \quad (22.5)$$

тобто кутова швидкість $\vec{\omega}$ не залежить від положення точки, через яку проходить миттєва вісь обертання. Кутова швидкість характеризує обертання твердого тіла як цілого.

3 Значимо, особливо зручним виявляється подання довільного плоского руху на поступальний, який відбувається зі швидкістю центра мас v_C , і обертальний навколо осі, що проходить через цей центр C (рис. 22.2).

Також варто пам'ятати, що миттєва вісь обертання введена лише для опису розподілу миттєвих швидкостей тіла. Ця вісь може міститися як усередині, так і за межами тіла. Положення миттєвої осі щодо нерухомої системи відліку й щодо тіла загалом із часом змінюється. Водночас швидкість миттєвої осі і точки, через яку ця вісь проходить, можуть і не збігатись. Так, у випадку, що зображено на рисунку 22.2 а, миттєва вісь збігається з лінією дотику циліндра із площиною (вісь A). Ця вісь переміщується як по площині (тобто щодо нерухомої системи відліку), так і по поверхні циліндра. Тим часом миттєва швидкість тіла в точці дотику дорівнює нулю. Плоский рух можна розглядати як ряд послідовних елементарних обертань навколо миттєвих осей.

§ 23 Рух центра мас твердого тіла. Прискорення центра мас твердого тіла

1 Знайдемо центр мас твердого тіла. Для цього розіб'ємо тверде тіло на сукупність дуже малих частинок (елементарних мас), тобто подамо тверде тіло як систему матеріальних точок з незмінними відстанями між ними. Тому для твердого тіла справедливі всі результати, які були отримані для системи матеріальних точок. Зокрема центр мас твердого тіла визначається радіус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m_{\text{тіла}}} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i, \quad (23.1)$$

де Δm_i – i -та мала маса; \vec{r}_i – радіус-вектор, що визначає положення цієї маси; $m_{міла}$ – маса всього твердого тіла.

Вираз (23.1) є не цілком однозначним, оскільки кожний із векторів \vec{r}_i можна проводити в різні точки i -ї малої маси. Щоб усунути цю невизначеність, потрібно взяти границю виразу (23.1) за умови, що всі Δm_i прямують до нуля

$$\vec{r}_C = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{m_{міла}} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i \right).$$

Ми знаємо, що така границя називається інтегралом. Отже,

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m_{міла}} \int \vec{r} dm}, \quad (23.2)$$

де інтегрування виконується по всьому твердому тілу.

2 Вираз (23.2) залежить від розподілу маси по об'єму тіла. Цей розподіл можна охарактеризувати за допомогою величини, яка називається густиною. *Тіло, властивості якого у всіх точках однакові, називається однорідним. Густиною однорідного тіла називають величину*

$$\boxed{\rho = \frac{m_{міла}}{V}}, \quad (23.3)$$

де $m_{міла}$ – маса тіла, а V – його об'єм. Отже, густина однорідного тіла чисельно дорівнює масі одиниці об'єму тіла.

Для неоднорідного тіла формула (23.3) дає середню густина. *Густина в деякій точці неоднорідного тіла визначається виразом*

$$\boxed{\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}}, \quad (23.4)$$

де Δm – маса, що міститься в об'ємі ΔV , який містить у собі точку P . Граничний перехід у цьому виразі не можна розуміти так, що об'єм ΔV стягується безпосередньо в точку. Зменшення ΔV потрібно здійснювати доти, поки не почне проявлятися атомна структура речовини. Тому під dV в (23.4) потрібно розуміти *фізично нескінченно малий об'єм*, тобто такий об'єм, що, з одного боку, досить малий для того, щоб макроскопічні (тобто властиві великій сукупності атомів) властивості речовини можна було вважати в його межах однаковими, а, з іншого боку, досить великий для того, щоб не могла проявитися дискретність речовини.

Згідно з (23.4) елементарна маса dm дорівнює добутку густини тіла в даній точці на відповідний елементарний об'єм dV

$$dm = \rho dV. \quad (23.5)$$

Підставивши це значення dm у вираз (23.2), отримуємо, що

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m_{міла}} \int_V \vec{r} \rho dV}, \quad (23.6)$$

де буква V під знаком інтеграла вказує на те, що інтегрування виконується по об'єму V тіла.

3 Тверде тіло можна подати як систему матеріальних точок. Тому для нього справедливе співвідношення, яке визначає прискорення центра мас системи матеріальних точок, відповідно до якого добуток маси системи (тобто маси тіла) на прискорення центра мас \vec{a}_C дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на це тіло,

$$\boxed{m_{\text{тіла}} \vec{a}_C = \sum \vec{F}_{\text{зовн}}}. \quad (23.7)$$

Отже, центр мас твердого тіла рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, що дорівнює масі тіла, під дією всіх прикладених до тіла зовнішніх сил.

§ 24 Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рівняння динаміки обертального руху щодо нерухомої осі

1 Знайдемо рівняння, яке описує обертальний рух твердого тіла щодо нерухомої осі Z . Для розв'язання цієї задачі будемо розглядати тверде тіло як систему матеріальних точок, також використаємо рівняння моментів для системи матеріальних точок щодо осі обертання.

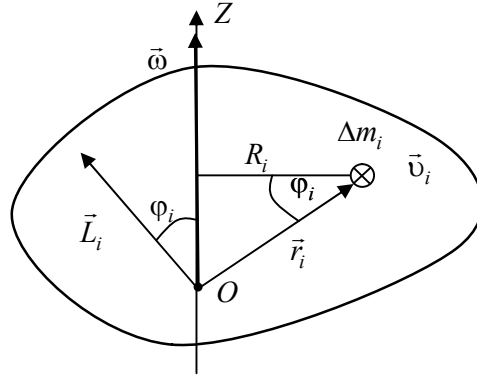


Рисунок 24.1

Розіб'ємо тіло (рис. 24.1), що обертається навколо нерухомої осі Z з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, на елементарні маси Δm_i , які можна вважати матеріальними точками. Вісь обертання Z і елементарна маса Δm_i лежать у площині рисунка 24.1. Швидкість \bar{v}_i спрямована за площину цього рисунка. Відповідно до визначення момент імпульсу i -ї елементарної маси щодо точки O , що лежить на осі обертання, дорівнює

$$\vec{L}_i = \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i], \quad (24.1)$$

де r_i – радіус-вектор, який визначає положення маси Δm_i щодо точки O , \bar{v}_i – швидкість i -ї елементарної маси. Момент імпульсу \vec{L}_i є перпендикулярним до векторів \vec{r}_i і \bar{v}_i . Проекція вектора \vec{L}_i на вісь обертання Z дорівнює його модулю L_i , помноженому на косинус кута φ_i : $L_{zi} = L_i \cos \varphi_i$ (рис. 24.1). Оскільки кут між векторами \vec{r}_i й \bar{v}_i прямий (рис. 24.1), то $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Тоді

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \cos \varphi_i = \Delta m_i R_i v_i, \quad (24.2)$$

де $R_i = r_i \cos \varphi_i$ – відстань маси Δm_i до осі обертання (рис. 24.1). Як відомо $v_i = \omega R_i$. З урахуванням цього можемо записати

$$L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i. \quad (24.3)$$

Проекція повного моменту імпульсу тіла L_z дорівнює сумі проєкцій L_{zi}

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i. \quad (24.4)$$

Отриманий вираз не залежить від розміщення на осі обертання точки O , щодо якої визначається момент імпульсу тіла \vec{L} .

Величина

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i, \quad (24.5)$$

що дорівнює сумі добутків елементарних мас на квадрат їхніх відстаней до осі обертання, називається **моментом інерції тіла щодо цієї осі**.

Скориставшись поняттям моменту інерції, подамо вираз (24.4) для моменту імпульсу щодо осі Z у вигляді

$$L_z = I\omega, \quad (24.6)$$

де I – момент інерції твердого тіла щодо осі обертання Z .

Як відомо, для системи матеріальних точок є справедливим рівняння моментів щодо осі обертання

$$dL_z / dt = \sum M_{зовн,z}. \quad (24.7)$$

Підставивши в це рівняння (24.6) і взявши до уваги, що $I = const$, а $d\omega / dt = \beta_z$ – проекція кутового прискорення на вісь Z (ми припускаємо, що напрямки вектора $\vec{\omega}$ й осі Z збігаються), прийдемо до рівняння

$$I\beta_z = \sum M_{зовн,z}. \quad (24.8)$$

Це рівняння називають **рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла щодо нерухомої осі**. Воно аналогічно рівнянню другого закону Ньютона $ma_z = \sum F_z$. Роль маси тут відіграє момент інерції, роль лінійного прискорення – кутове прискорення й, нарешті, роль результуючої сили – сумарний момент зовнішніх сил.

§ 25 Момент інерції циліндра (диска) щодо осі симетрії

1 Момент інерції тіла, як відомо, визначається співвідношенням

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i. \quad (25.1)$$

Бачимо, що вираз (25.1) не є цілком однозначним, оскільки відстань R_i від осі обертання до різних точок i -ї малої маси Δm_i є різною. Щоб усунути цю невизначеність, потрібно взяти границю виразу цього виразу за умови, що всі Δm_i прямують до нуля. Тобто суму в (25.1) потрібно замінити інтегруванням

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum R_i^2 \Delta m_i = \int R^2 dm. \quad (25.2)$$

Якщо ми візьмемо до уваги визначення густини неоднорідного тіла $\rho = dm / dV$, то отримаємо таку формулу для **моменту інерції твердого тіла**

$$I = \int \rho R^2 dV, \quad (25.3)$$

де ρ – густина тіла в точці, яка входить в об'єм dV , R – відстань цього об'єму до осі обертання, щодо якої обчислюється момент інерції.

З формул (25.1)–(25.3) випливає, що момент інерції є **адитивною** величиною. Це означає, що момент інерції тіла щодо деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла щодо тієї самої осі. З цих самих співвідношень випливає також, що **момент інерції тіла щодо різних осей буде різним**.

2 Обчислення інтеграла (25.3) являє собою достатньо складне завдання. Справа значно спрощується в разі однорідних осесиметричних тіл. Як приклад знайдемо **момент інерції однорідного циліндра щодо його геометричної осі OO** (рис. 25.1).

Розіб'ємо циліндр на циліндричні шари радіусом R , товщини dR , висоти h . Маса такого шару дорівнює $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi R h dR$ ($dV = 2\pi R h dR$ – об'єм шару). Усі точки цього шару розміщені від осі OO на однаковій відстані R . Тому момент інерції такого циліндричного шару дорівнює

$$dI = \rho R^2 dV = \rho R^2 \cdot 2\pi R h dR = 2\pi \rho h R^3 dR.$$

Проінтегруємо цей вираз за змінною R у межах від 0 до r (r – радіус циліндра) і отримаємо момент інерції однорідного циліндра щодо його осі

$$I = 2\pi \rho h \int_0^r R^3 dR = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} \rho h \pi r^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2,$$

тобто

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m r^2} \quad (25.4)$$

($m = \rho h \pi r^2$ – маса циліндра). Відзначимо, що отриманий вираз (25.4) не залежить від висоти циліндра h . Отже, формула (25.4) визначає й момент інерції тонкого диска щодо перпендикулярної до нього осі, що проходить через його центр.

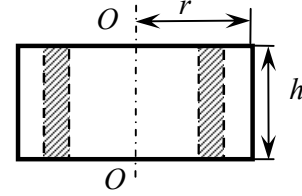
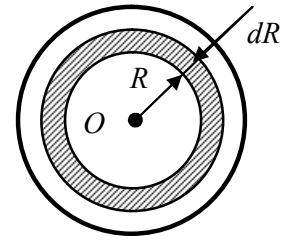


Рисунок 25.1

§ 26 Момент інерції стрижня

1 Обчислимо момент інерції тонкого однорідного стрижня маси m й довжини l щодо перпендикулярної до нього осі OO , яка проходить через його центр (рис. 26.1). Для цього використовуємо визначення моменту інерції твердого тіла

$$I = \int R^2 dm. \quad (26.1)$$

Зазначимо, що стрижень можна вважати тонким, якщо максимальний поперечний розмір його набагато менше за довжину l .

Проведемо вздовж стрижня вісь X , початок цієї осі розмістимо в центрі стрижня (рис. 26.1). Виберемо ділянку стрижня dx . На підставі того, що стрижень однорідний, маса ділянки dx буде дорівнювати $dm = (m/l)dx$, де l – довжина стрижня. Ця маса dm розміщена на відстані x від осі обертання OO (рис. 26.1). У формулі (26.1) ця відстань позначена буквою R , тобто для даного випадку $R = x$. Далі, використовуючи співвідношення (26.1), отримуємо момент інерції стрижня щодо перпендикулярної до нього осі, яка проходить через його центр

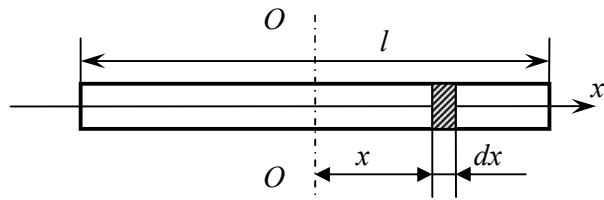


Рисунок 26.1

$$I = \int x^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2, \text{ тобто } \boxed{I = \frac{1}{12} m l^2}. \quad (26.2)$$

2 Наведемо без доведення значення моменту інерції однорідної кулі щодо осі, що проходить через його центр

$$\boxed{I = \frac{2}{5} m r^2}, \quad (26.3)$$

де m – маса, а r є її радіусом.

§ 27 Теорема Гюйгенса – Штейнера

1 Знайдемо зв'язок між моментами інерції тіла щодо двох різних паралельних осей. Вважаємо, що ці осі перпендикулярні до площини рисунка й перетинають цю площину в точках O й A (рис. 27.1). Будемо називати ці вісі осями O й A . Розіб'ємо уявно тіло на елементарні маси dm . Позначимо радіус-вектор, який проведено в площині рисунка від точки O до елементарної маси dm через \vec{R} , а від точки A до dm – через \vec{R}' . Зрозуміло, що на рисунку 27.1 зображено випадок, коли елементарна маса dm лежить у площині рисунка. Тоді $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{a}$, де $\vec{a} = \vec{OA}$. Тому $(R')^2 = R^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{R}$. Далі, використовуючи визначення моменту інерції тіла, знаходимо момент інерції тіла щодо осі A :

$$I_A = \int (R')^2 dm = \int (R^2) dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{R} dm. \quad (27.1)$$

Проаналізуємо доданки, які розміщені у правій частині співвідношення (27.1). Перший інтеграл праворуч є моментом інерції щодо осі O I_O . Останній інтеграл праворуч відповідно до визначення центра мас можна подати у вигляді $\int \vec{R} dm = m_{\text{тіла}} \vec{R}_C$, де \vec{R}_C – радіус-вектор центра мас C тіла щодо осі O (більш точно, \vec{R}_C є компонентою радіуса-вектора центра мас, яка паралельна площині рисунка), M є масою тіла. Отже,

$$I_A = I_O + m_{\text{тіла}} a^2 - 2m_{\text{тіла}} (\vec{a} \cdot \vec{R}_C). \quad (27.2)$$

Припустимо, що вісь O проходить через центр мас C тіла (точки O й C збігаються). Тоді $\vec{R}_C = 0$, і попередня формула спрощується, набуваючи вигляду

$$I_A = I_C + m_{\text{тіла}} a^2. \quad (27.3)$$

Це важливе співвідношення називається **теоремою Гюйгенса – Штейнера**. Момент інерції щодо довільної осі A дорівнює сумі моменту інерції щодо осі C , яка паралельна осі A й проходить через центр мас тіла C , і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

§ 28 Робота тіла, що обертається навколо нерухомої осі

1 Знайдемо роботу, яку виконують зовнішні сили під час обертання твердого тіла щодо нерухомої осі Z .

Позначимо зовнішню силу, що прикладена до елементарної маси Δm_i , через \vec{F}_i . За час dt робота сили \vec{F}_i над i -ю елементарною масою буде дорівнювати

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt. \quad (28.1)$$

Відомо, що швидкість i -ї елементарної маси тіла, яке обертається навколо нерухомої осі визначається співвідношенням $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$, де \vec{r}_i – радіус-вектор, проведений від довільної точки O на осі обертання до точки з масою Δm_i . Тоді (28.1) набуває вигляду

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt. \quad (28.2)$$

Далі використаємо відоме з математики співвідношення для змішаного добутку векторів $\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]$ і отримаємо

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt = \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i dt = \omega \cdot M_i \cos(\angle \vec{\omega}, \vec{M}_i) dt = \omega \cdot M_{i,\omega} dt = M_{i,\omega} d\varphi. \quad (28.3)$$

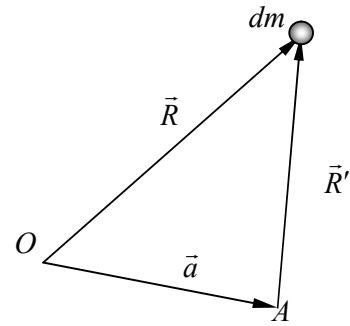


Рисунок 27.1

У цій формулі $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$ – момент сили \vec{F}_i щодо точки O , $M_{i,\omega}$ – проєкція вектора \vec{M}_i на напрямок вектора $\vec{\omega}$, $d\varphi = \omega \cdot dt$ – кут на який повернеться тіло за час dt . Результуючу роботу знайдемо як суму робіт над кожною елементарною масою

$$dA = \sum dA_i = \left(\sum M_{i,\omega} \right) d\varphi.$$

Позначаючи через $M_\omega = \sum M_{i,\omega}$ – проєкцію результуючого моменту сили на напрямок кутової швидкості знаходимо шукану елементарну роботу, яку виконують зовнішні сили під час обертання твердого тіла щодо нерухомої осі

$$dA = M_\omega \cdot d\varphi. \quad (28.4)$$

Зазначимо, що формула (28.4) подібна до формули $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

2 Розділивши роботу (28.4) на час dt , за яке тіло повернулося на кут $d\varphi$, отримуємо потужність, яка розвивається зовнішніми силами:

$$P = dA / dt = M_\omega (d\varphi / dt) = M_\omega \omega. \quad (28.5)$$

Знак потужності залежить від знака проєкції результуючого моменту сили M_ω на напрямок кутової швидкості $\vec{\omega}$. Коли проєкція M_ω від'ємна, то потужність P також від'ємна.

Зазначимо, формула (28.5) подібна до формули $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

§ 29 Кінетична енергія твердого тіла за умови плоского руху

1 Знайдемо кінетичну енергію твердого тіла за довільного плоского руху. Для цього плоский рух будемо розглядати як накладення поступального руху деякої точки тіла та обертання навколо осі, що проходить через цю точку. Тверде тіло подамо як сукупність матеріальних точок. Кінетичну енергію знайдемо як суму кінетичних енергій усіх матеріальних точок твердого тіла.

Тверде тіло подамо як сукупність елементарних мас Δm_i . Швидкість довільної елементарної маси \vec{v}_i подамо як накладення поступального руху зі швидкістю \vec{v}_O деякої точки тіла O й обертання навколо осі, що проходить через цю точку, з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. У цьому разі, як відомо, можемо записати

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i], \quad (29.1)$$

де \vec{r}_i – радіус-вектор i -ї маси, який проведено з точки O (рис. 29.1).

Кінетична енергія i -ї елементарної маси дорівнює

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (\vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2.$$

Підведення у квадрат дає

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i (v_O^2 + 2\vec{v}_O [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2). \quad (29.2)$$

Взявши суму $(\Delta W_k)_i$ за всіма елементарними масами, знайдемо кінетичну енергію тіла

$$E_k = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (v_O^2 + 2\vec{v}_O [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2).$$

Розіб'ємо отриманий вираз на три доданки, виносячи водночас постійні множники за знак суми

$$E_k = \frac{1}{2} v_O^2 \sum \Delta m_i + \bar{v}_O \sum \Delta m_i [\bar{\omega} \times \bar{r}_i] + \frac{1}{2} \sum \Delta m_i [\bar{\omega} \times \bar{r}_i]^2. \quad (29.3)$$

Сума елементарних мас дасть масу тіла $\sum \Delta m_i = m_{mila}$. Отже, перший доданок дорівнює $m_{mila} v_O^2 / 2$.

Вектор $[\bar{\omega} \times \bar{r}_i]$ спрямований за площину рисунка 29.1. Квадрат цього вектора дорівнює квадрату його модуля. Модуль цього вектора, як випливає з рисунка 29.1, $\omega r_i \sin \beta_i = \omega R_i$, де R_i – відстань від i -ї маси до осі обертання. Тому можемо записати $[\bar{\omega} \times \bar{r}_i]^2 = \omega^2 R_i^2$. Отже, третій доданок у (29.3) дорівнює

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2,$$

де $I_O = \sum \Delta m_i R_i^2$ – момент інерції тіла щодо осі обертання, яка проходить через точку O .

Другий доданок у (29.3) перетворимо так

$$\bar{v}_O \sum \Delta m_i [\bar{\omega} \times \bar{r}_i] = \bar{v}_O [\bar{\omega} \times \sum \Delta m_i \bar{r}_i] = \bar{v}_O [\bar{\omega} \times m_{mila} \bar{r}_C],$$

де $\bar{r}_C = (\sum \Delta m_i \bar{r}_i) / m_{mila}$ – радіус-вектор центра мас, який проведено з точки O .

Отже, отримуємо висновок, що кінетична енергія твердого тіла визначається співвідношенням

$$E_k = \frac{1}{2} m_{mila} v_O^2 + m_{mila} \bar{v}_O [\bar{\omega} \times \bar{r}_C] + \frac{1}{2} I_O \omega^2. \quad (29.4)$$

У перший доданок входять тільки величини, які характеризують поступальний рух, у третій доданок – тільки величини, що характеризують обертальний рух. Другий же доданок містить величини, що характеризують як поступальний, так і обертальний рух.

2 Коли за точку O взяти центр мас тіла C , то \bar{r}_C (вектор, який проведено від точки O до точки C) буде дорівнювати нулю й формула для кінетичної енергії твердого тіла (29.4) спроститься так

$$E_k = (1/2) m_{mila} v_C^2 + (1/2) I_C \omega^2. \quad (29.5)$$

Тут v_C – швидкість центра мас; I_C – момент інерції тіла щодо осі, що проходить через центр мас.

Отже, якщо розбити плоский рух тіла на поступальний зі швидкістю центра мас і обертальний навколо осі, що проходить через центр мас, то кінетична енергія розпадається на два незалежні доданки, один з яких визначається тільки величинами, що характеризують поступальний рух, а другий – тільки величинами, що характеризують обертання.

§ 30 Рівняння руху і рівноваги твердого тіла. Прискорення циліндра, який котиться без ковзання з похилої площини

1 Для того щоб знайти швидкість \bar{v} довільної точки твердого тіла, яка визначається радіусом-вектором \bar{r} , потрібно знати, наприклад, вектор швидкості \bar{v}_C поступального руху центра мас твердого тіла C і вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ щодо миттєвої осі обертання

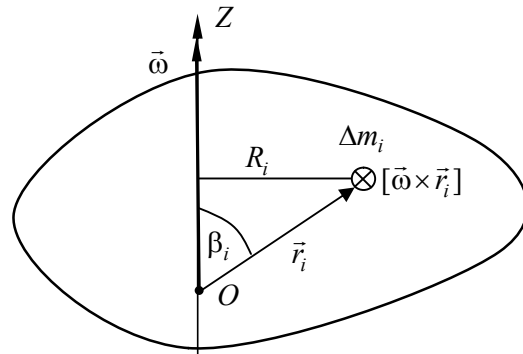


Рисунок 29.1

$\vec{v} = \vec{v}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$. Зі свого боку, для визначення швидкостей \vec{v}_C та $\vec{\omega}$ використовують рівняння руху центра мас

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad (30.1)$$

й рівняння моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i. \quad (30.2)$$

Рівняння (30.1) і (30.2) є рівняннями руху твердого тіла, які визначають стан твердого тіла в будь-який момент часу.

Рівняння моментів (30.2) можна брати щодо довільної нерухомої точки або щодо центра мас твердого тіла. Можна також це рівняння брати щодо довільної точки, для якої швидкість у будь-який момент часу є паралельною швидкості центра мас.

У рівняння (30.1) і (30.2) входять тільки зовнішні сили. Внутрішні сили не впливають на рух центра мас і не можуть змінити момент імпульсу тіла. Вони можуть змінювати тільки взаємне розміщення і швидкості матеріальних точок тіла. Але для абсолютно твердого тіла такі зміни неможливі. Отже, внутрішні сили не впливають на рух твердого тіла.

2 Якщо тверде тіло перебуває у спокої, то рівняння (30.1) і (30.2) переходять в такі

$$\left[\sum \vec{F}_i = 0 \right], \left[\sum \vec{M}_i = 0 \right]. \quad (30.3)$$

Співвідношення (30.3) є умовами рівноваги твердого тіла. У разі їхнього виконання центр мас може рухатися прямолінійно й рівномірно з довільною швидкістю, а саме тіло може обертатися з постійною кутовою швидкістю.

Коли тверде тіло перебуває в рівноважному стані, то результуюча зовнішніх сил дорівнює нулю. Звідси випливає, що момент цих сил у стані рівноваги не залежить від положення точки O , щодо якої він шукається. Тому під час розв'язання будь-якої задачі на рівновагу твердого тіла точку O можна вибирати довільно. Це можна використовувати для спрощення самого розв'язку.

3 Як приклад застосування рівнянь руху твердого тіла розглянемо задачу про знаходження прискорення центра мас a_C циліндра радіусом r , що котиться без ковзання по похилій площині, кут нахилу якої дорівнює α (рис. 30.1).

За умовою циліндр рухається без ковзання. Це означає, що швидкість тіла в точці дотику A дорівнює нулю. Відсутність ковзання забезпечується дією сил із боку похилої площини на циліндр: нормальної складової сили реакції опори \vec{N} та сили тертя спокою \vec{F}_{mp} .

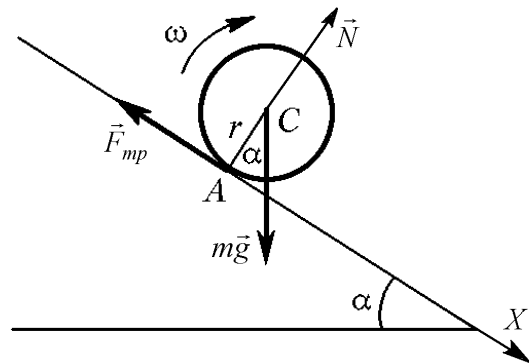


Рисунок 30.1

Модуль сили тертя спокою \vec{F}_{mp} може набувати будь-якого значення: від 0 до μN , де μ – коефіцієнт тертя. За скочування сила тертя спокою встановлюється саме такою, щоб не було ковзання. Якщо дотична сила, яка потрібна для цього, перевищує μN , то чисте скочування неможливо – воно буде супроводжуватися ковзанням.

Для знаходження прискорення центра мас a_C використаємо рівняння руху (30.1)

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_{mp} + \vec{N} + m\vec{g} \quad (30.4)$$

та рівняння моментів (30.2) щодо осі, що проходить через центр мас C

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_{mp}. \quad (30.5)$$

Рівняння (30.4) спроектуємо на вісь X (рис. 30.1) і отримаємо

$$ma_C = -F_{mp} + mg \sin \alpha. \quad (30.6)$$

Тут використали, що проекція сили тяжіння на вісь X дорівнює $mg_x = mg \sin \alpha$. Далі рівняння (30.5) спроектуємо на вісь обертання і знайдемо

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = r \cdot F_{mp}. \quad (30.7)$$

У цьому рівнянні використали, що, згідно з визначенням моменту сили, $M_{mp} = r \cdot F_{mp}$, а $M_{mg} = 0$ й $M_N = 0$, тому що плече цих сил дорівнює нулю.

Позначимо через v_A лінійну швидкість точки A . Вона пов'язана зі швидкістю точки C (через яку проходить вісь обертання) співвідношенням $v_A = v_C - \omega \cdot r$. За умови відсутності ковзання $v_A = 0$, тому $v_C - \omega \cdot r = 0$. Звідси для лінійного прискорення точки C знаходимо

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}. \quad (30.8)$$

Далі розв'яжемо систему рівнянь (30.6) – (30.8) щодо a_C і отримуємо

$$a_C = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (30.9)$$

Якщо врахувати, що момент інерції циліндра щодо осі обертання дорівнює $I_C = mr^2 / 2$, то (30.9) для шуканого прискорення циліндра набуде вигляду

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (30.10)$$

ТЕМА 5 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

§ 31 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції. Поступальна сила інерції

1 До цього часу ми розглядали рух щодо інерціальних систем відліку. У таких системах рівнянням руху матеріальної точки є рівняння, що виражає другий закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (31.1)$$

Поставимо тепер перед собою задачу, знайти рівняння руху в неінерціальних системах відліку, тобто таких системах, які рухаються прискорено щодо інерціальних систем. Нагадаємо, під рівнянням руху ми розуміємо співвідношення, яким визначається прискорення матеріальної точки механічної системи в тій системі відліку, щодо якої розглядається рух.

Через те, що нам відоме рівняння руху щодо інерціальних систем відліку (рівняння другого закону Ньютона), то задача зводиться до встановлення законів перетворення сил і прискорень за переходу від інерціальної системи відліку до неінерціальної. Під час розв'язання задачі обмежимося нерелятивістським випадком.

2 Виберемо довільну інерціальну систему відліку K із початком координат у точці O (рис. 31.1). Будемо називати її *нерухомою*. Візьмемо також неінерціальну систему відліку K' із початком координат у точці O' , яка рухається щодо нерухомої системи K . Неінерціальну систему відліку K' будемо називати *рухомою*. Отримаємо рівняння руху частинки в неінерціальній системі відліку K' за відомим рівнянням руху в системі K (31.1).

Нехай A – деяка матеріальна точка з масою m . Її розміщення в нерухомій системі відліку визначається радіусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

а в рухомій системі – радіусом-вектором

$$\vec{r}' = \vec{O'A} = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z.$$

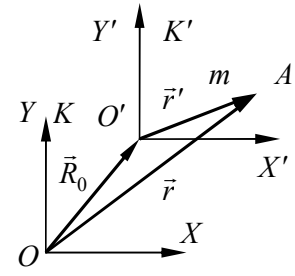


Рисунок 31.1

Позначимо через \vec{R}_0 радіус-вектор \vec{OO}' , проведений із нерухомого початку O системи K до початку O' рухомої системи K' . Зрозуміло (рис. 31.1), що вектори \vec{r} , \vec{r}' та \vec{R}_0 у кожний момент часу пов'язані співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'. \quad (31.2)$$

Двічі диференціюючи ці співвідношення за часом, отримаємо

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}}', \quad (31.3)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}'. \quad (31.4)$$

Далі розглянемо частинний випадок, коли система K' рухається *поступально* з прискоренням \vec{a}_0 . Це означає, по-перше, що прискорення початку O' системи K' дорівнює \vec{a}_0 ($\ddot{\vec{R}}_0 = \vec{a}_0$). По-друге, орти системи K' не змінюють свій напрямок із часом щодо системи K , тобто є сталими величинами як за напрямком, так і за модулем (у разі, якщо система K' здійснювала обертальний рух, то напрямки ортів у системі K' з часом змінювалися). Це означає, що в разі поступального руху системи K' величина $\ddot{\vec{r}}'$ має вигляд

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}' \cdot \vec{e}'_x + \ddot{y}' \cdot \vec{e}'_y + \ddot{z}' \cdot \vec{e}'_z \quad (31.5)$$

завдяки тому, що \vec{e}'_x , \vec{e}'_y , \vec{e}'_z є в цьому разі є сталими величинами. Зрозуміло, що формула (31.5) є не що інше, як прискорення матеріальної точки A в системі K' . Тобто $\ddot{\vec{r}}' = \vec{a}'$.

Далі підставимо в (31.4) $\ddot{\vec{R}}_0 = \vec{a}_0$, $\ddot{\vec{r}}' = \vec{a}'$, а потім отриманий вираз підставимо в (31.1) і знайдемо

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{in}}, \quad (31.6)$$

де

$$\boxed{\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0} \quad (31.7)$$

є *поступальною силою інерції*.

Рівняння (31.6) і є шуканим рівнянням руху в неінерціальній системі відліку за умови, коли неінерціальна система відліку K' рухається щодо інерціальної поступально з прискоренням \vec{a}_0 .

3 Розглянемо праву частину рівності (31.6). Її формально можна розглядати як результуючу двох сил. Перша сила \vec{F} є «справжньою» силою в тому розумінні, що вона є результатом взаємодії тіл. Вона залежить тільки від різниць координат і різниць швидкостей матеріальних точок, які взаємодіють. У нерелятивістській механіці всі ці різниці не змінюються у разі переходу від однієї системи відліку до іншої, яка рухається поступально. Тому не змінюється й сила \vec{F} . Вона *інваріантна* щодо такого переходу.

Зовсім інший характер має складова $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$. Ця сила виникає не через взаємодію тіл, а через прискорений рух системи відліку. У разі переходу до іншої прискореної системи

відліку змінюється й сила інерції. Ця сила *не є інваріантною* щодо такого переходу. Цим сили інерції відрізняються від «справжніх сил», що виникають під час взаємодії тіл. Друга відмінність полягає в тому, що *сили інерції не підкоряються третьому закону Ньютона*. Якщо на деяке тіло діє сила інерції, то не існує протидійної сили, що прикладена до іншого тіла. Сили інерції завжди є зовнішніми щодо будь-якої системи тіл.

Отже, використання інерціальних сил поряд із «справжніми» силами дозволяє описувати рух у довільних неінерціальних системах відліку за допомогою рівнянь, подібних до рівнянь другого закону Ньютона. У цьому полягає зміст введення інерціальних сил.

Дію сили інерції на собі відчуває кожний, хто користується міським транспортом. Так, за різкого гальмування автобуса або трамвая пасажери відчувають силу (поступальну силу інерції), що штовхає їх уперед.

§ 32 Відцентрова сила інерції

1 Розглянемо поведінку тіл у неінерціальній системі відліку K' , яка обертається щодо інерціальної системи K із постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (поступальна складова руху відсутня). Прикладом може служити система, пов'язана з каруселлю. Закріпимо на диску радіально спрямований стрижень, на який надінемо кульку, «прив'язану» до осі диска пружиною (рис. 32.1). Кулька може переміщуватися тільки вздовж радіуса диска, ковзаючи без тертя по тонкому стержню. Доки диск не обертається, пружина не деформована. У разі розкручування диска кулька розтягує пружину доти, поки пружна сила \vec{F}_{np} не стане такою, що дорівнює

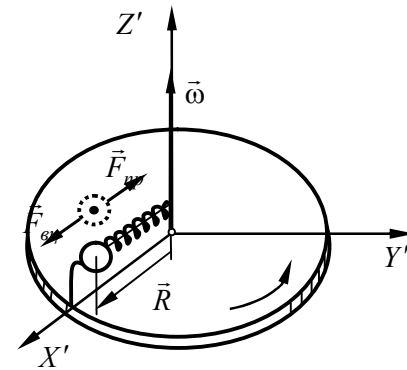


Рисунок 32.1

добутку маси кульки m на його нормальне прискорення $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$; тут \vec{R} – вектор, який проведено до кульки від центра диска вздовж його радіуса, модуль R дає відстань кульки від осі обертання системи K' :

$$\vec{F}_{np} = -m\omega^2 \vec{R}. \quad (32.1)$$

Саме сила пружності є причиною, що кулька рухається по колу радіусом R .

Щодо системи відліку K' , яка пов'язана з диском, кулька перебуває у стані спокою. Це можна формально пояснити тим, що в системі K' , крім сили \vec{F}_{np} , на кульку діє сила інерції

$$\boxed{\vec{F}_{вц} = m\omega^2 \vec{R}}, \quad (32.2)$$

яка спрямована уздовж радіуса від осі обертання диска.

Сила $\vec{F}_{вц}$, яка має вигляд (32.2), називається **відцентровою силою інерції**. Вона виникає в системах відліку, які обертаються, й не залежить від того, перебуває у стані спокою тіло в цій системі або рухається щодо неї зі швидкістю \vec{v}' . Це впливає з того, що \vec{v}' не входить у формулу (32.2).

2 Унаслідок добового обертання Земля подібна гігантському диску (точніше, кулі), який обертається. Тому, розглядаючи поведінку тіл у системі відліку, що пов'язана із Землею, потрібно за точних розрахунків урахувувати відцентрову силу інерції. Ця сила максимальна на екваторі, де $R = 6,38 \cdot 10^6$ м. За добу, тобто за 86 400 с, Земля повертається на кут 2π . Отже, кутова швидкість Землі

$$\omega_3 = 2\pi : 86400 = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.}$$

Відповідно до формули (32.2) модуль відцентрової сили інерції, що діє на екваторі на тіло масою $m = 1$ кг, дорівнює

$$F_{ц\bar{o}} = 1,00 \cdot (7,27 \cdot 10^{-5})^2 6,38 \cdot 10^6 = 0,0337 \text{ Н},$$

що становить 1/291 частину сили ваги mg , яка дорівнює 9,81 Н. Звідси випливає, що в низці випадків, розглядаючи рух тіл щодо Землі, відцентровою силою інерції можна знехтувати.

§ 33 Сила Коріоліса

1 Раніше ми розглядали тіла, які були нерухомими щодо системи відліку, яка обертається. Виявляється, коли тіла рухаються щодо таких систем відліку, то на них, крім відцентрової сили інерції, діє ще одна сила інерції, яка називається силою Коріоліса. Знайдемо явний вигляд цієї сили.

Розглянемо горизонтально розміщений диск (рис. 33.1), який обертається щодо інерціальної системи відліку (яку ми будемо називати нерухомою) з постійною кутовою швидкістю $\bar{\omega}$. Припустимо, що по колу радіусом R рівномірно рухається прив'язана ниткою до осі диска матеріальна точка (частинка) масою m зі швидкістю \bar{v}' щодо диска.

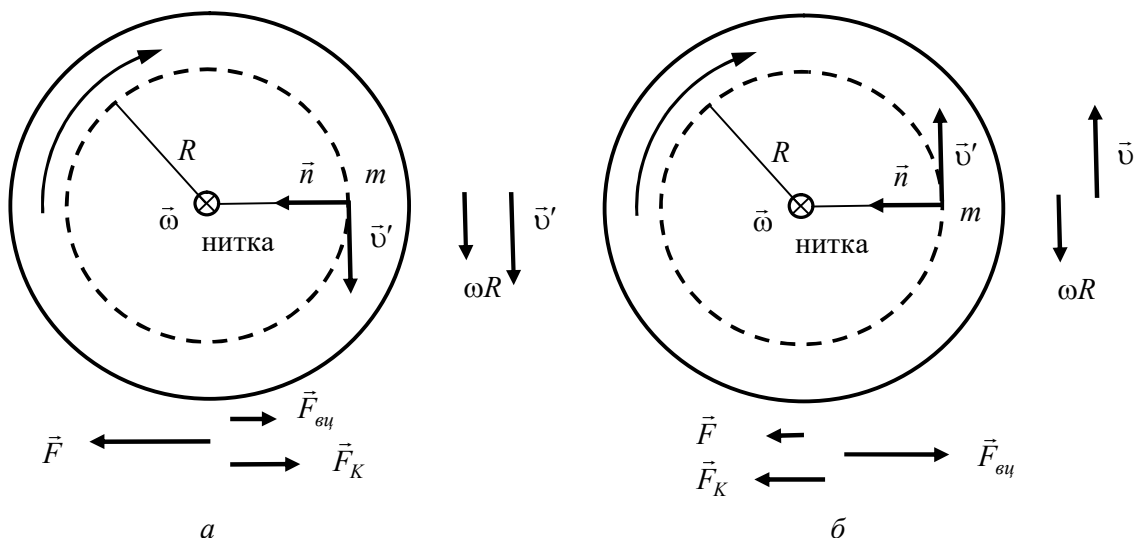


Рисунок 33.1

Частинка маси m рухається на диску, який обертається, по колу радіусом R зі швидкістю \bar{v}' щодо диска (\bar{F} – сила натягу нитки; \bar{n} – нормаль, яка спрямована уздовж нитки). Напрямок \bar{v}' і напрямок обертання диска: a – збігаються, b – протилежні (рис. 33.1). Праворуч від дисків показані напрямки швидкостей, під диском – напрямки сил. Лінійна швидкість точок кола диска дорівнює ωR , швидкість частинки щодо диска дорівнює \bar{v}' . Тоді у випадку, зображеному на рисунку 33.1а, швидкість \bar{v} частинки щодо нерухомої системи має модуль, що дорівнює $v' + \omega R$. Тому прискорення частинки в нерухомій системі

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{R} \bar{n} = \frac{(v' + \omega R)^2}{R} \bar{n} = \frac{v'^2}{R} \bar{n} + \omega^2 R \bar{n} + 2v' \omega \bar{n}. \quad (33.1)$$

Доданок $(v'^2/R)\bar{n}$ є прискоренням a'_n частинки щодо диска, тобто в системі відліку, що обертається. Тут \bar{n} – одиничний вектор, який є нормальним (перпендикулярним) до траєкторії руху (рис. 33.1). Добуток маси частинки m на a_n дає силу натягу нитки \bar{F} , яка є причиною такого руху. Отже, можна написати, що

$$\bar{F} = m\bar{a}'_n + m\omega^2 R\bar{n} + 2m v' \omega \bar{n}.$$

Звідси

$$m\vec{a}'_n = \vec{F} - m\omega^2 R\vec{n} - 2m\upsilon'\omega\vec{n}. \quad (33.2)$$

Проаналізуємо праву частину формули (33.2). Спостерігач, який перебуває на диску, помітить, що, крім «реальної» сили \vec{F} , на частинку діють дві додаткові сили, які спрямовані від осі обертання. Перша з них дорівнює $(-m\omega^2 R\vec{n})$ і є знайомою нам відцентровою силою інерції $\vec{F}_{\text{вц}}$. Друга, що дорівнює $(-2m\upsilon'\omega\vec{n})$, може бути подана у вигляді

$$\boxed{\vec{F}_K = 2m[\vec{\upsilon}' \times \vec{\omega}]}. \quad (33.3)$$

Дійсно, модуль векторного добутку $[\vec{\upsilon}' \times \vec{\omega}]$ дорівнює $\upsilon'\omega$ (кут між векторами $\vec{\upsilon}'$ й $\vec{\omega}$ є прямим), а його напрямок є протилежним до напрямку \vec{n} . Сила інерції, що описується формулою (33.3), називається **силою Коріоліса**.

У випадку, який зображено на рисунку 33.1б, модуль швидкості $\vec{\upsilon}$ дорівнює $\upsilon' - \omega R$, коли $\upsilon' > \omega R$, або $\omega R - \upsilon'$, коли $\omega R > \upsilon'$. Квадрат обох виразів однаковий і дорівнює $\upsilon'^2 + \omega^2 R^2 - 2\upsilon'\omega R$. Відповідно у формулах (33.1) і (33.2) доданок, що містить добуток $\upsilon'\omega$ змінить знак на зворотний так, що друга додаткова сила буде дорівнювати $+2m\upsilon'\omega\vec{n}$. Легко переконатися в тому, що й у цьому разі друга додаткова сила може бути подана формулою (33.3).

2 Ми отримали формулу (33.3) для випадку, коли швидкість частинки спрямована за дотичною до кола з центром на осі обертання системи K' . Можна показати, що ця формула визначає силу Коріоліса за будь-якого напрямку швидкості $\vec{\upsilon}'$ щодо осі обертання. З формули випливає, що в разі, коли частинка рухається в неінерціальній системі паралельно осі обертання ($\vec{\upsilon}'$ є паралельною до $\vec{\omega}$), сила Коріоліса не виникає.

Векторний добуток є перпендикулярним до обох співмножників. Тому з формули (33.3) випливає, що:

1) сила Коріоліса перпендикулярна до вектора $\vec{\omega}$, тобто завжди лежить у площині, яка перпендикулярна до осі обертання рухомої системи відліку;

2) сила Коріоліса перпендикулярна до швидкості $\vec{\upsilon}'$ й, отже, роботи над частинкою не виконує. Ця сила може змінити тільки напрямок швидкості $\vec{\upsilon}'$, але не її модуль.

3 Сила Коріоліса впливає на рух тіл поблизу земної поверхні. За умови вільного падіння сила Коріоліса відхиляє тіла. Це відхилення пропорційно синусу широти місцевості і, отже, максимально на екваторі й дорівнює нулю на полюсах. У разі падіння на екваторі з висоти 30 м (така приблизно висота десятиповерхового будинку) відхилення становить 3,6 мм.

Силу Коріоліса необхідно враховувати у разі виконання пострілів на далекій відстані й вводити відповідні поправки.

Сила Коріоліса, що діє на тіло, яке рухається уздовж меридіана в будь-якому напрямку (на північ або на південь), спрямована щодо напрямку руху вправо в північній півкулі й вліво в південній півкулі. Це призводить до того, що в річках підмивається завжди правий берег у північній півкулі й лівий берег у південній півкулі.

ТЕМА 6 МЕХАНІКА РІДИН

§ 34 Методи Лагранжа та Ейлера для опису течії рідини. Трубка течії

1 Для опису руху рідин і газів їх поділяють (аналогічно методиці вивчення твердих тіл) на окремі елементи (частинки рідини) так, щоб кожний із них можна було вважати матеріальною точкою і застосувати до неї загальні закони механіки. *Про рух рідин і газів загалом можна скласти уявлення, якщо простежити за рухом кожної їхньої частинки окремо. Такий метод вивчення руху рідин і газів, запропонований Лагранжем, зводиться до*

знаходження траєкторії кожного елемента рідини (газу) і його швидкості як функції часу і називається **методом Лагранжа**.

Інший метод вивчення руху рідин і газів запропонував Ейлер. За цим методом (**метод Ейлера**) замість дослідження руху кожного елемента рідини або газу, зокрема визначають швидкість у кожній точці потоку в різний час; ця швидкість належить не до певної частинки, а до будь-якої частинки, що проходить через дану точку простору. Зрозуміло, що коли буде знайдено розподіл швидкостей у потоці й характер зміни його в часі, то потік рідини або газу стане цілком визначеним. Інакше кажучи, за методом Ейлера потік рідини або газу задає поле векторів швидкості $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

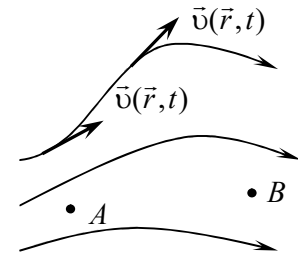


Рисунок 34.1

2 Сукупність векторів $\vec{v}(\vec{r}, t)$, заданих для всіх точок простору, називається полем вектора швидкості. Це поле можна наочно зобразити за допомогою **ліній течії** (рис. 34.1). Лінії течії проводяться так, щоб вектор \vec{v} у кожній точці простору був спрямований за дотичною до відповідної лінії. Лінію течії можна провести через будь-яку точку простору. Якщо побудувати всі уявні лінії течії, вони зіллються. Тому для наочного уявлення течії рідини будують лише частину ліній, вибираючи їх так, щоб густина ліній течії чисельно дорівнювала модулю швидкості в даному місці. Тоді за картиною ліній течії можна оцінити не тільки напрямок, але й модуль вектора \vec{v} у різних точках простору. Наприклад, у точці A на рисунку 34.1 густина ліній, а отже, й модуль швидкості v є більшими, ніж у точці B . Оскільки різні частинки рідини можуть проходити через дану точку простору з різними швидкостями, то картина ліній течії може з часом змінюватися. Якщо швидкість, у кожній точці простору залишається постійною, то такий потік рідини називається **стаціонарним**. У стаціонарному потоці будь-яка частинка рідини проходить через дану точку простору з однієї й тією самою швидкістю \vec{v} . Картина ліній стаціонарного потоку залишається незмінною, і лінії течії в цьому разі збігаються із траєкторіями частинок.

3 Якщо через усі точки невеликого замкнутого контуру провести лінії течії, утвориться поверхня, яку називають **трубкою течії.** Вектор \vec{v} буде дотичним до поверхні трубки течії в кожній її точці. Це означає, що частинки рідини під час свого руху не перетинають стінок трубки течії.

§ 35 Теорема про нерозривність потоку

1 Розглянемо трубку течії, досить тонку для того, щоб у всіх точках її поперечного перерізу S швидкість частинок v була однаковою (рис. 35.1). За стаціонарної течії трубка течії подібна до стінок твердої труби. Тому через перетин S пройде за час Δt об'єм рідини, який дорівнює $\Delta V = Sv\Delta t$, маса якого $\rho \cdot \Delta V = \rho \cdot Sv\Delta t$. На рисунку 35.1 зображені два перетини дуже тонкої трубки течії – S_1 і S_2 . Через ці перетини за час Δt пройдуть маси рідини $\Delta m_1 = \rho_1 \cdot \Delta V_1 = \rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$ та $\Delta m_2 = \rho_2 \cdot \Delta V_2 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$. У стаціонарному потоці ці маси рідини або газу повинні бути однаковими: $\Delta m_1 = \Delta m_2$. Інакше між перерізами S_1 та S_2 кількість речовини весь час збільшувалася б або зменшувалася і не існувало б стаціонарного потоку. Тому з рівності мас знаходимо

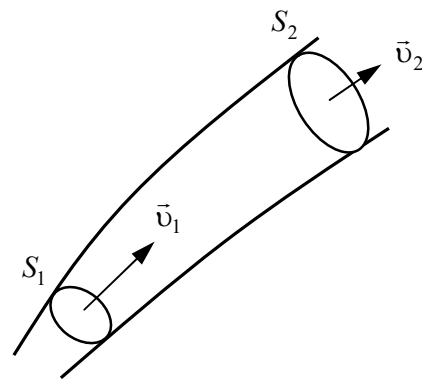


Рисунок 35.1

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2. \quad (35.1)$$

Розрахунки показують, що в стаціонарному потоці змінами густини не тільки рідини, а й газу можна знехтувати, тобто $\rho_1 = \rho_2$. Тоді рівність (35.1) можна записати так:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2. \quad (35.2)$$

Рівність (35.2) є справедливою для будь-якої пари довільно взятих перетинів. Отже, для нестисливої рідини для стаціонарного потоку добуток Sv у будь-якому перетині даної трубки течії має однакове значення

$$S \cdot v = const. \quad (35.3)$$

Це твердження називають **теоремою про нерозривність потоку**.

Зі співвідношення (35.3) випливає, що в разі трубки течії, у якій змінюється її перетин, частинки рідини в різних точках трубки рухаються з різними швидкостями, тобто із прискоренням (рис. 35.2). Якщо трубка течії горизонтальна, це прискорення може бути обумовлено тільки зміною тиску вздовж трубки – у місцях, де швидкість більше, тиск повинен бути менше, і навпаки.

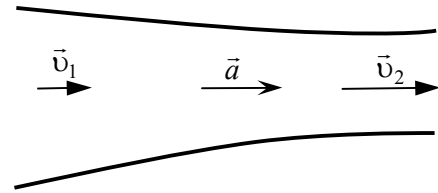


Рисунок 35.2 – Під час руху у трубці, яка звужується, швидкість частинок зростає – частинки рухаються прискорено

§ 36 Рівняння Бернуллі

1 У реальних рідинах за умови відносного переміщення шарів рідини щодо один одного виникають сили внутрішнього тертя, які гальмують відносний зсув шарів. Рідина, у якій внутрішнє тертя повністю відсутнє, називається **ідеальною**. Отже, рух ідеальної рідини не супроводжується дисипацією енергії.

Розглянемо стаціонарний потік ідеальної рідини, яка не стискується. Виділимо об'єм рідини, який обмежений стінками вузької трубки течії й перпендикулярними до ліній течії перетинами S_1 й S_2 (рис. 36.1). За час Δt цей об'єм зміститься уздовж трубки течії, причому границя об'єму S_1 отримає зміщення Δl_1 а границя S_2 – зміщення Δl_2 . Робота, яка виконана в цьому разі силами тиску, дорівнює збільшенню повної енергії ($E_k + E_p$) рідини, яка міститься в розглянутому об'ємі.

Сили тиску на стінки трубки течії перпендикулярні в кожній точці до напрямку переміщення рідини, унаслідок чого роботи не виконують. Відмінна від нуля лише робота сил тиску, яка прикладена до перетинів S_1 і S_2 . Ця робота дорівнює

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (36.1)$$

Повна енергія розглянутого об'єму рідини складається з кінетичної енергії й потенційної енергії в полі сил земного тяжіння. За час Δt рідина, яка міститься між перетинами 1 і 2, переміщається уздовж трубки течії в положення, обумовлене перетинами 1' і 2'. Через те, що рідина не стискується, добуток площі перетину S на його переміщення Δl для обох границь розглянутого об'єму має одне й те саме значення: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. Унаслідок стаціонарності потоку повна енергія тієї частини рідини, яка обмежена перетинами 1' і 2' (внутрішня незаштрихована частина трубки течії на рисунку 36.1), за час Δt не змінюється. Тому збільшення повної енергії дорівнює різниці значень повної енергії заштрихованих об'ємів ΔV_2 і ΔV_1 , маса яких $\Delta m = \rho \Delta V$ (ρ – густина рідини).

Візьмемо перетин S трубки течії й переміщення Δl настільки малими, щоб усім точкам кожного із заштрихованих об'ємів можна було приписати однакові значення швидкості v , тиску p й висоти h . Тоді для збільшення повної енергії отримуємо вираз

$$\Delta W = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right). \quad (36.2)$$

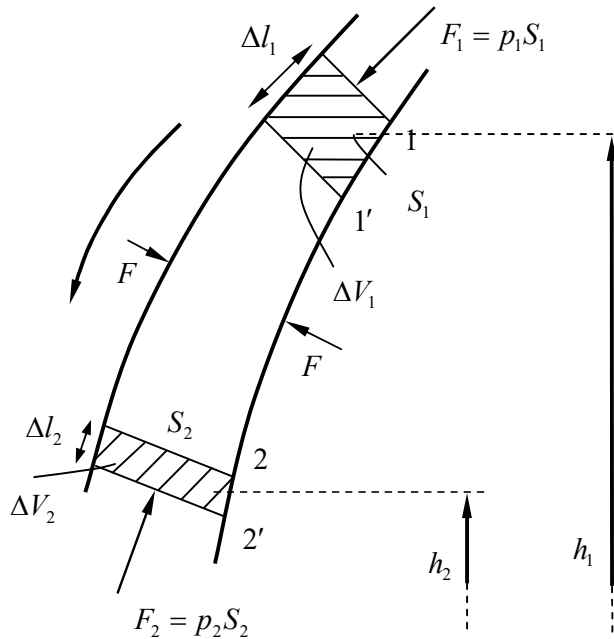


Рисунок 36.1

Прирівнюємо вирази (36.1) і (36.2), скоротимо на ΔV й перенесемо члени з однаковими індексами в одну частину рівності. Унаслідок цього отримаємо

$$\boxed{\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2}. \quad (36.3)$$

Це рівняння стає абсолютно точним лише за прямування поперечного перерізу S до нуля, тобто за умови стягування трубки течії в лінію. Отже, величини v, h й p в обох частинах рівності потрібно розглядати як такі, що належать до двох довільних точок однієї й тієї самої лінії течії.

Під час доведення формули (36.3) перетини S_1 й S_2 були взяті довільно. Тому можна стверджувати, що для *стаціонарної ідеальної рідини, яка нестискується, уздовж будь-якої лінії течії виконується умова*

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const}. \quad (36.4)$$

Рівняння (36.3) або рівнозначне йому рівняння (36.4) називається **рівнянням Бернуллі**. Хоча це рівняння було отримано для ідеальної рідини, воно добре виконується і для реальних рідин, у яких внутрішнє тертя невелике.

Для горизонтальної лінії течії рівняння (36.3) має вигляд

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Звідси випливає, що тиск менший у тих точках, де швидкість більша.

§ 37 Витікання рідини з малого отвору. Формула Торрічеллі

1 Знайдемо швидкість витікання ідеальної рідини, яка нестискується, з невеликого отвору в широкій відкритій судині (рис. 37.1). Для цього використаємо рівняння Бернуллі.

Виділимо подумки в рідині трубку течії, перетинами якою є відкрита поверхня рідини S_1 і перетин потоку на виході з отвору S_2 (рис. 37.1). Покажемо штриховими лініями всередині судини стінки трубки течії рідини. Для всіх точок кожного з цих перетинів швидкість рідини v й висоту над деяким вихідним рівнем можна вважати однаковими. Тому до перетинів S_1 і S_2 можна застосувати рівняння Бернуллі

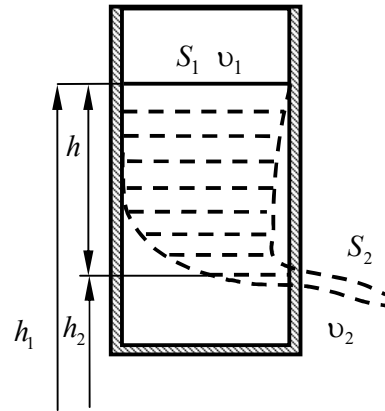


Рисунок 37.1

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (37.1)$$

Зазначимо, що тиски p_1 й p_2 в обох перетинах однакові й дорівнюють атмосферному. Швидкості v_1 та v_2 у цих перетинах пов'язані між собою теоремою про нерозривність струменя

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2.$$

Звідси

$$v_1 = v_2 \cdot S_2 / S_1 \ll v_2$$

через те, що за умовою $S_2 / S_1 \ll 1$. Тому доданком $\rho v_1^2 / 2$ в (37.1) порівняно з $\rho v_2^2 / 2$ можна знехтувати. Тоді рівняння (37.1) спрощується

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Звідси знаходимо шукану швидкість витікання рідини з отвору S_2

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (37.2)$$

де $h = h_1 - h_2$ – висота відкритої поверхні над отвором. Формула (37.2) називається **формулою Торрічеллі**. З неї випливає, що швидкість витікання рідини з отвору, який розташовано на глибині h під відкритою поверхнею рідини, збігається зі швидкістю, що отримує будь-яке тіло, коли падає з висоти h (у разі, якщо опором повітря можна знехтувати). Цей результат отриманий у припущенні, що рідина є ідеальною. Для реальних рідин швидкість витікання буде меншою.

§ 38 Сила внутрішнього тертя. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя. В'язкість. Ламінарна і турбулентна течія рідини. Число Рейнольдса

1 Ідеальна рідина, тобто рідина без внутрішнього тертя, є абстракцією. Усі реальні рідини і гази більшою або меншою мірою мають властивість **в'язкості або внутрішнього тертя**. В'язкість проявляється, зокрема, у тому, що рух, який виникає в рідині або в газі, після припинення дії причин, які його викликали, поступово припиняється. Прикладом може служити рух рідини у склянці після того, як її перестають розмішувати ложечкою.

Для з'ясування закономірностей, яким підкоряються сили внутрішнього тертя, розглянемо такий дослід. У рідину занурені дві паралельні одна одній пластини (рис. 38.1), лінійні розміри яких значно перевищують відстань між ними d . Нижня пластина втримується

на місці, верхня приводиться в рух щодо нижньої з деякою швидкістю v_0 . Дослід доводить, що для переміщення верхньої пластини з постійною швидкістю v_0 необхідно діяти на неї із цілком певною постійною за величиною силою \vec{F} . Раз пластина не отримує прискорення, виходить, що дія цієї сили врівноважується рівною їй за величиною та протилежно спрямованою силою, яка і є силою тертя, що діє на пластину під час її руху в рідині. Позначимо її F_{mp} . Варіюючи швидкість пластини v_0 , площу пластин S і відстань між ними d , можна отримати:

$$F_{mp} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (38.1)$$

де η – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи й стану (наприклад, температури) рідини й називається **коефіцієнтом внутрішнього тертя або коефіцієнтом в'язкості, або просто в'язкістю рідини (газу)**.

На нижню пластину під час руху верхньої також, виявляється, діє сила F_{mp} , яка однакова за величиною F_{mp} . Для того щоб нижня пластина залишалася нерухомою, силу F_{mp} необхідно врівноважити за допомогою сили F .

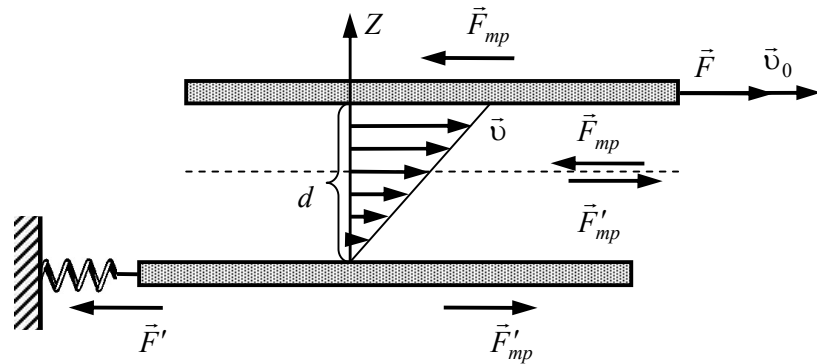


Рисунок 38.1

Отже, під час руху двох занурених у рідину пластин одна щодо одної між ними виникає взаємодія, яка характеризується силою (38.1). Вплив пластин одна на одну здійснюється через рідину, яка міститься між пластинами, передається від одного шару рідини до іншого.

Якщо в будь-якому місці між пластинами провести уявну площину, яка паралельна пластинам (пунктирну лінію на рисунку 38.1), то можна стверджувати, що частина рідини, яка лежить над цією площиною, діє на частину рідини, що лежить під площиною, із силою F'_{mp} , а частина рідини, що лежить під площиною, зі свого боку діє на частину рідини, що лежить над площиною, із силою F_{mp} , причому величини F_{mp} і F'_{mp} визначаються формулою (38.1). Отже, формула (38.1) визначає не тільки силу тертя, що діє на пластини, але й силу тертя між дотичними частинами рідини.

Якщо досліджувати швидкість частинок рідини в різних шарах, то виявляється, що вона змінюється в напрямку Z , який перпендикулярний до пластин (рис. 38.1), за лінійним законом

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (38.2)$$

Частинки рідини, яка безпосередньо дотикаються до пластинки, ніби прилипають до них, мають таку саму швидкість, як і самі пластини. Формулу (38.2) можемо перетворити

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \quad (38.3)$$

Використавши рівність (38.3), формулі (38.1) для сили внутрішнього тертя можна надати вигляд

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \quad (38.4)$$

Формулу (38.4) отримав Ньютон і тому її називають **формулою Ньютона для сили внутрішнього тертя**. Величина $|dv/dz|$ показує, як швидко змінюється швидкість у напрямку осі Z і називається градієнтом швидкості (точніше, це – модуль градієнта швидкості; сам градієнт є вектором).

Формула (38.4) була нами отримана для випадку, коли швидкість змінюється за лінійним законом (у цьому разі градієнт швидкості є постійним). Виявляється, що ця формула залишається справедливою й для будь-якого іншого закону зміни швидкості за переходу від одного шару рідини до іншого. У цьому разі для визначення сили тертя між двома сусідніми шарами рідини потрібно брати значення градієнта dv/dz у тому місці, де проходить уявна поверхня розділу шарів.

Усе, що було подано в цьому параграфі, належить не тільки до рідин, але й до газів.

Одиницею в'язкості в СІ є така в'язкість, за якої градієнт швидкості, що дорівнює 1 м/с на 1 м, призводить до виникнення сили внутрішнього тертя в 1 Н на 1 м² поверхні дотику шарів рідини. Ця одиниця позначається Н · с/м².

Коефіцієнт в'язкості залежить від температури, причому характер цієї залежності істотно різний для рідин і газів. У рідин коефіцієнт в'язкості сильно зменшується з підвищенням температури. У газів, навпаки, коефіцієнт в'язкості з температурою зростає. Відмінність у характері поведінки η за змінах температури вказує на різні механізми внутрішнього тертя в рідинах і газах.

2 Спостерігається два види течії рідини (або газу). В одних випадках рідина ніби розділяється на шари, які ковзають один щодо одного, не перемішуючись. Така течія називається **ламінарною**. Якщо в ламінарний потік увести підфарбований струмок, то він буде зберігатися, не розмиваючись, на всій довжині потоку, тому що частинки рідини в ламінарному потоці не переходять із одного шару в інший. Ламінарна течія є стаціонарною.

За збільшення швидкості або поперечних розмірів потоку характер течії істотно змінюється. Виникає енергійне перемішування рідини. Така течія називається **турбулентною**. За умови турбулентної течії швидкість частинок у кожному місці весь час змінюється хаотично – течія є нестаціонарною. Якщо в турбулентний потік увести пофарбований струмок, то вже на невеликій відстані від місця її введення пофарбована рідина рівномірно розподіляється по всьому перетині потоку.

Англійський учений Рейнольдс установив, що характер течії залежить від значення безрозмірної величини

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (38.5)$$

де ρ – густина рідини (або газу); v – середня за перерізом швидкість потоку; η – в'язкість рідини; l – характерний для поперечного перерізу потоку розмір, наприклад, сторона квадрата за квадратного перетину, радіус або діаметр за круглого перетину. Величина Re , що визначається формулою (38.1), називається **числом Рейнольдса**.

За малих значень Re течія має ламінарний характер. Починаючи з деякого значення Re , яке називають **критичним**, течія стає турбулентною. Якщо за характерний розмір труби взяти її радіус (у цьому разі $\text{Re} = \rho v r / \eta$), то критичне значення числа Рейнольдса буде дорівнювати приблизно 1000 (якщо за l взяти діаметр труби, то критичне значення Re буде дорівнювати 2000).

Число Рейнольдса служить критерієм подібності для течії рідин у трубах, каналах тощо. Наприклад, характер течії різних рідин (або газів) у круглих трубах різних діаметрів буде однаковим, якщо кожній течії відповідає однакове значення Re .

У число Рейнольдса входить відношення густини ρ й в'язкості η . Величина

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (38.6)$$

називається **кінематичною в'язкістю**. Щоб відрізнити в'язкість η від ν , величину η називають **динамічною в'язкістю**. Число Рейнольдса, яке виражено через кінематичну в'язкість, має вигляд

$$\text{Re} = \frac{vl}{\nu}. \quad (38.7)$$

§ 39 Рух тіл у рідинах і газах. Сила лобового опору. Піднімальна сила. Парадокс Д'Аламбера. Вплив в'язкості на характер обтікання тіла рідиною. Сила Стокса

1 Вплив рідкого або газоподібного середовища на тіло, яке рухається в ньому з постійною швидкістю \vec{v} , буде таким самим, як і була б дія на нерухоме тіло з боку однорідного потоку рідини або газу, що набігає на нього зі швидкістю \vec{v} (надалі для стислості ми будемо аналізувати тільки рідину, маючи на увазі водночас і газ). Отже, під час з'ясування сил, що діють на тіло, байдуже, що вважати рухомим – тіло або середовище. Зручно припускати тіло нерухомим, а середовище рухомим.

Силу \vec{F} , з якої потік діє на тіло, можна розкласти на дві складові: силу \vec{X} , яка спрямована вздовж швидкості \vec{v} незбуреного потоку, і яку називають **лобовим опором**, й силу \vec{Y} , яка перпендикулярна до \vec{v} , і яку називають **піднімальною силою**. Лобовий опір складається із сил тиску й сил внутрішнього тертя. Очевидно, що на тіло, яке симетричне щодо напрямку швидкості потоку \vec{v} , може діяти тільки лобовий опір, піднімальна ж сила в цьому разі буде відсутня.

2 Можна довести, що в ідеальній рідині, яка нестискується, рівномірний рух тіла довільної форми повинен відбуватися без лобового опору. Цей результат отримав назву **парадокса Д'Аламбера**.

Покажемо відсутність лобового опору на прикладі обтікання ідеальною рідиною дуже довгого («нескінченного») циліндра (рис. 39.1). Не маючи в'язкості, ідеальна рідина повинна ковзати по поверхні циліндра, повністю обтікаючи його. Тому лінії течії будуть симетричними як щодо прямої, що проходить через точки 1 і 3, так і щодо прямої, що проходить через точки 2 і 4. Теорема Бернуллі дозволяє за картиною ліній течії судити про тиск у різних точках потоку. Поблизу точок 1 і 3 тиск однаковий (і більший, ніж у незбуреному потоці, тому що швидкість поблизу цих точок менша). Поблизу точок 2 і 4 тиск також однаковий (і менший, ніж у незбуреному потоці, тому що швидкість поблизу цих точок більша). Отже, результуюча сила тиску на поверхню циліндра (яка під час відсутності в'язкості могла б обумовити лобовий опір) буде дорівнювати нулю. Як ми вже відзначали, такий же самий результат виходить і для тіл довільної (зокрема й несиметричної) форми. Цей висновок стосується тільки лобового опору. Піднімальна сила, дорівнює нулю для симетричних тіл (рис. 39.1), для несиметричних тіл вона відмінна від нуля.

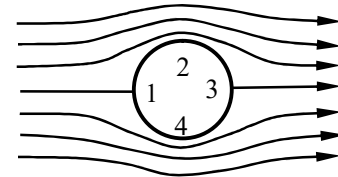


Рисунок 39.1

На рисунку 39.2 подані лінії течії за умови обтікання ідеальною рідиною напівциліндра. Унаслідок повного обтікання лінії течії симетричні щодо прямої, що проходить через точки 2 і 4. Однак відносно прямої, що проходить через точки 1 і 3, картина ліній течії несиметрична. Поблизу точки 2, де лінії густіші, тиск менший, ніж поблизу точки 4, унаслідок чого виникає піднімальна сила, яка спрямована вертикально вгору..

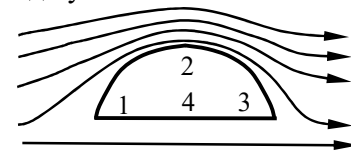


Рисунок 39.2

3 Інакше відбувається рух тіла у в'язкій рідині. У цьому разі дуже тонкий шар рідини прилипає до поверхні тіла й рухається з ним як одне ціле, захоплюючи за собою через внутрішнє тертя наступні шари. У міру видалення від поверхні тіла швидкість шарів стає все менше й, нарешті, на деякій відстані від поверхні рідина буде не збурена рухом тіла. Отже, **тіло виявляється оточеним шаром рідини зі швидкістю, яка змінюється всередині цього**

шару досить швидко. Цей шар називається **пограничним**. У ньому діють сили в'язкого тертя, які в остаточному підсумку прикладені до тіла й призводять до виникнення лобового опору.

Але вплив в'язкості не вичерпується виникненням сил тертя. Наявність пограничного шару повністю змінює характер обтікання тіла рідиною.

Повне обтікання стає неможливим. Дія сил тертя в пограничному шарі призводить до того, що потік відривається від поверхні тіла, унаслідок чого за тілом виникають вихри (рис. 39.3). Вихори несуть потік і поступово вони загасають унаслідок тертя; водночас енергія вихрів витрачається на нагрівання рідини. Тиск, що утвориться за тілом, у вихровій області виявляється зниженим, унаслідок чого результуюча сила тиску буде відмінна від нуля. Це, зі свого боку, обумовлює лобовий опір.

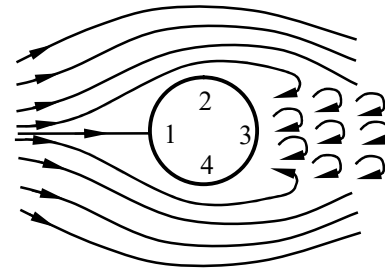


Рисунок 39.3

Отже, як ми вже відзначали, лобовий опір складається з опору тертя й опору тиску. Опір тиску сильно залежить від форми тіла. Найменший опір тиску мають тіла з краплеподібною формою (рис. 39.4).

Співвідношення між опором тертя й опором тиску визначається значенням числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Тут v – швидкість тіла щодо рідини (або швидкість потоку, що набігає на тіло); l – характерний розмір тіла, наприклад радіус для тіла кульової форми. За малих Re (тобто за малих v і l) основну роль відіграє опір тертя, тому опором тиску можна знехтувати. Із зростанням в'язкості відносна роль сил тертя зростає. За великих значень Re у лобовому опорі переважають сили тиску.

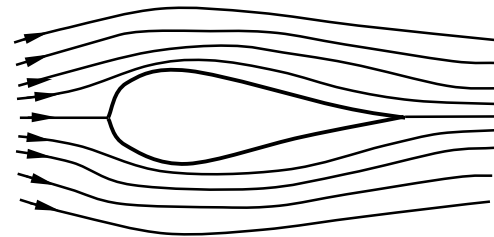


Рисунок 39.4

4 Стокс установив, що за невеликих швидкостях і розмірах тіл (тобто за малих Re , коли опір середовища обумовлений практично тільки силами тертя) модуль сили опору визначається формулою

$$F = k\eta l v, \quad (39.1)$$

де η – динамічна в'язкість середовища; v – швидкість руху тіла; l – характерний розмір тіла; k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла. Силу, що визначається (39.1), називають **силою Стокса**.

Для кулі, якщо взяти за l його радіус r , коефіцієнт пропорційності дорівнює 6π . Отже, сила опору руху в рідинах невеликих кульок за малих швидкостей дорівнює

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (39.2)$$

Силу, що визначається формулою (39.2), теж називають **силою Стокса**. Треба пам'ятати, що формула Стокса справедлива за умови, що відстань від тіла до границь рідини (наприклад, до стінок посудини) набагато більша за розміри тіла.

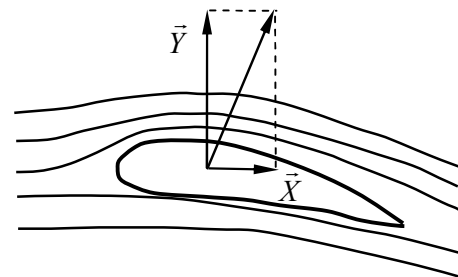


Рисунок 39.5

5 Літак підтримується в повітрі піднімальною силою \vec{Y} , що діє на його крила (рис. 39.5). Лобовий опір \vec{X} відіграє під час польоту літака шкідливу роль. Тому крилам і фюзеляжу літака надають форму, завдяки якій газ його добре обтікає. Унаслідок асиметричної форми й нахиленого розміщення крила швидкість повітря над крилом

виявляється більше (а отже, тиск менше, як це впливає з рівняння Бернуллі), ніж під крилом. Завдяки цьому створюється піднімальна сила. Істотну роль в утворенні піднімальної сили відіграє в'язкість повітря, завдяки чому утворюються вихорі, які відриваються від заднього краю крила. Детально розглянути явища, що обумовлюють піднімальну силу, тут ми, на жаль, не маємо можливості. Основи теорії крила літака створив у 1904 р. Жуковський, який сформулював теорему про піднімальну силу й довів формулу для визначення цієї сили, яка є основою всіх аеродинамічних розрахунків літаків.

ТЕМА 7 ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

§ 40 Принцип відносності Галілея. Перетворення Галілея

1 Порівняємо опис руху частинки в інерціальних системах відліку K й K' , які рухаються одна щодо іншої зі швидкістю \vec{V} (рис. 40.1). Для спрощення математичних перетворень виберемо осі координат так, як подано на рисунку 40.1. Тут осі X й X' збігаються, осі Y й Y' , а також Z і Z' паралельні одна одній. Відлік часу почнемо з того моменту, коли

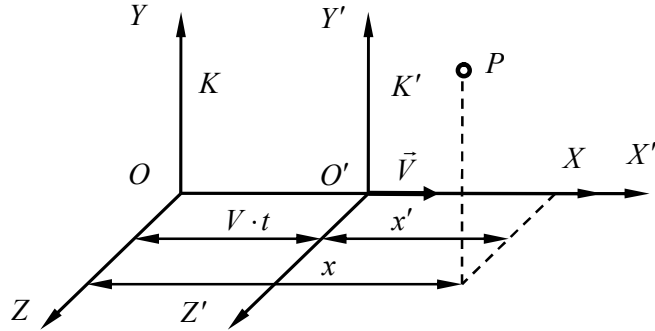


Рисунок 40.1

початок координат O і O' збігалися. Тоді координати x й x' довільно взятої точки P будуть пов'язані співвідношенням $x = x' + Vt$. За обраного вибору осей $y = y'$ і $z = z'$. У ньютонівській механіці передбачається, що час у всіх системах відліку проходить однаково: тому $t = t'$. Отже, отримуємо чотири рівняння

$$\boxed{x = x' + Vt}, \quad \boxed{y = y'}, \quad \boxed{z = z'}, \quad \boxed{t = t'}, \quad (40.1)$$

які називають **перетвореннями Галілея**. Ці рівняння дозволяють перейти від координат і часу однієї інерціальної системи відліку до координат і часу іншої інерціальної системи.

2 Продиференціюємо перше з рівнянь (40.1) за часом, узявши до уваги, що $t = t'$ й, отже, похідна за t збігається з похідною за t'

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V = \frac{dx'}{dt'} + V.$$

Похідна dx/dt є проекцією швидкості частинки \vec{v} в системі K на вісь X цієї системи; похідна dx'/dt' є проекцією швидкості частинки \vec{v}' в системі K' на вісь X' цієї системи. Отже,

$$v_x = v'_x + V, \quad (40.2)$$

де $V = V_x = V_{x'}$ (проекція вектора на вісь X збігається із проекцією того самого вектора на вісь X').

Диференціювання другого й третього з рівнянь (40.1) призводить до такого результату

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'}, \quad \text{тобто } v_y = v'_y; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'}, \quad \text{тобто } v_z = v'_z. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Сукупність рівнянь (40.2) і (40.3) можна подати одним векторним рівнянням

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}}. \quad (40.4)$$

Це рівняння можна розглядати або як формулу *перетворення швидкості частинки від системи K' до системи K або як закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці: швидкість частинки щодо нерухомої системи K дорівнює сумі швидкості частинки щодо рухомої системи K' і швидкості системи K' щодо системи K .*

3 Диференціювання за часом рівняння (40.4) призводить до рівності

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (40.5)$$

($\vec{V} = \text{const}$, тому $d\vec{V}/dt = 0$). Отже, прискорення частинки щодо систем K і K' однакові. Сила \vec{F} , що діє на частинку в системі K , збігається із силою \vec{F}' , що діє на частинку в системі K'

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (40.6)$$

Це впливає з того, що сила залежить від відстаней між даною частинкою й частинками, що взаємодіють з нею (і може бути від відносних швидкостей частинок). А ці відносні відстані (й відносні швидкості) у ньютонівській механіці вважаються однаковими у всіх інерціальних системах відліку. Маса також має однакове числове значення у всіх системах відліку.

З вищезазначеного впливає, що якщо в системі K виконується рівність

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

то в системі K' буде виконуватися рівність

$$m'\vec{a}' = \vec{F}'.$$

Системи K й K' були взяті зовсім довільно. Тому отриманий результат означає, що *закони механіки однаково формулюються для всіх інерціальних систем відліку*. Це твердження називається **принципом відносності Галілея**.

4 Галілей перший звернув увагу на те, що жодними механічними дослідами, виконаними в межах даної інерціальної системи відліку, неможливо встановити, чи перебуває вона в стані спокою або в стані рівномірного прямолінійного руху. Він писав, що в закритій каюті корабля, який рівномірно рухається, мухи летять з однаковою швидкістю в усіх напрямках; відстань, на яку ви стрибнете, не залежить від напрямку стрибка; краплі з отвору в дні підвішеного відерця будуть падати так само, як вони падали, коли корабель був нерухомим. Імовірно, кожному доводилося, розглядаючи з вікна вагона потяг, який стоїть на сусідньому шляху, відчутти, начебто вагон, у якому ви перебуваєте, почав рухатися, тоді як насправді рушив з місця сусідній потяг. Усі перелічені процеси є проявом принципу відносності.

Інваріантними величинами називають величини, які мають одне й те саме числове значення у всіх системах відліку (латинське слово *invariantis* означає «незмінний»). Прикладами таких величин можуть служити маса, електричний заряд та ін.

Інваріантними рівняннями щодо перетворення координат і часу у разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої називаються рівняння, вигляд яких не змінюється за такого переходу. Самі величини, що входять у рівняння, можуть за умови переходу до іншої системи відліку змінюватись, однак формули, що виражають зв'язок між величинами, залишаються незмінними. Як приклад можна навести рівняння теореми про кінетичну енергію

$$E_{k,2} - E_{k,1} = A$$

(збільшення кінетичної енергії тіла дорівнює виконаній над ним роботі). Ця рівність є справедливою у всіх інерціальних системах відліку, тоді як значення $E_{k,2} - E_{k,1}$ й A у різних системах різні.

Користуючись поняттям інваріантності, **принцип відносності Галілея** можна сформулювати так: *рівняння механіки інваріантні щодо перетворень Галілея*.

§ 41 Постулати спеціальної теорії відносності. Відносність одночасності

1 У другій половині XIX століття Д. Максвелл створив теорію електромагнітного поля, яку сформулював у вигляді 4 рівнянь (рівняння Максвелла), які описували основні закономірності електромагнітних явищ. *Один із наслідків цієї теорії полягає в тому, що електромагнітні поля можуть поширюватися у вакуумі у вигляді електромагнітних хвиль.* Причому швидкість цих хвиль, як випливало з розрахунків, була близькою до швидкості світла. Це дало підставу Д. Максвеллу зробити відкриття: світло – електромагнітне збурення яке поширюється у вигляді електромагнітних хвиль.

Однак *рівняння Максвелла виявилися неінваріантними щодо до перетворень Галілея.* Тобто у разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої із застосуванням перетворень Галілея вигляд рівнянь змінювався. Це означало, що закони електромагнетизму змінюються у разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої, що з фізичного погляду не є правильним. Крім цього, з *теорії електромагнітного поля Максвелла випливало, що швидкість світла у вакуумі є сталою величиною, тобто не залежить від системи відліку. А це суперечить закону додавання швидкостей у ньютонівській механіці.*

Де помилка? У теорії Максвелла? Чи в перетвореннях Галілея? На це питання повинен був дати відповідь експеримент. Насамперед перевірялася «більш молода» теорія Максвелла. Вимірювалася швидкість світла в різних системах відліку. Експерименти показали: швидкість світла у вакуумі в різних системах відліку має одне й теж саме значення. Тобто теорія електромагнітного поля Максвелла є правильною.

Розв'язання проблеми було знайдено А. Ейнштейном. У 1905 р. *А. Ейнштейн створив спеціальну теорію відносності (СТВ), яка являє собою фізичну теорію простору й часу. В основі цієї теорії лежать два постулати: принцип відносності Ейнштейна і принцип інваріантності швидкості світла.*

Ейнштейн поширив механічний принцип відносності Галілея на всі без винятку фізичні явища: *усі закони природи однаково формулюються для всіх інерціальних систем відліку. Також Ейнштейн запропонував перетворення Галілея замінити більше загальними перетвореннями Лоренца.* Відповідно до цього **принцип відносності Ейнштейна** можна сформулювати у вигляді: **рівняння, що виражають закони природи, інваріантні щодо перетворень Лоренца.**

Принцип інваріантності швидкості світла стверджує, *що швидкість світла у вакуумі не залежить від руху джерел світла і є однаковою у всіх інерціальних системах відліку.*

Незалежність швидкості світла від руху джерела можна було б не висувати як самостійний постулат, якщо із самого початку прийняти електромагнітну теорію світла. Однак таку фундаментальну теорію про простір та час, якою є теорія відносності, краще будувати, не пов'язуючи її з жодними уявленнями про природу й механізми фізичних явищ.

2 У ньютонівській механіці одночасність вважається абсолютною. Тобто, коли в одній системі відліку дві події відбулись одночасно, то і в інших системах ці події також будуть одночасними. *У спеціальній теорії відносності одночасність стає відносною.* Тобто, якщо в одній системі відліку дві події є одночасними, то в іншій системі вони не обов'язково будуть одночасними. *Покажемо це на прикладі.*

Розглянемо потяг, який рухається поверхнею Землі рівномірно й прямолінійно зі швидкістю \vec{V} (рис. 41.1). Візьмемо його за систему K' , що рухається. Нерухомою системою K будемо вважати платформу, повз яку проходить потяг. Нехай із середини потяга точка O' (рис. 41.1) випромінюється в обох напрямках світловий сигнал (відбувається спалах світла), коли вона збігається з точкою O . Пунктирною лінією на рисунку 41.1 подано положення потяга в деякий момент часу після спалаху світла. У будь-якій інерціальній системі відліку світло поширюється у всіх напрямках з однаковою швидкістю c . Тому пасажир, який їде у потязі і в якому голова 1 і хвіст 2 потяга нерухомі, відзначить, що сигнал досяг голови 1 і хвоста 2 потяга одночасно. З іншого боку, черговий станції, який знаходиться на платформі (в системі K), відзначить, що сигнал який випущено з точки O і має швидкість c , досяг

хвоста 2 потяга раніше, ніж голови 1. Це пов'язано з тим, що для чергового, повз який проходить потяг, точки 1 й 2 рухаються. Точку 1 сигналу доводиться наздоганяти, а точка 2 рухається назустріч світлу. Тому сигнал приходить у точку 2 раніше ніж у точку 1. Тобто в системі K світло досягне кінців потяга в різні моменти часу, неодноразомно.

Отже, одночасність подій є відносною, вона залежить від системи відліку щодо якої розглядаються ці події.

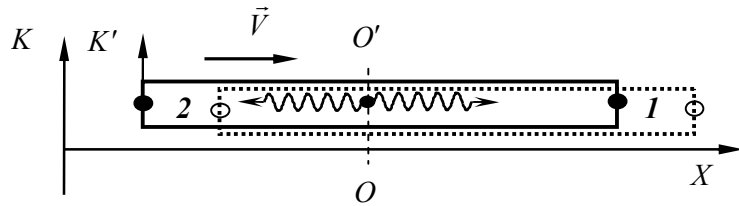


Рисунок 41.1

3.3 розглянутого прикладу впливає, що в різних системах відліку час тече неоднаково. Простір і час втрачають відокремленість, незалежність один від одного, як це було в ньютонівській механіці. Як у СТВ визначають час? У якому разі події потрібно вважати одночасними?

У спеціальній теорії відносності вимірювання часу проводять у такий спосіб. У кожній точці простору розміщують годинник. Вимірювання часу в даній точці простору проводять лише за годинником, який розміщено в цій точці простору. Для того щоб усі годинники показували однаковий час, потрібно провести їхню синхронізацію. Ейнштейн запропонував спосіб синхронізації, який ґрунтується на другому постулаті СТВ. Сутність синхронізації така. Розглянемо два годинники, які розміщено в точках A й B . У середині відрізка AB зробимо світловий спалах. У момент приходу світла від спалаху до годинників A й B виставимо в них однаковий час. Тоді годинники будуть синхронізованими. Інші годинники синхронізуються аналогічно.

Отже, у СТВ використовуємо просторово-часову систему відліку з єдиним часом, у якій годинники синхронізовані між собою за правилом Ейнштейна. Дві просторово розділених події будемо називати одночасними, коли годинники, що розміщені в точках, де відбулися ці події, показують один і той самий час.

§ 42 Перетворення Лоренца

1 Розглянемо інерціальні системи відліку K й K' , які подано на рисунку 42.1. Осі X та X' збігаються між собою, Y та Y' , а також Z й Z' є паралельні одна одній. Візьмемо, що система K' рухається зі швидкістю \vec{V} щодо нерухомої системи K . Припустимо, що в деякий момент часу в деякій точці простору P відбувається деяка подія. У системі K воно характеризується значеннями координат і часу x, y, z, t , а в системі K' – значеннями координат і часу x', y', z', t' . Знайдемо формули, що пов'язують нештриховані значення зі штрихованими.

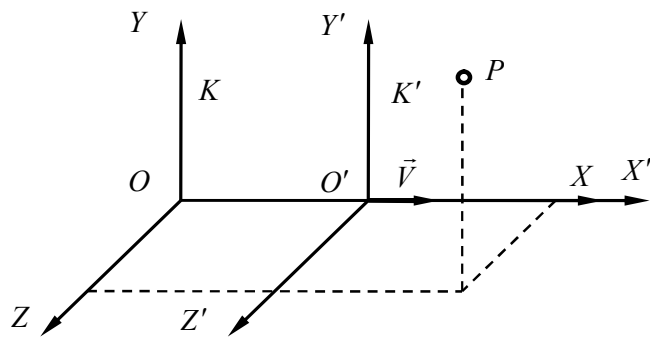


Рисунок 42.1

Для розв'язання цієї задачі потрібно використати однорідність часу і простору, другий постулат СТВ. Шукані формули отримали назву **перетворень Лоренца** і мають такий вигляд:

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}},} \quad (42.1)$$

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.} \quad (42.2)$$

У цих формулах c є швидкістю світла. Формули (42.1) описують перехід від системи K' до системи K , а формули (42.2) – перехід від системи K до системи K' . Унаслідок рівноправності систем перетворення (42.1) і (42.2) відрізняються лише знаком перед V . Ця відмінність обумовлена тим, що система K' рухається щодо системи K зі швидкістю \vec{V} , тоді як система K рухається щодо системи K' зі швидкістю $(-\vec{V})$.

У перетвореннях Лоренца «перемішані» координати й час. Наприклад, час t у системі K визначається не тільки часом t' у системі K' , але також і координатою x' . У цьому проявляється взаємозв'язок простору й часу.

2 Проведемо дослідження формул перетворень Лоренца у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкості є набагато меншими за швидкість світла c . Тоді можна вважати, що $c \rightarrow \infty$. Коли ми підставимо $c \approx \infty$, наприклад, в (42.1), то отримаємо

$$x = x' + Vt', y = y', z = z', t = t'. \quad (42.3)$$

А формули (42.3), як відомо, є формулами перетворень Галілея. Отже, у разі, коли $c \rightarrow \infty$, перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея.

§ 43 Перетворення швидкостей у спеціальній теорії відносності

1 Знайдемо зв'язок між швидкістю частинки \vec{v} , що виміряна в системі відліку K , та швидкістю тієї самої частинки \vec{v}' , що виміряна в системі відліку K' . Вважаємо, що система K' рухається зі швидкістю \vec{V} щодо нерухомої системи K (рис. 43.1).

Компоненти швидкості \vec{v} частинки в системі K визначаються виразами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (43.1)$$

У системі K' компоненти швидкості \vec{v}' тієї самої частинки дорівнюють

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}. \quad (43.2)$$

Знайдемо формули, що пов'язують нештриховані компоненти швидкості зі штрихованими. Для цього скористаємося перетвореннями Лоренца. З цих формул отримуємо, що

$$dx = \frac{dx' + V \cdot dt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + (V/c^2)dx'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (43.3)$$

Розділивши перше із цих рівностей на четверте, прийдемо до співвідношення

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V \cdot dt'}{dt' + (V/c^2)dx'} = \frac{dx'/dt' + V}{1 + (V/c^2)dx'/dt'},$$

яке з урахуванням (43.1) і (43.2) можна подати у вигляді

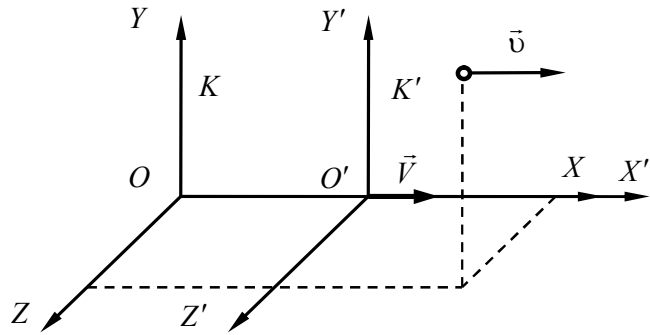


Рисунок 43.1

$$\boxed{v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + (V/c^2) \cdot v'_{x'}}} \quad (43.4)$$

Розділивши друге й третє з рівностей (43.3) на четверте, отримаємо ще два співвідношення:

$$\boxed{v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + V v'_{x'} / c^2}, \quad v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + V v'_{x'} / c^2}} \quad (43.5)$$

Формули (43.4) та (43.5) і розв'язують поставлене завдання. Вони отримали назву **формули перетворення або додавання швидкостей у СТВ**.

За формулами (43.4) і (43.5) здійснюється перетворення швидкостей у разі переходу від системи K' до системи K . Використавши аналогічно як і вище перетворення Лоренца, легко одержати формули

$$\boxed{v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - (V/c^2) \cdot v_x}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V v_x / c^2}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V v_x / c^2}} \quad (43.6)$$

за якими здійснюється перетворення швидкостей у разі переходу від системи K до системи K' . Формули (43.6) відрізняються від формул (43.4) і (43.5), як і варто було сподіватися, тільки знаком перед V . Формули (43.6) також називаються **формулами перетворення або додавання швидкостей у СТВ**.

2 Проведемо дослідження формул додавання швидкостей у СТВ у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли $V \ll c$. У цій ситуації вираз $V/c \ll 1$ і ним можна в формулах (43.4)–(43.6) знехтувати. Унаслідок цього отримуємо, наприклад, з (43.4) та (43.5)

$$v_x = v'_{x'} + V, \quad v_y = v'_{y'}, \quad v_z = v'_{z'}$$

формули додавання швидкостей, за допомогою яких перетворюються швидкості в ньютонівській механіці. Отже, коли $V \ll c$ формули додавання швидкостей у СТВ переходять у формули додавання швидкостей ньютонівської механіки.

Розглянемо випадок, коли частинка рухається паралельно осям X і X' у напрямку швидкості \vec{V} (рис. 42.1). Тоді v_x збігається з модулем швидкості частинки v у системі K , а $v'_{x'}$ – з модулем швидкості v' у системі K' , і формула (43.4) має вигляд

$$v = \frac{v' + V}{1 + (V/c^2) \cdot v'} \quad (43.7)$$

Швидкості \vec{v} , \vec{v}' і \vec{V} паралельні й спрямовані в одну й ту саму сторону. Отже, формула (43.7) виражає закон додавання швидкостей. Якщо $v' = c$, то

$$v = \frac{c + V}{1 + (V/c^2) \cdot c} = \frac{(c + V)c}{(c + V)} = c \quad (43.8)$$

Отже, формула додавання швидкостей узгоджується з другим постулатом СТВ.

§ 44 Лоренцеве скорочення довжини

1 Порівняємо довжину стрижня в інерціальних системах відліку K й K' (рис. 44.1). Припустимо, що стрижень розміщено вздовж осей X і X' , які збігаються. У системі K' стрижень перебуває у стані спокою. Щодо системи K він рухається зі швидкістю \vec{v} , яка дорівнює швидкості \vec{V} системи K' щодо системи K .

Для визначення довжини стрижня в системі K' , де стрижень перебуває у стані спокою, потрібно прикласти до нього масштабну лінійку й визначити координату x'_1 одного

кінця стрижня, а потім координату x'_2 іншого кінця. Різниця координат дасть довжину стрижня l_0 в системі K' :

$$l_0 = x'_2 - x'_1.$$

Довжину l_0 , що виміряна в системі відліку, у якій тіло перебуває у стані спокою, називають **власною довжиною**.

У системі K виміряти довжину стрижня складніше. Щодо системи K стрижень рухається зі швидкістю \vec{v} , що дорівнює швидкості \vec{V} , з якою система рухається K' щодо системи K . Оскільки стрижень рухається, потрібно визначити координати його кінців x_1 і x_2 в один і той

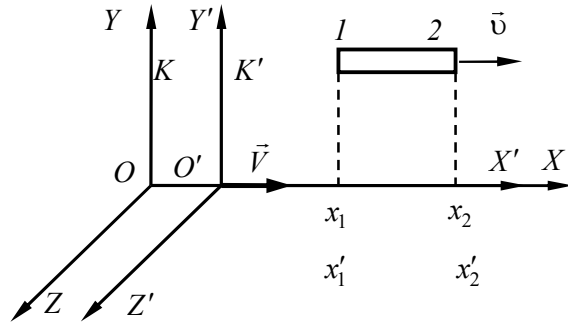


Рисунок 44.1

самий момент часу $t_1 = t_2 = t$. Тут t_1 – момент часу, коли проводимо вимірювання координати x_1 , t_2 момент часу, коли проводимо вимірювання координати x_2 . Різниця координат дасть довжину стрижня l у системі K

$$l = x_2 - x_1.$$

Щоб порівняти довжини l і l_0 , використаємо формули перетворення Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Звідси

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Замінивши різниці координат довжинами стрижня, а швидкість V системи K' щодо K , що дорівнює швидкості стрижня v , з якої він рухається в системі K , прийдемо до формули

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (44.1)$$

Отже, довжина стрижня, що рухається, виявляється менше тієї, яку він має у стані спокою. Аналогічний ефект спостерігається для тіл будь-якої форми: у напрямку руху лінійні розміри тіла скорочуються тим більше, чим більше швидкість руху. Це явище називається **скороченням довжини Лоренца**. Поперечні розміри тіла не змінюються. Унаслідок цього, наприклад, куля набуває форму еліпсоїда, сплющеного в напрямку руху.

§ 45 Релятивістське уповільнення ходу часу

1 Порівняємо проміжки часу в інерціальних системах відліку K й K' . Вважаємо, що система K' рухається щодо системи K зі швидкістю \vec{V} .

Нехай у системі K' в одній і тій самій точці з координатою $x' = x'_1 = x'_2$ відбуваються в моменти часу t'_1 й t'_2 дві якихось події (x'_1 – координата події 1, x'_2 – координата події 2). Це можуть бути, наприклад, народження елементарної частки (подія 1) і її подальший розпад (подія 2). У системі K ці події розділені проміжком часу

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Знайдемо проміжок часу Δt між цими подіями в системі K , щодо якої система K' рухається зі швидкістю V . Для цього визначимо в системі K моменти часу t_1 й t_2 , що відповідають моментам t'_1 і t'_2 , і утворимо їхню різницю:

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Для зіставлення часу в системі K й K' використаємо перетворення Лоренца

$$t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'_2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'_2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

Звідси знаходимо

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (45.2)$$

У системі K' події відбуваються в одній і тій самій точці. Це означає, що $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ є проміжком часу, який вимірюється нерухомим у цій системі відліку годинником. Такий час називається власним часом і позначається Δt_0 . **Власним часом** називають проміжок часу між двома подіями, який вимірюється в системі відліку, де ці події відбуваються в одній і тій самій точці. Отже, $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Delta t_0$.

Величина $\Delta t = t_2 - t_1$ являє собою проміжок часу між тими самими подіями, які вимірюються годинниками системи K , щодо якої точка, у якій відбуваються ці події, рухається зі швидкістю $v = V$. З урахуванням вищесказаного формулу (45.2) можна подати у вигляді

$$\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (45.3)$$

З отриманої формули випливає, що власний час менше за час, відлічений за годинниками, які рухаються щодо точки, де ці події відбуваються.

З погляду спостерігача, який перебуває у системі K , Δt є проміжок часу між подіями, який вимірюється нерухомими годинниками, а Δt_0 – проміжок, який вимірює годинник, що рухається зі швидкістю v . Оскільки $\Delta t_0 < \Delta t$ (45.3), то можна зробити висновок, що годинники, які рухаються, ідуть повільніше, ніж нерухомі годинники.

§ 46 Інтервал і його інваріантність. Швидкість світла як гранична швидкість поширення довільного сигналу

1 Нехай у точці x_1, y_1, z_1 у момент часу t_1 відбулася подія **1**, а в точці x_2, y_2, z_2 у момент часу t_2 – подія **2**. Вираз

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (46.1)$$

називають **інтервалом між подіями 1 та 2**. Основною особливістю інтервалу є те, що його величина є інваріантною, тобто він набуває одного і того ж самого значення у всіх інерціальних системах відліку.

2 Доведемо інваріантність інтервалу. Знайдемо інтервал системі K' , що рухається зі швидкістю \vec{V} щодо нерухомої системи K , і в системі K й порівняємо їхні значення. Для розв'язання цієї задачі використаємо перетворення Лоренца

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad y_1 = y'_1, \quad z_1 = z'_1, \quad t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad (46.2)$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + Vt'_2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y_2 = y'_2, \quad z_2 = z'_2, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'_2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (46.3)$$

Підставимо (46.2), (46.3) в (46.1) і отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= c^2 \frac{(\Delta t' + (V/c^2)\Delta x')^2}{1 - (V/c)^2} - \frac{(\Delta x' + V\Delta t')^2}{1 - (V/c)^2} - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (\Delta s')^2. \end{aligned}$$

Отже, $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$, тобто інтервал має однакові значення в системі відліку K і в системі відліку K' . Отже, інтервал є інваріантною величиною.

3 Розглянемо визначення інтервалу (46.1). Зазначимо, що інтервал може бути дійсною величиною або уявною величиною. Унаслідок інваріантності інтервал буде дійсним або уявним або рівним нулю у всіх інерціальних системах відліку.

Для дійсного інтервалу

$$\boxed{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0}. \quad (46.4)$$

Звідси випливає, що існує така система K' , у якій $\Delta l' = 0$. Тобто події, які характеризуються дійсним інтервалом, можуть відбуватися в системі K' в одній і тій самій точці простору. Водночас не існує системи, у якій $\Delta t' = 0$ (за такого значення $\Delta t'$ інтервал став би уявним). Отже, події, які розділені дійсним інтервалом, в жодній системі відліку не можуть бути одночасними. Відповідно до цього дійсні інтервали називаються **часоподібними**.

Для уявного інтервалу

$$\boxed{c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0}. \quad (46.5)$$

Отже, існує така система K' , в якій $\Delta t' = 0$, тобто події стають одночасними. Однак не існує системи, у якій $\Delta l' = 0$ (за такого значення $\Delta l'$ інтервал став би дійсним). Отже, події, які визначаються дійсним інтервалом, в жодній системі відліку не можуть відбуватися в одній і тій самій точці простору. Відповідно до цього уявні інтервали називають **простороподібними**.

4 Нехай подія 1 буде причиною, а подія 2 – наслідком. Тобто події 1 і 2 пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком. Такі події є поширенням сигналу. З'ясуємо, який інтервал відповідає цим причинно-наслідковим подіям.

Через те, що в довільній системі відліку час наслідку t_2 не повинен бути більшим за час причини t_1 , тобто $t_2 \leq t_1$, то це означає інтервал, який описує ці події, повинен бути або дійсним (часоподібним), або дорівнювати нулю

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 \geq 0.$$

Звідси випливає для причинно-наслідкових подій (процесу поширення сигналу)

$$\Delta l^2 / \Delta t^2 \leq c^2 \quad \text{або} \quad \boxed{v_{\text{сигналу}} = \Delta l / \Delta t \leq c}. \quad (46.6)$$

Отже, події, що пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, або процес поширення сигналу описуються часоподібним інтервалом або інтервалом, який дорівнює нулю. З (46.6) також випливає, що максимальна швидкість сигналу будь-якої природи $v_{\text{сигналу}} = \Delta l / \Delta t$ не може перевищувати швидкість світла c . Випадку, коли сигнал поширюється зі швидкістю світла, відповідає інтервал, який дорівнює нулю.

§ 47 Закон збереження імпульсу в спеціальній теорії відносності. Релятивістське рівняння динаміки

1 Згідно з принципом відносності Ейнштейна всі закони природи, зокрема й закон збереження імпульсу, повинні бути інваріантними щодо перетворень Лоренца. Перевіримо, чи є інваріантним щодо перетворення Лоренца закон збереження імпульсу у вигляді, у якому він був сформульований у ньютонівській механіці.

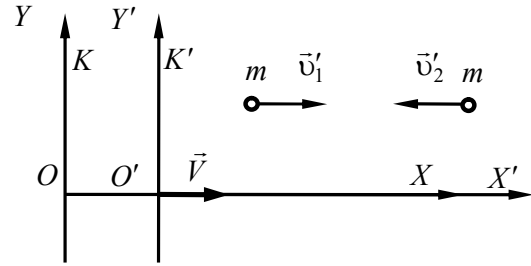


Рисунок 47.1

Для цього розглянемо абсолютно непружне центральне зіткнення двох однакових частинок маси m . За зазначених на рисунку 47.1 умов сумарний імпульс частинок зберігається в системі K' (до й після зіткнення він дорівнює нулю). У цій системі компоненти швидкостей частинок дорівнюють $v'_{1x} = V, v'_{2x} = -V$. Зрозуміло, що після зіткнення швидкості частинок у системі K' будуть дорівнювати нулю.

Перейдемо в систему K . Відповідно до формули додавання швидкостей, яка була отримана на базі перетворення Лоренца, можемо записати

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x} + V}{1 + (V/c^2) \cdot v'_{1x}} = \frac{V + V}{1 + (V/c^2) \cdot V} = \frac{2V}{1 + (V^2/c^2)},$$

$$v_{2x} = \frac{v'_{2x} + V}{1 + (V/c^2) \cdot v'_{2x}} = \frac{-V + V}{1 + (V/c^2) \cdot (-V)} = 0.$$

Отже, до зіткнення проекція на вісь X сумарного імпульсу частинок дорівнює

$$mv_{1x} + mv_{2x} = \frac{2mV}{1 + (V^2/c^2)}. \tag{47.1}$$

Після зіткнення частинки у системі K' мають швидкість, що дорівнює нулю. Це означає, що їхню швидкість щодо системи K дорівнює V . Тому проекція сумарного імпульсу після зіткнення дорівнює $2mV$. Отже,

$$\frac{2mV}{1 + (V^2/c^2)} \neq 2mV.$$

Отриманий нами результат означає, що в системі K закон збереження імпульсу, визначеного як $m\vec{v}$, не виконується. Тільки за умови, що швидкості частинок набагато менші за c , відмінністю виразу (47.1) від $2mV$ можна знехтувати. Звідси випливає, що визначення імпульсу у вигляді $m\vec{v}$ є придатним тільки за умови, що $v \ll c$. Для швидкостей порівнянних зі швидкістю світла у вакуумі імпульс повинен бути визначений якимось інакше, причому за умови $v/c \rightarrow 0$ – це новий вираз для імпульсу повинен переходити в ньютонівський $\vec{p} = m\vec{v} = m d\vec{r} / dt$.

2 Виявляється, для того щоб закон збереження імпульсу був інваріантним щодо перетворень Лоренца, необхідно:

1. Імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$ замінити на релятивістський імпульс $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$.

2. Припустити, що частинка має енергію спокою, яка пов'язана з його масою. Водночас також потрібно вважати можливим взаємне перетворення маси та енергії.

3 Для того, щоб другий закон Ньютона був інваріантним щодо перетворення Лоренца його також потрібно змінити

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-(v(t)/c)^2}} \right) = \vec{F}}. \quad (47.2)$$

Рівняння (47.2) є **релятивістським рівнянням динаміки для матеріальної точки**. Аналізуючи (47.2), бачимо, що в релятивістському випадку маса втрачає зміст коефіцієнта пропорційності між прискоренням і силою. Крім того, напрямки сила та прискорення можуть не збігатися. Крім того, на відміну від ньютонівської механіки сила \vec{F} , у релятивістській механіці не є інваріантною (у різних інерціальних системах відліку вона має різні модулі й напрямки).

§ 48 Кінетична енергія в спеціальній теорії відносності

1 Знайдемо вираз для кінетичної енергії в спеціальній теорії відносності. Будемо виходити з того, що в спеціальній теорії відносності виконується теорема про кінетичну енергію. Також використаємо релятивістське рівняння динаміки.

Відповідно до теореми про кінетичну енергію, робота, яка виконана над тілом, дорівнює збільшенню його кінетичної енергії

$$dE_k = dA. \quad (48.1)$$

Елементарну роботу знайдемо, використовуючи її визначення та релятивістське рівняння динаміки

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \cdot \vec{v} dt.$$

Тут використали визначення швидкості $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Далі підставляємо отриманий вираз у (48.1)

$$dE_k = \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) dt = \vec{v} d \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Перетворимо цей вираз, користуючись правилом диференціювання добутку функцій

$$dE_k = \vec{v} \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] d(m\vec{v}) + m\vec{v} d \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \vec{v} \left[\frac{m d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\vec{v}(v/c^2) dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right].$$

Приведемо отриманий вираз до загального знаменника й врахуємо, що $\vec{v}^2 = v^2$, $\vec{v} d\vec{v} = v dv$. Унаслідок цього отримаємо

$$dE_k = \frac{(1-v^2/c^2)m v dv + (v^2/c^2)m v dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m v dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Легко перевірити диференціюванням, що

$$\frac{m v dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = d \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Отже,

$$dE_k = d \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Функції, диференціали яких рівні один одному, можуть відрізнятися тільки на постійну величину. Тому

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const. \quad (48.2)$$

Кінетична енергія частинки, як відомо з ньютонівської механіки, стає рівною нулю, коли швидкість частинки дорівнює нулю $v=0$. Використовуємо цю умову в (48.2) і знаходимо невідому константу

$$0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-0}} + const, \quad const = -mc^2.$$

Підставляємо значення константи в (48.2) і отримуємо шукану **формулу для кінетичної енергії в спеціальній теорії відносності**

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (48.3)$$

2 Проаналізуємо отриманий вираз у нерелятивістському випадку, тобто коли $v/c \ll 1$. Для цього виконаємо такі перетворення

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) = mc^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = mc^2 \left(\frac{(1 - \sqrt{1-v^2/c^2})(1 + \sqrt{1-v^2/c^2})}{\sqrt{1-v^2/c^2}(1 + \sqrt{1-v^2/c^2})} \right) = \\ &= mc^2 \left(\frac{1^2 - (\sqrt{1-v^2/c^2})^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}(1 + \sqrt{1-v^2/c^2})} \right) = mc^2 \left(\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}(1 + \sqrt{1-v^2/c^2})} \right) = \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}(1 + \sqrt{1-v^2/c^2})} \rightarrow \frac{mv^2}{\sqrt{1-0}(1 + \sqrt{1-0})} = \frac{mv^2}{2}. \end{aligned}$$

Отже, формула для кінетичної енергії в спеціальній теорії відносності за умови, коли швидкість набагато менша за швидкість світла, переходить у вираз для кінетичної енергії ньютонівської механіки: $E_k = mv^2/2$. Це узгоджується з тим, що за швидкостей набагато менших за швидкість світла формули релятивістської механіки повинні переходити у відповідні формули ньютонівської механіки.

§ 49 Енергія спокою. Повна енергія. Взаємозв'язок маси й енергії спокою

1 З'ясуємо, які умови потрібно виконати, щоб закон збереження енергії був інваріантним щодо перетворень Лоренца.

Як показують відповідні розрахунки, збереження енергії виявляється інваріантним тільки в тому випадку, коли припустити, що вільна частинка, крім кінетичної енергії, також має додаткову енергію

$$E_0 = mc^2, \quad (49.1)$$

яка називається **енергією спокою**. Вона являє собою внутрішню енергію частинки.

Тоді сума енергії спокою та кінетичної енергії, яку в релятивістській механіці називають **повною енергією**, буде дорівнювати

$$E = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \right) + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (49.2)$$

Зазначимо, що термін «повна енергія» має в релятивістській механіці інший зміст, ніж у ньютонівській механіці. У ньютонівській механіці повною енергією називається сума кінетичної й потенційної енергій частинки. У релятивістській механіці під повною енергією розуміють суму кінетичної енергії й енергії спокою частинки.

2 Як бачимо ((49.2)), повна енергія визначається лише швидкістю та масою частинки. Релятивістський імпульс частинки також визначається тільки швидкістю та її масою. *Знайдемо зв'язок між повною енергією та імпульсом частинки.*

Порівняємо формулу для релятивістського імпульсу

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

та формулою для повної енергії (49.2). З порівняння випливає, що імпульс і повна енергія частинки пов'язані співвідношенням

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad \text{або} \quad \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p} \cdot c}{E}. \quad (49.3)$$

Підставляємо v/c , який отримали в (49.3), у (49.2) і знаходимо

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-p^2c^2/E^2}} = \frac{mc^2 \cdot E}{\sqrt{E^2 - p^2c^2}}$$

або

$$\boxed{E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4 = inv}. \quad (49.4)$$

Швидкість c і маса m є інваріантами. Отже, і вираз $E^2 - p^2 c^2$ являє собою інваріант, тобто має однакове числове значення у всіх інерціальних системах відліку. У разі переходу від однієї системи відліку до іншої повна енергія й імпульс змінюються, однак числове значення виразу (49.4) залишається однаковим.

3 З формули для енергії спокою (49.1) випливає, що всяка зміна маси тіла Δm супроводжується зміною енергії спокою ΔE_0 , водночас ці зміни пропорційні одна одній

$$\boxed{\Delta E_0 = c^2 \Delta m}. \quad (49.5)$$

Це твердження називають *законом взаємозв'язку маси й енергії спокою* (іноді для стислості говорять просто про енергію).

Взаємозв'язок маси і енергії призводить до того, що сумарна маса частинок, які взаємодіють між собою, не зберігається. Переконаємося в цьому на такому прикладі. Нехай дві однакові частинки масою m , які рухаються з рівними за модулем й протилежно спрямованими швидкостями, мають абсолютно непружне зіткнення, унаслідок якого утвориться нова частинка. Як впливає із закону збереження імпульсу, швидкість цієї нової частинки дорівнює нулю. До зіткнення повна енергія кожної частинки дорівнює $mc^2 / \sqrt{1-v^2/c^2}$. Повна енергія частинки, що утворилась, дорівнює $m'c^2$, де m' – маса нової частинки. Із закону збереження енергії випливає, що $2mc^2 / \sqrt{1-v^2/c^2} = m'c^2$. Звідки

$$m' = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m.$$

Отже, маса частинки, що утворилась, більша за суму мас вихідних частинок. Це обумовлено тим, що кінетична енергія частинок перетворилась в еквівалентну кількість енергії спокою, а це, зі свого боку, привело до зростання маси на $\Delta m = \Delta E_0 / c^2$.

За умови розпаду нерухомої частинки на декілька частинок, що розлітаються в різні боки, спостерігається зворотне явище – сума мас частинок, які утворилися, виявляється

меншою за масу вихідної частинки на величину, яка дорівнює сумарній кінетичній енергії цих частинок, що поділена на c^2 .

В основі роботи атомних електростанцій лежить ланцюгова реакція розподілу ядер урану. Сумарна маса уламків, що утворилися у разі розпаду менше за масу ядра урану. Тому процес розпаду супроводжується зменшенням енергії спокою частинок. Різниця енергій спокою перетворюється в кінетичну енергію уламків і в енергію електромагнітного випромінювання, яке виникає під час розпаду.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛІ В МОЛЕКУЛЯРНІЙ ФІЗИЦІ ТА ТЕРМОДИНАМІЦІ

ТЕМА 8 МАКРОСКОПІЧНИЙ СТАН

§ 50 Статистичний і термодинамічний підходи до вивчення теплових властивостей макроскопічних тіл

Існує два способи опису процесів, що відбуваються в макроскопічних тілах (тобто тілах, що складаються з дуже великої кількості частинок – атомів або молекул), – статистичний і термодинамічний.

1 Статистичною фізикою називається розділ фізики, присвячений вивченню властивостей макроскопічних тіл, на підставі властивостей частинок, які утворюють тіло, і взаємодій між ними.

Макроскопічними називають тіла, що складаються з величезної кількості частинок ($\sim N_A = 6 \cdot 10^{23}$). Здавалося б, що, знаючи положення і швидкість всіх молекул у деякий початковий момент часу, можна за допомогою законів механіки визначити положення й швидкість кожної молекули, а отже, і стан тіла в наступні моменти часу. Однак для такого детального опису частинок, що утворюють макроскопічне тіло, потрібно було б написати, а потім розв'язати величезну кількість рівнянь руху (по три рівняння на кожен частинку). Витрати часу на розв'язання цих рівнянь настільки величезні, що використовувати такий спосіб для дослідження макроскопічних тіл не має сенсу.

Крім нездоланих технічних труднощів, існують фізичні причини, через які розглянутий вище опис руху всіх частинок не можливо здійснити. Річ у тім, що мікроскопічний світ описується не законами ньютонівської механіки, а законами квантової механіки. З погляду квантової механіки «абсолютно» точне одночасне визначення координат і швидкостей молекул є неможливим. Тому початкові значення координат і швидкостей можуть бути визначені лише з похибками. Під час проведення розрахунків ці похибки будуть накопичуватися. Через це розрахунковий результат буде дуже сильно відрізнятися від реального стану речей.

Також потрібно зазначити, що в системах з величезною кількістю частинок виникають принципово нові закономірності, які мають імовірнісний характер і називаються **статистичними**. Саме ці статистичні закономірності і є об'єктом дослідження статистичної фізики. Водночас вона користується ймовірнісними методами й пояснює властивості тіл, які безпосередньо спостерігаються на досліді (такі, наприклад, як тиск і температура), як сумарний, усереднений результат дії частинок макроскопічного тіла.

2 На відміну від статистичної фізики, **термодинаміка** вивчає властивості макроскопічних тіл і процеси, що протікають у них, не конкретизуючи мікроскопічну природу тіл. В основі термодинаміки лежить невелика кількість фундаментальних законів (які називають **принципами термодинаміки**), встановлену за допомогою узагальнення дуже великої кількості дослідних фактів. Через цю причину результати, отримані термодинамікою, мають більш загальний характер ніж результати, отримані статистичною фізикою, тому що не залежать від внутрішнього улаштування тіл.

У статистичної фізики й термодинаміки загальний предмет вивчення – властивості речовин і процеси, що відбуваються в них. Підходячи до вивчення цих властивостей і процесів із різних точок зору, статистична фізика й термодинаміка взаємно доповнюють один одного, створюючи, фактично, єдине ціле.

§ 51 Термодинамічна система. Параметри стану системи. Рівноважні та нерівноважні стани. Термодинамічний процес. Квазістатичний процес

1 Термодинамічною системою називається сукупність макроскопічних тіл, які можуть обмінюватися енергією між собою та зовнішнім середовищем (тобто з іншими тілами). Прикладом може служити рідина і пара, що контактує з нею. Система може складатись і з одного макроскопічного тіла.

Термодинамічна система може перебувати в різних станах, які відрізняються температурою, тиском, об'ємом, густиною й так далі. Подібні величини, що характеризують стан системи як єдиного цілого, називаються **параметрами стану**.

Параметри стану не завжди мають певні значення. Наприклад, у тіла, що підігрівається з одного боку й охолоджується з іншого, температура в різних точках буде різною і йому, як цілому, не можна приписати певне значення температури. Стан, у якому хоча б один із параметрів не має певного значення, називається **нерівноважним**.

Стан термодинамічної системи називають **рівноважним**, коли всі параметри стану мають певні значення, які не змінюються з часом.

Термодинамічні системи, які не обмінюються із зовнішнім середовищем ні енергією, ні речовиною, називаються **ізолюваними** (або замкненими).

2 Термодинамічним процесом називається перехід системи з одного стану в інший. Такий перехід завжди пов'язаний із порушенням рівноваги системи. Наприклад, розглянемо рух поршня, який призводить до зменшення об'єму газу в посудині. В цьому разі газ буде стискуватися й у насамперед підвищиться тиск газу поблизу поршня – рівновага буде порушена. Порушення рівноваги буде тим більшим, чим швидше буде переміщуватися поршень. Якщо рухати поршень дуже повільно, то рівновага порушується незначно й тиск у різних точках мало відрізняється від рівноважного значення, яке відповідає цьому об'єму газу. У разі нескінченно повільного стискання тиск газу в різних точках посудини матиме в кожний момент часу однакове значення. Отже, стан газу весь час буде рівноважним. Отже, *нескінченно повільний процес можна розглядати як такий, що складається з послідовності рівноважних станів. Такий процес називається рівноважним, або квазістатичним.*

Нескінченно повільний процес є абстракцією. Практично можна вважати процес квазістатичним, коли він протікає настільки повільно, що відхиленнями значень параметрів від рівноважних можна знехтувати.

Квазістатичні процеси мають важливу властивість – вони є оборотними. Це означає, що система може перейти у зворотному напрямку через ті самі стани, що й у прямому процесі, й повернутись у вихідний стан, водночас у навколишньому середовищі зміни не відбуваються.

Для реалізації оборотного процесу достатньо нескінченно малої зміни зовнішніх умов.

Якщо вздовж координатних осей відкладати значення будь-яких двох параметрів (наприклад, p і V або p й T тощо), то рівноважний стан системи можна зобразити точкою на координатній площині, а оборотний процес – суцільною лінією. Нерівноважні стани й процеси так зображати не можна, тому що в таких процесах параметри системи не мають певного значення. Необоротні процеси, що протікають між двома рівноважними станами, ми будемо умовно зображувати штриховими лініями.

Процес, при якого система після низки змін вертається у вихідний стан, називається **круговим процесом**, або **циклом**. Круговий цикл зображується на координатній площині замкненою кривою.

§ 52 Температура. Термометр. Загальний (нульовий) закон термодинаміки. Основна властивість температури. Шкала температур Цельсія. Абсолютна температура

1 Одним із основних параметрів стану термодинамічної системи є температура. *Якісно температуру можна визначити як величину, яка характеризує ступінь нагрятості тіл.* Однак кількісна міра ступеня нагрятості, яка була б придатна для наукових досліджень,

не може бути встановлена за допомогою чуттєвого сприйняття, яке для кожної людини є різним.

2 З'ясуємо, як можна кількісно виміряти температуру. Відомо, що від ступеня нагрятості тіла або від температури залежать такі властивості, як, наприклад, об'єм, тиск, електричний опір тощо. Тому за зміною цих властивостей можна визначити кількісно температуру.

Розглянемо влаштування пристрою для вимірювання ступеня нагрятості тіла – термометр. Нехай у запаяній трубці, з якої викачали повітря, ртуть займає деякий об'єм (рис. 52.1). Забезпечимо тепловий контакт термометра з тілом, ступінь нагрятості якого нам потрібно виміряти. Відомо, що об'єм ртуті залежить від ступеня нагрятості тіла. Тому, коли ступінь нагрятості тіла є іншим, ніж у ртуті, то об'єм ртуті буде змінюватися. Почекаємо деякий час поки рівень стовпчика ртуті не перестане зміщуватися. За висотою рівня ртуті можемо визначити кількісно ступінь нагрятості досліджуваного тіла. Отже, за висотою ртутного стовпчика



можемо аналізувати ступінь нагрятості тіла або температуру кількісно. Зрозуміло, що влаштування термометрів може бути й іншим.

3 Розглянемо дослід. Візьмемо два тіла, температури яких різні (наприклад, за оцінкою висоти стовпчика ртуті у приладі, який описано вище). Будемо вважати, що вони утворюють ізольовану систему тіл. Отже, два тіла в ізольованій системі мають тепловий контакт тільки один з одним. Дослід доводить, що одне тіло буде нагріватися, а інше охолоджуватися, поки в системі не припиняться будь-які макроскопічні зміни. Стан, у якому припиняються макроскопічні процеси, характеризується однаковою температурою обох тіл. Тоді, застосовуючи термінологію, запозичену з механіки, стверджують, що ці два тіла будуть перебувати в термодинамічній рівновазі один з одним. Термодинамічна рівновага, як показує дослід, зрештою настає не тільки в разі теплового контакту двох, але й у разі контакту кількох загодно тіл.

Узагальнимо результати подібних експериментів: *яким би не був початковий стан тіл ізольованої системи, у ній зрештою встановиться термодинамічна рівновага, яка характеризується припиненням усіх макроскопічних процесів і яка характеризується однаковою температурою у всіх частинах системи.* Це положення відіграє важливу роль у термодинаміці і є в ній постулатом, який іноді називають **загальним принципом (законом) термодинаміки.**

З вищеописаних експериментів випливає **основна властивість температури:** у стані теплової рівноваги температура у всіх частинах системи має одне і те саме значення.

Отже, **температура є параметром системи, який у стані термодинамічної рівноваги має одне і те саме значення у всіх частинах системи.**

4 Температуру можна вимірювати за допомогою **шкали Цельсія.** У цьому разі температуру льоду, який тане, беруть за таку, що дорівнює $0^{\circ}C$, температуру води, яка кипить, такою, що дорівнює $100^{\circ}C$. Температура у проміжному стані визначається формулою

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100, \quad (52.1)$$

де V – об'єм у проміжному стані, наприклад, ртуті у приладі, який описано вище; V_0 – об'єм, за температури $0^{\circ}C$; V_{100} – об'єм, за температури $100^{\circ}C$.

Коли температуру льоду, який тане, взяти за $32^{\circ}F$, а температуру води, яка кипить за $212^{\circ}F$, то отримуємо **шкалу Фаренгейта.**

У фізиці є дуже зручною і нею часто користуються абсолютна шкала температур. Ця температура вимірюється в градусах Кельвіна ($^{\circ}\text{K}$). **Абсолютна температура пов'язана з температурою за шкалою Цельсія співвідношенням**

$$T = t + 273,15. \quad (52.2)$$

З цього співвідношення випливає, що *один градус Кельвіна дорівнює одному градусу Цельсія, початок шкали температури Цельсія і абсолютної температури зміщено на 273,15 градусів.*

Пізніше ми покажемо, що абсолютна температура є величиною, яка прямо пропорційна середній кінетичній енергії поступального руху молекул речовини. У цьому полягає молекулярно-кінетичний зміст абсолютної температури.

§ 53 Основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини. Броунівський рух

1 Вчення про будову речовини лежить в основі всіх природничих наук. Воно дає ключ до розуміння найрізноманітніших явищ природи.

Сучасним ученням про будову речовини є молекулярно-кінетична теорія. **Сутність молекулярно-кінетичної теорії будови речовини зводиться до таких основних положень:**

1. *Усі тіла складаються з частинок, які називають атомами (молекулами).*
2. *Атоми (молекули) в тілах перебувають у стані безперервного хаотичного руху, інтенсивність якого залежить від температури тіла. Такий рух молекул називають тепловим.*
3. *Молекули речовини взаємодіють між собою.*

2 Ідея про атомістичну будову речовини була висловлена ще стародавніми греками. Однак у стародавніх греків ця ідея була всього лише геніальним здогадом. У XVII столітті уявлення про молекулярну природу речовини відроджується знову, але вже не як здогад, а як наукова гіпотеза.

Атомістична будова речовини яскраво відображається в законі кратних відношень у хімічних сполуках. У сучасній фізиці методами рентгеноструктурного аналізу та за допомогою електронного мікроскопа можна не тільки отримувати наочні відображення молекулярної будови речовини, але і розрізняти структуру молекул.

3 Атоми і молекули в тілах перебувають у стані безперервного хаотичного руху. Тепловим рухом частинок обумовлено явища дифузії, внутрішнього тертя, теплопровідності, тиску газу, броунівського руху. Дифузія – це явище самодовільного проникнення однієї речовини в іншу. Дуже швидко дифундують гази. Внесена в кімнату пахуча речовина за короткий час відчувається в усіх куточках кімнати. Це явище відбувається завдяки тепловому хаотичному руху молекул.

Рух молекул яскраво підтверджує *броунівський рух*. Спостерігаючи в мікроскоп за дрібними мікроскопічними частинками (наприклад, спорами лікоподію або частинками фарби), які перебувають у зваженому стані в рідині, можна побачити, що вони весь час перебувають у безперервному хаотичному русі. Уперше такий рух виявив Броун у 1827 р., тому такий рух названо його ім'ям. Дослідив і пояснив броунівський рух французький фізик Ж. Перрен. Позначаючи положення окремих частинок через кожні 30 с, він створив картину

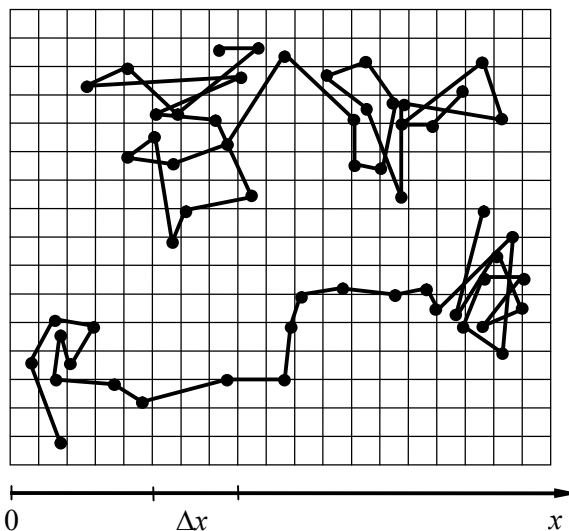


Рисунок 53.1

траєкторій їхніх рухів (рис. 53.1). Спостереження й підрахунки довели, що з підвищенням температури броунівський рух стає інтенсивнішим, він є результатом хаотичних ударів молекул у броунівську частинку.

Отже, сутність броунівського руху полягає в тому, що досить малі (видимі тільки в мікроскоп), зважені в рідині, макроскопічні тверді частинки завжди перебувають у стані безперервного хаотичного руху, що не залежить від зовнішніх причин і який обумовлено молекулярним рухом у речовині, – рух зважених частинок відбувається під впливом хаотичних ударів молекул рідини.

4 Між молекулами речовини одночасно проявляються сили взаємного притягання (зчеплення) і сили взаємного відштовхування. Сили притягання між молекулами обумовлюють міцність тіл на розрив, явища прилипання, змочування, утворення крапель і плівок. Ці сили проявляються на відстані 10^{-9} м. Сили відштовхування між молекулами легко проявляються в деформаціях стиснення твердих тіл і рідин. Виникнення цих сил у наслідок зближення молекул обумовлено переважно електростатичним відштовхуванням.

5 Для характеристики кількості речовини з погляду атомарної будови речовини використовують таку одиницю як моль. У системі СІ моль є основною одиницею. Згідно з визначенням **молем** називають таку кількість речовини, у якій міститься стільки частинок, скільки атомів є в $0,012$ кг ^{12}C (нукліда вуглецю атомною масою 12).

Число частинок, що містяться в молі речовини, називається **сталою Авогадро**. Дослідним шляхом знайдено, що ця стала дорівнює

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (53.1)$$

Отже, у молі заліза міститься N_A атомів заліза, у молі води міститься N_A молекул води тощо.

Масу моля речовини позначають буквою μ й називають **молярною масою**. Вона дорівнює добутку постійної Авогадро на масу молекули

$$\mu = N_A m_{\text{молекули}}. \quad (53.2)$$

6 З'ясуємо, чому дорівнює маса молекули речовини. Знайдемо, наприклад, масу молекули (атому) вуглецю ^{12}C . Його молярна маса дорівнює $0,012$ кг/моль. Використаємо формулу (53.2) й отримаємо

$$m_{\text{молекули,C}} = \mu_C / N_A \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Маса інших молекул має такий самий порядок.

Отримавши уявлення про масу молекул, проведемо оцінку їхніх розмірів. Природно припустити, що в рідинах і твердих тілах молекули розміщуються «впритул» одна до одної. Тому наближену оцінку об'єму молекули можна отримати, розділивши об'єм моля рідини на число молекул у молі, тобто на постійну Авогадро N_A . Найпростіше це зробити для води. Відомо, що моль (тобто 18 г) води займає об'єм $18 \text{ см}^3/\text{моль} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$. Отже, на одну молекулу води припадає об'єм, що дорівнює

$$\frac{18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Звідси випливає, що лінійні розміри молекул води приблизно такі, що дорівнюють

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3 \text{ нм}.$$

Молекули інших простих речовин мають розміри такого самого порядку.

§ 54 Рівняння стану термодинамічної системи. Рівняння стану ідеального газу як результат узагальнення експериментальних досліджень

1 Параметри стану термодинамічної системи пов'язані один з одним. *Співвідношення, яке визначає зв'язок між параметрами стану тіла, називається рівнянням стану цього тіла.*

У найпростішому випадку рівноважний стан тіла визначається значеннями трьох параметрів: тиску p , об'єму V й температури T (масу тіла вважають відомою). Зв'язок між цими параметрами може бути виражений формулою

$$F(p, V, T) = 0, \quad (54.1)$$

де $F(p, V, T)$ – деяка функція параметрів. Рівняння (54.1) і є рівнянням стану даного тіла.

Рівняння стану в термодинаміці встановлюються експериментально і відіграють важливу роль для опису властивостей речовин (чи це твердий, рідкий або газоподібний стан).

2 Розглянемо рівняння стану ідеального газу. *Ідеальним газом називають такий газ, взаємодією між молекулами якого можна знехтувати (між молекулами відбуваються лише короточасні зіткнення, які мають пружний характер).*

Дослідним шляхом було встановлено, що за звичайних умов (тобто за кімнатної температури й нормального атмосферного тиску) параметри стану таких газів, як кисень і азот досить добре описує рівняння

$$\boxed{\frac{pV}{T} = b}, \quad (54.3)$$

де b – константа, яка пропорційна масі газу. Виявилось також, що чим більш розріджений газ (чим менше його густина), тим точніше виконується це рівняння. Рівняння (54.3) отримало назву *рівняння Клапейрона*.

Згідно з *законом Авогадро* за нормальних умов, тобто за температури 0°C ($273,15^\circ\text{K}$) і тиску в одну атмосферу ($1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$), об'єм одного моля будь-якого газу дорівнює $22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Звідси випливає, що у випадку, коли кількість газу дорівнює одному молю, константа b у рівнянні (54.3) буде однаковою для всіх газів. Позначивши константу b для одного моля буквою R , напишемо рівняння стану ідеального газу у вигляді

$$pV_\mu = RT. \quad (54.4)$$

Індекс « μ » біля V вказує на те, що йде мова про об'єм одного моля газу (молярний об'єм). Константа R називається *газовою сталою*. Відповідно до закону Авогадро

$$R = \frac{pV_\mu}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{°K)}. \quad (54.5)$$

Щоб отримати рівняння стану для довільної маси m ідеального газу, помножимо обидві частини рівняння (54.4) на відношення m/μ де μ – молярна маса газу

$$p \frac{mV_\mu}{\mu} = \frac{m}{\mu} RT.$$

За однакових p і T газ маси m буде займати об'єм V у m/μ раз більший, ніж V_μ , тому $mV_\mu/\mu = V$. Отже, ми приходимо до рівняння

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT}, \quad (54.6)$$

яке називають *рівнянням Менделєєва – Клапейрона*.

Помножимо й розділимо праву частину рівняння (54.6) на сталу Авогадро N_A

$$pV = \frac{m}{\mu} N_A \frac{R}{N_A} T = N \frac{R}{N_A} T. \quad (54.7)$$

Тут $N = (m/\mu)N_A$ – число молекул, які містяться в масі m газу. Величина

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/^\circ\text{К} \quad (54.8)$$

називається **сталюю Больцмана**.

З урахуванням (54.8) рівнянню (54.7) можна надати вигляду

$$pV = NkT. \quad (54.9)$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на об'єм газу V . Відношення N/V дає число молекул в одиниці об'єму газу, яке ми будемо позначати буквою n й називати **концентрацією молекул**. Отже,

$$\boxed{p = nkT}. \quad (54.10)$$

Рівняння (54.3), (54.6) і (54.10) являють собою різні форми запису рівняння стану ідеального газу.

§ 55 Барометрична формула

1 Відомо, що атмосферний тиск зменшується з висотою. Знайдемо функцію $p(h)$, яка описує залежність тиску від висоти та отримаємо ще одне рівняння стану.

Розглянемо уявно в атмосфері вертикальний стовп із площею поперечного перерізу S (рис. 55.1). Виділимо малий об'єм повітря $dV = Sdh$ в цьому стовпі висотою dh , який розміщено на висоті h . Маса об'єму дорівнює $dm = \rho dV$, де ρ – густина повітря в об'ємі на висоті h .

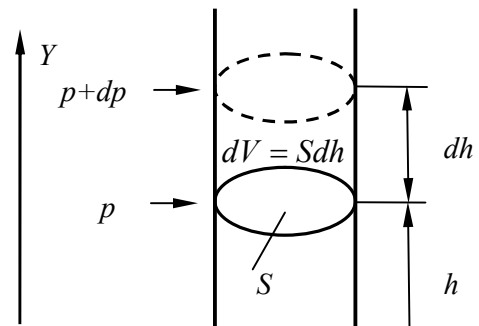


Рисунок 55.1

Проекції на вертикальну вісь Y сил, що діють на цей об'єм такі: $F_{1y} = +pS$ – проекція сили з боку нижніх шарів повітря (p – тиск на висоті h), $F_{2y} = -(p + dp)S$ – проекція сили тиску з боку верхніх шарів повітря ($p + dp$ – тиск на висоті $h + dh$), $F_{тяж,y} = -dmg$ – проекція сили тяжіння повітря досліджуваного об'єму. Зрозуміло, що виділений об'єм повітря перебуває в стані рівноваги. Це означає, що рівнодійна сила, яка діє на цей об'єм, дорівнює нулю

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{тяж,y} = 0$$

або

$$+pS - (p + dp)S - dm g = +pS - (p + dp)S - \rho S dh g = 0.$$

Звідси отримуємо

$$-dp = \rho g dh. \quad (55.1)$$

За умови, близьких до нормальних (тобто за тисків порядку атмосфери й температур, близьких до 0°C), повітря досить добре задовольняє рівняння Менделєєва – Клапейрона. З цього рівняння випливає, що густина ідеального газу, тобто маса одиниці об'єму, дорівнює

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}. \quad (55.2)$$

Підстановка цього виразу у формулу (55.1) призводить до рівняння

$$dp = -\frac{\mu p g}{RT} dh. \quad (55.3)$$

Тут під μ йдеться про молярну масу повітря. Розділивши змінні, прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (55.4)$$

Щоб проінтегрувати це рівняння, потрібно знати, як змінюється з висотою температура, тобто визначити вид функції $T = T(h)$ (залежністю g від h можна знехтувати).

Для ізотермічної атмосфери, тобто для випадку, коли температура з висотою не змінюється, інтегрування рівняння (55.4) призводить до співвідношення

$$\ln p = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln C$$

(маючи на увазі подальші перетворення, ми позначили постійну інтегрування через $\ln C$). Потенціюючи це співвідношення, прийдемо до формули

$$p = C \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right).$$

Поклавши $h = 0$, отримаємо, що $C = p_0$, де p_0 – атмосферний тиск на висоті, яка взята за початок відліку висоти h .

Отже, для ізотермічної атмосфери залежність тиску від висоти описує формула

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \quad (55.5)$$

яка називається **барометричною формулою**.

Дійсно, температура атмосфери помітно змінюється з висотою, досягаючи на висоті 10 км значень, на кілька десятків кельвін менших, ніж на поверхні Землі. Однак відносна зміна температури (порівняно з температурою, яка дорівнює приблизно 300 °К) з висотою не дуже велика, унаслідок чого формула (55.5) дозволяє визначити досить точно висоту, вимірюючи тиск. Призначений для цієї мети, проградуїований у значеннях висоти барометр називається альтиметром. Такі висотоміри встановлюють, зокрема, на літаках.

§ 56 Тиск ідеального газу з погляду молекулярно-кінетичної теорії

1 Тиск газу на стінку посудини є результатом ударів молекул газу об цю стінку. Під час кожного удару молекула газу діє на стінку з певною малою силою. Коли кількість молекул у посудині дуже велика, то буде великим і число їхніх ударів об стінку посудини. Одночасно об стінку посудини вдаряється величезна кількість молекул. Нескінченно малі сили окремих ударів складаються в кінцеву й майже постійну силу, яка діє на стінку. Ця сила, усереднена за часом, і є тиском газу, з яким працює макроскопічна фізика.

2 Обчислимо тиск газу на стінку посудини. Нехай газ поміщено в закриту посудину і всі молекули однакові. Ці молекули рухаються з різними швидкостями, які відрізняються одна від одної як за величиною, так і за напрямком. Розділимо всі молекули на групи так, щоб молекули однієї й тієї самої групи в розглянутий момент часу мали приблизно однакові за величиною й за напрямком швидкості. Швидкість молекул i -ї групи позначимо через \vec{v}_i , а число таких молекул в одиниці об'єму – через n_i . Розглянемо на стінці посудини малу поверхню площею ΔS (рис. 56.1). Якщо молекули

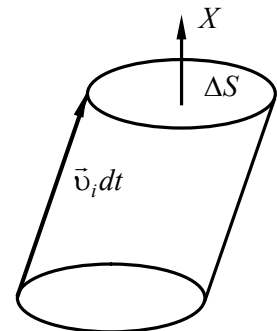


Рисунок 56.1

рухаються в напрямку до цієї поверхні, то вони можуть зіштовхнутися з нею. Якщо ж вони рухаються від цієї поверхні, то зіткнень не буде. Припустимо, що молекули i -ї групи рухаються в напрямку до площі ΔS , і обчислимо число z_i молекул такої групи, що вдаряються об цю площу за малий час dt . Побудуємо на площі ΔS , як на основі, косий циліндр із твірними $\bar{v}_i dt$, розміщений усередині посудини. Будь-яка молекула i -ї групи, що міститься в цьому циліндрі, за час dt встигне досягти поверхні площею ΔS і вдаритися об неї. Тому число ударів z_i буде дорівнювати числу молекул i -ї групи всередині побудованого циліндра, тобто $z_i = n_i dV$, де dV – об’єм циліндра. Спрямуємо координатну вісь X уздовж зовнішньої нормалі до площі ΔS . Тоді висота циліндра буде дорівнювати $v_{ix} dt$, а його об’єм $dV = \Delta S \cdot v_{ix} dt$. Отже,

$$z_i = \Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} dt.$$

Подальший хід обчислень залежить від характеру взаємодії молекул, що вдаряються, зі стінкою. Звичайно під час обчислень вважають, що стінка гладка, а молекули під час удару відбиваються від її дзеркально, тобто за законами удару ідеально пружних куль: абсолютна величина швидкості під час відбиття не змінюється, кут падіння дорівнює куту відбиття. Потім доводять, що ці припущення не є істотними. Однак, дійсно, стінка посудини для молекули, що вдаряється, не може бути ідеальним дзеркалом, адже вона сама складається з молекул. Завдяки цьому молекули i -ї групи після відбиття матимуть, точно кажучи, найрізноманітніші за величиною й напрямком швидкості, спрямовані від стінки, і розподіляться за різними швидкісними групами. Тому ми проведемо подальші обчислення, не вводячи жодних спеціальних припущень щодо законів відбиття молекул від стінки посудини. Єдине припущення, що буде використано в обчисленнях, полягає в тому, що *в разі відбиття від стінки молекула в середньому не втрачає й не отримує кінетичну енергію*. Надалі буде доведено, що це припущення означає, що *температура газу дорівнює температурі стінки*. Для спрощення обчислення процес взаємодії молекули зі стінкою зручно уявно розбити на два етапи. На першому етапі молекула вповільнюється й зупиняється, ніби прилипаючи до стінки. На другому етапі молекула відштовхується стінкою, прискорюється й відскакує від неї. Обчислимо спочатку силу \vec{F}_1 , що діяла б на площу ΔS із боку газу, якби весь процес взаємодії молекул газу зі стінкою обмежувався тільки першим етапом, тобто у припущенні, що після ударів молекули газу ніби прилипають до стінки. Молекули i -ї групи, що вдарилися об площу ΔS за час dt , до удару мали імпульс $z_i(m\bar{v}_i) = \Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\bar{v}_i) \cdot dt$, де $m\bar{v}_i$ – імпульс однієї молекули. Щоб зупинити ці молекули, стінка повинна діяти на них із силою \vec{f}'_i , яка дорівнює $\vec{f}'_i = (0 - z_i(m\bar{v}_i)) / dt = -\Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\bar{v}_i)$. Використавши 3-й закон Ньютона, знайдемо силу $\vec{f}_i = -\vec{f}'_i = \Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\bar{v}_i)$, з якої діють на площу ΔS молекули i -ї групи на першому етапі. Сила \vec{F}_1 , що діє на цю площину з боку всього газу, буде знайдена підсумовуванням цих виразів за усіма групами молекул, що летять у напрямку до стінки (для них $v_{ix} > 0$), тобто

$$\vec{F}_1 = \sum_{v_{ix} > 0} \Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\bar{v}_i).$$

До сили \vec{F}_1 потрібно додати силу \vec{F}_2 , що діє на площу ΔS на другому етапі. Силу \vec{F}_2 знаходять аналогічно. Вона створюється молекулами, що летять від площини ΔS , тобто молекули, для яких $v_{ix} < 0$,

$$\vec{F}_2 = \sum_{v_{ix} < 0} \Delta S \cdot n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\bar{v}_i).$$

Поділ взаємодії на два етапи є тільки штучним обчислювальним прийомом. Насправді сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 діють одночасно і складаються в одну результуючу силу

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \Delta S \sum n_i \cdot v_{ix} \cdot (m\vec{v}_i).$$

Тут підсумовування виконується вже за всіма групами молекул, що летять як до стінки, так і від неї.

Сила \vec{F} спрямована нормально до поверхні площею ΔS . Це є наслідком хаотичності теплового руху молекул. Дійсно, складова сили \vec{F} у напрямку осі Y дорівнює

$$F_y = \Delta S \sum n_i \cdot v_{ix} \cdot (mv_{iy}).$$

Через хаотичність теплового руху серед доданків, що входять до суми, буде приблизно стільки ж додатних членів, скільки й від'ємних. У середньому додатні доданки будуть скомпенсовані від'ємними, так що сума буде дорівнювати нулю. Те ж саме є справедливим і для складової F_z . Цього не буде тільки для нормальної складової F_x

$$F_x = \Delta S \sum n_i \cdot v_{ix} \cdot (mv_{ix}),$$

усі члени якої додатні, тому що знаки проєкцій v_{ix} і mv_{ix} завжди однакові. Розділивши складову F_x на площу ΔS , отримуємо тиск газу на стінку посудини

$$p = m \sum n_i \cdot v_{ix}^2.$$

Цей вираз можна спростити, якщо ввести середнє значення v_x^2 . Сума квадратів проєкцій v_{ix} для молекул газу, що містяться в одиниці об'єму, дорівнює $\sum n_i \cdot v_{ix}^2$. Щоб знайти середнє, треба цю суму розділити на загальне число молекул n в одиниці об'єму. Це дає

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum n_i \cdot v_{ix}^2 \quad (56.1)$$

(кутові дужки означають усереднення за сукупністю всіх молекул). Тиск p тепер можна подати у вигляді

$$p = nm \langle v_x^2 \rangle. \quad (56.2)$$

За визначенням скалярного добутку

$$\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z.$$

Усереднюючи це співвідношення, отримуємо

$$\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = \langle v_x v_x \rangle + \langle v_y v_y \rangle + \langle v_z v_z \rangle.$$

За хаотичного руху, яким є тепловий рух молекул газу, усі напрямки швидкостей молекул рівноймовірні, тому

$$\langle v_x v_x \rangle = \langle v_y v_y \rangle = \langle v_z v_z \rangle. \quad (56.3)$$

Це дає

$$\boxed{p = \frac{1}{3} nm \langle \vec{v}^2 \rangle}. \quad (56.4)$$

Під час доведення цих формул молекули розглядалися як *безструктурні матеріальні точки*. Не брали до уваги обертання молекул, а також внутрішньомолекулярний рух. При зіткненні можуть мінятися швидкості обертання молекул. Молекула може перейти у збуджений стан або зі збудженого стану повернутися в нормальний. Але всі ці процеси не відіграють ролі, коли мова йде про обчислення тиску газу. Істотною є тільки зміна *поступального імпульсу молекули* в разі зіткнення її зі стінкою. Воно дорівнює масі молекули, помноженої на зміну швидкості її центра мас. Тому формула (56.4) залишається

правильною і в разі, коли молекула не є безструктурною матеріальною точкою. Тут тільки треба вважати v швидкістю поступального руху молекули (точніше, її центра мас). Тоді формулі (56.4) можна надати вигляду

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle, \quad (56.5)$$

де $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = m \langle v^2 \rangle / 2$ – середнє значення кінетичної енергії поступального руху молекули газу.

Формули (56.4) і (56.5) розв’язують поставлене завдання цього параграфу про знаходження тиску газу з погляду молекулярно-кінетичної теорії.

§ 57 Молекулярно-кінетичний зміст абсолютної температури

1 Порівняємо вирази для тиску ідеального газу та для тиску газу з погляду молекулярно-кінетичної теорії

$$p = nkT \quad \text{і} \quad p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle,$$

де $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = m \langle v^2 \rangle / 2$ – середнє значення кінетичної енергії поступального руху однієї молекули газу.

Звідси випливає, що

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (57.1)$$

Стає зрозумілим **молекулярно-кінетичний зміст температури**: абсолютна (термодинамічна) температура є величина, яка пропорційна середній енергії поступального руху молекули газу. Відзначимо, що поступально рухаються тільки молекули газу. Рух молекул у рідких і твердих тілах має інший характер (про цей рух буде йти мова надалі). Також потрібно сказати, що температура є характеристикою макроскопічної системи, тобто такої, що складається з величезної кількості частинок.

Істотно, що середня енергія молекул залежить тільки від температури й не залежить від маси молекули.

2 Розглянемо суміш двох різних газів, яка перебуває у стані теплової рівноваги з деякою температурою T . Тоді для середніх енергій молекул цих різних газів можемо записати

$$\langle \varepsilon_{1,\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT_1 = \frac{3}{2} kT, \quad \langle \varepsilon_{2,\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT_2 = \frac{3}{2} kT.$$

Тобто

$$\langle \varepsilon_{1,\text{пост}} \rangle = \langle \varepsilon_{2,\text{пост}} \rangle.$$

Отже, середня кінетична енергія поступального руху молекул газу задовольняє основну властивість температури – у стані теплової рівноваги вона однакова для всіх молекул газу, які перебувають у тепловому контакті. З цього випливає, що середню кінетичну енергію поступального руху молекул газу можна використовувати в якості температури.

3 Подамо $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ у вигляді $\langle m v^2 / 2 \rangle = m \langle v^2 \rangle / 2$. Тоді можна отримати зі співвідношення (57.1) вираз для середнього значення квадрата швидкості молекули

$$\langle v^2 \rangle = 3kT / m. \quad (57.2)$$

Корінь квадратний із цієї величини називається **середньоквадратичною швидкістю молекул**

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}. \quad (57.3)$$

Проведемо оцінку середньоквадратичної швидкості молекули кисню за кімнатної температури $T = 300\text{K}$: $v_{\text{ср.кв.}, O_2} \approx 500$ м/с.

§ 58 Ступені вільності механічної системи. Теорема про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності. Середня енергія молекули

1 Двох- і багатоатомні молекули, крім поступального, можуть виконувати також обертальні й коливальні рухи. Усі ці види руху пов'язані з деяким запасом енергії. Поставимо перед собою завдання *знайти повну середню енергію молекули, яка враховує поступальний, обертальний і коливальний рухи молекули.*

2 Спочатку розглянемо поняття числа ступенів вільності механічної системи. **Числом ступенів вільності механічної системи** називається кількість незалежних величин, за допомогою яких може бути задане положення системи в просторі. Розглянемо приклади.

Положення *матеріальної точки* визначається значеннями трьох її координат, наприклад, декартових координат x, y, z або сферичних координат r, ϑ, φ тощо. Відповідно до цього *матеріальна точка має три ступені вільності.*

Положення *абсолютно твердого тіла* можна визначити за допомогою координат x, y, z його центра мас і кутів ϑ, φ, ψ тіла, що вказують на його орієнтацію у просторі. Отже, *абсолютно тверде тіло має шість ступенів вільності.* За поступального руху тіла змінюються тільки координати центра мас, у той час як кути ϑ, φ, ψ залишаються незмінними. Тому відповідні ступені вільності називаються **поступальними**. Зміни кутів ϑ, φ, ψ за нерухомого центру мас обумовлюються обертанням тіла, у зв'язку з чим відповідні ступені вільності називаються **обертальними**. Отже, *із шести ступенів вільності абсолютно твердого тіла три є поступальними і три обертальними.*

Тепер розглянемо молекулу, що складається з двох атомів, які пов'язані один з одним жорстким зв'язком (рис. 58.1). Це означає, що відстані між атомами не змінюються. Продемонструємо, що в цьому разі число ступенів вільності дорівнює п'яти. Дійсно, кожний атом такої двоатомної молекули визначається за допомогою трьох координат $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ — шість величин). З іншого боку жорсткий зв'язок, що обумовлює незмінну відстань між двома атомами, зменшує число ступенів вільності на одиницю. Це впливає з того, що координати атомів не є незалежними і пов'язані співвідношенням

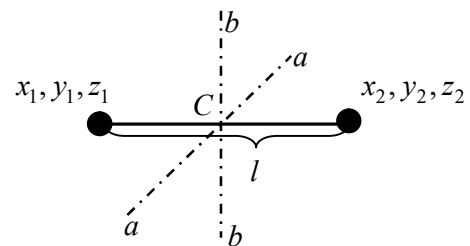


Рисунок 58.1

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2. \quad (58.1)$$

Тому, щоб визначити положення системи, досить задати п'ять координат, шосту отримуємо із умови (58.1).

Щоб класифікувати ступені вільності такої системи, урахуємо, що її положення в просторі можна визначити, задавши, наприклад, координати x, y, z центра мас системи й кути ϑ, φ , що визначають напрямок у просторі прямої l . Отже, три ступені вільності будуть поступальними й дві обертальними. Останні відповідають обертанням навколо, взаємно перпендикулярних осей aa і bb , перпендикулярних до осі системи з двох атомів (рис. 58.1). Обертання двох матеріальних точок навколо їхньої осі симетрії позбавлено змісту.

Якщо два атоми пов'язані так, що між ними діє квазіпружнє сила (тобто сила, подібна до такої, що виникає в розтягнутій або стиснутій пружині), яка дорівнює нулю за деякої рівноважної відстані l_0 між точками, то число ступенів вільності буде дорівнювати шести. Положення такої системи можна визначити, задавши три координати центра мас, кути ϑ, φ , що визначають орієнтацію осі системи в просторі, і відстань l між точками. Зміну l обумовлено коливаннями в системі, у зв'язку із чим ступінь вільності, що відповідає зміні l , називають *коливальною*. Отже, молекула з двома атомами, які пов'язані пружним зв'язком, має три поступальні, два обертальні та одну коливальну ступені вільності.

3 З'ясуємо, яка середня кінетична енергія припадає на одну ступінь вільності молекули. Як відомо, середня кінетична енергія поступального руху молекули дорівнює $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = 3kT/2$. У будь-якої молекули є три поступальні ступені вільності. Це означає, що на один ступінь вільності молекули припадає кінетична енергія, що дорівнює $(3kT/2):3 = kT/2$.

Цей результат не випадковий. Виявляється, що є *теорема про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності*: на кожний ступінь вільності (поступальний, обертальний і коливальний) у середньому припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює $kT/2$.

4 Знайдемо повну середню енергію молекули. Вважаємо, що нам відома кількість поступальних ступенів вільності ($i_{\text{пост}}$ завжди дорівнює 3), обертальних ступенів вільності ($i_{\text{оберт}}$), коливальних ступенів вільності ($i_{\text{кол}}$).

На кожну з цих ступенів вільності згідно з теоремою про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності припадає одна і та сама кінетична енергія, що дорівнює $kT/2$. Це означає, що кінетична енергія молекули буде дорівнювати $\langle \epsilon_{\text{кін}} \rangle = (i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + i_{\text{кол}}) \cdot kT/2$. Однак у молекулі, у якій відбуваються коливання, крім кінетичної, є також і потенціальна енергія. У вченні про коливання доводять, що середні значення кінетичної й потенційної енергій системи, у якій відбуваються гармонічні коливання, однакові. Це означає, що потенціальна енергія коливального руху в молекулі дорівнює кінетичній енергії коливального руху. Тобто $\langle \epsilon_{\text{пот}} \rangle = (i_{\text{кол}}) \cdot kT/2$. Тоді повна середня енергія молекули біде дорівнювати

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{\text{кін}} \rangle + \langle \epsilon_{\text{пот}} \rangle = (i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + i_{\text{кол}}) \cdot kT/2 + (i_{\text{кол}}) \cdot kT/2 = (i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2 \cdot i_{\text{кол}}) \cdot kT/2.$$

Отже, середня енергія молекули визначається співвідношенням

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (58.2)$$

де

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2 \cdot i_{\text{кол}} \quad (58.3)$$

є сумою поступальних, обертальних та подвоєного числа коливальних ступенів вільності молекули.

Нагадаємо, що закон рівнорозподілу отримано на основі класичних уявлень про характер руху молекул. Тому він є наближенням і не виконується у тих випадках, коли стають істотними квантові ефекти.

ТЕМА 9 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

§ 59 Внутрішня енергія термодинамічної системи

1 Внутрішньою енергією називають повну енергію тіла за винятком кінетичної енергії тіла як цілого і потенціальної енергії тіла в зовнішньому полі сил. Отже, внутрішня

енергія складається з кінетичної енергії хаотичного руху молекул, потенціальної енергії взаємодії між ними і внутрішньомолекулярної енергії.

У термодинамічній формулі входить не сама енергія, а її зміна, пов'язана зі зміною деякого параметра. Тому внутрішню енергію можна визначити з точністю до довільної адитивної сталої, вибираючи її так, щоб вираз для енергії був простим. Так, зазвичай вивчають процеси, за яких внутрішньомолекулярна енергія залишається постійною. Тому цю енергію у внутрішній енергії можна не враховувати.

Внутрішня енергія системи тіл складається із внутрішньої енергії кожного з окремих тіл й енергії взаємодії між тілами. Остання являє собою енергію взаємодії в тонкому шарі на границі між тілами. Вона є малою порівняно з енергією окремих макроскопічних тіл. Тому нею можна знехтувати і вважати, що внутрішня енергія системи макроскопічних тіл дорівнює сумі внутрішніх енергій цих окремих тіл. Отже, внутрішня енергія є величиною адитивною.

Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що незалежно від попередньої історії системи її енергія в цьому стані має визначені йому значення. Тому збільшення внутрішньої енергії у разі переходу системи з одного стану в інший завжди дорівнює різниці значень внутрішньої енергії в кінцевому і початковому станах незалежно від шляху (процесу), за яким відбувався перехід системи з одного стану в інший.

§ 60 Робота, що виконується тілом в разі зміни його об'єму

1 Розглянемо газ у циліндрі з поршнем (рис. 60.1). Знайдемо нескінченно малу або елементарну роботу δA , виконану газом за нескінченно малого квазістатичного розширення, у якому його об'єм збільшується на dV . Сила тиску газу на поршень дорівнює $F = pS$, де S – площа поршня. Якщо поршень переміститься на відстань dx , то газ виконає роботу $\delta A = F \cdot dx = pS \cdot dx$ або

$$\boxed{\delta A = p \cdot dV}, \quad (60.1)$$

тому що збільшення об'єму дорівнює $dV = S \cdot dx$.

Вираз (60.1) є справедливим і загалом за квазістатичної зміни об'єму будь-якого тіла, що перебуває під постійним зовнішнім тиском. Потрібно підкреслити, що величина (60.1) є алгебраїчною. За розширення тіла збільшення об'єму dV є додатним, відповідно, додатна й δA . У разі стиснення тіла dV є від'ємним, відповідно, від'ємна й δA .

2 Формула (60.1) визначає елементарну роботу, виконану газом за нескінченно малого збільшення об'єму. Роботу, виконану за скінченних змін об'єму, обчислюють підсумовуванням елементарних робіт, тобто інтегруванням

$$\boxed{A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV}, \quad (60.2)$$

де A_{12} – робота, виконана тілом за квазістатичної зміни об'єму тіла від значення V_1 до значення V_2 . Зазначимо, що таке обчислення можливе тільки тоді, коли тиск є певною функцією об'єму V . Тим часом, відповідно до рівняння стану, p залежить не тільки від об'єму V , але й від температури T . Змінюючи неоднаково в ході процесу температуру, можна квазістатично перевести систему з початкового стану в кінцевий різними способами. Кожному з цих способів відповідає своя функція $p = p(V)$ і своє значення інтеграла у формулі (60.2). Отже, робота A_{12} не визначається початковим і кінцевим станами системи. Її величина залежить також і від способу переходу системи з початкового стану

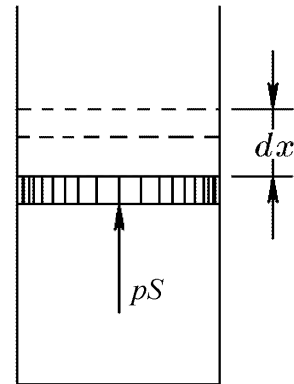


Рисунок 60.1

в кінцевий. Про такі величини говорять, що вони не є функціями стану. Навпаки, величини, що мають цілком певні значення в кожному стані системи, називаються функціями стану. Функціями стану є, наприклад, температура системи за термодинамічної рівноваги, внутрішня енергія. Саме тому елементарну роботу позначають через δA , тоді як, наприклад, елементарну зміну внутрішньої енергії позначають через dU .

3 Квазістатичний процес зміни об'єму тіла можна зобразити на діаграмі p, V (рис. 60.2). Елементарна робота $\delta A = p \cdot dV$ чисельно дорівнює площі заштрихованої смужки. Тоді роботу, яку виконує тіло за умови зміни його об'єму від значення V_1 до значення V_2 буде чисельно дорівнювати площі фігури, яка обмежена віссю V , кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 і V_2 .

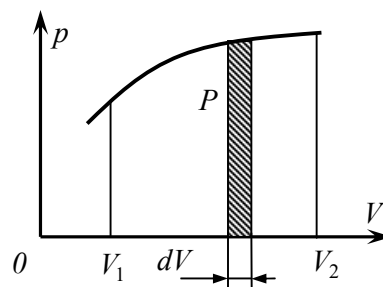


Рисунок 60.2

3 рисунка 60.3 впливає, що робота, яка виконується за квазістатичного кругового процесу, чисельно дорівнює площі, яку охоплює крива, що зображує цикл, узятій зі знаком плюс, коли обхід по кривій відбувається за годинниковою стрілкою, і зі знаком мінус, коли обхід по кривій відбувається проти годинникової стрілки. Дійсно, робота A_{12} на ділянці 1–2 чисельно дорівнює (рис. 60.3) площі S_1 , заштрихованій лініями, нахиленими вправо, узятій зі знаком плюс ($A_{12} > 0$). Робота A_{21} на ділянці 2–1 чисельно дорівнює площі S_2 , заштрихованій лініями, нахиленими вліво, узятій зі знаком мінус ($A_{21} < 0$). Робота за цикл дорівнює $A_{12} + A_{21} = S_1 - S_2 > 0$, тобто чисельно дорівнює площі циклу. За умови зворотного напрямку циклу знаки робіт змінюються на зворотні.

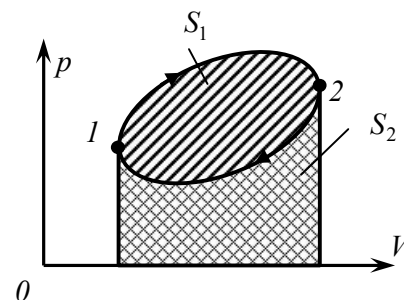


Рисунок 60.3

§ 61 Кількість теплоти. Перший закон термодинаміки. Вічний двигун першого роду

1 Величезна кількість експериментів свідчить про те, що внутрішню енергію можна змінити лише двома способами: 1) виконанням над тілом роботи; 2) передаванням тілу теплоти.

Нагадаємо, що **теплопередачею** називають сукупність мікроскопічних процесів, які не пов'язані з макроскопічною роботою, що виконується над газом, і які призводять до передавання енергії від одного тіла до іншого. **Кількістю теплоти** (позначають буквою Q) називають енергію, яка передається від одного тіла до іншого за допомогою теплопередачі.

Фізична природа теплопередачі полягає в тому, що окремі молекули більш нагрітого тіла передають частину своєї енергії хаотичного руху молекулам менш нагрітого тіла через зіткнення. В цьому разі макроскопічна робота, пов'язана зі зміною зовнішніх макроскопічних параметрів, не виконується.

2 Розглянемо тіло, яке взаємодіє з іншими тілами. Унаслідок взаємодії змінюється внутрішня енергія тіла $U_2 - U_1$. Водночас від зовнішнього середовища тілу було передано деяку кількість теплоти Q та над ним була виконана робота A' . Використовуючи закон збереження енергії, можемо записати

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \quad (61.1)$$

Зрозуміло, що на підставі визначення роботи та 3-го закону Ньютона, робота A , яку тіло виконує над зовнішнім середовищем, пов'язана з роботою A' , яку виконує зовнішнє середовище над тілом, отже,

$$A' = -A.$$

Підставляємо це співвідношення в (61.1) і отримуємо

$$\boxed{Q = U_2 - U_1 + A}. \quad (61.2)$$

Це рівняння і дає математичне **формулювання першого закону термодинаміки**: тепло Q , яке передається системі, використовується на приріст внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ та на виконання самою системою роботи проти зовнішніх сил A .

3 Перший закон термодинаміки часто записують для змін стану системи, яка викликана передаванням їй малої теплоти δQ , виконанням системою малої роботи δA , унаслідок чого відбулася мала зміна внутрішньої енергії dU

$$\boxed{\delta Q = dU + \delta A}. \quad (61.3)$$

Відмінність у записі δA , δQ та dU мають не формальний характер, а виражають глибокі фізичні відмінності цих величин. Так, внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що незалежно від попередньої історії системи її енергія в цьому стані має визначені йому значення. Тому збільшення внутрішньої енергії у разі переходу системи з одного стану в інший завжди дорівнює різниці значень внутрішньої енергії в кінцевому й початковому станах незалежно від шляху (процесу), за яким відбувався перехід системи з одного стану в інший. Отже, у разі довільного кругового процесу, унаслідок якого система повертається у вихідний стан, повна зміна внутрішньої енергії дорівнює різниці внутрішніх енергій початкового і кінцевого станів, які в цьому разі збігаються між собою, і тому дорівнює нулю. Тобто

$$\oint dU = U_2 - U_1 = 0. \quad (61.4)$$

На відміну від внутрішньої енергії, кількість теплоти та робота не є функціями стану, тобто залежать від шляху (процесу), за яким відбувається перехід системи з одного стану в інший. Тому кількість теплоти, яка передається тілу, та робота, яка виконується тілом, для кругового процесу загалом не будуть дорівнювати нулю

$$\oint \delta Q \neq 0, \quad \oint \delta A \neq 0. \quad (61.5)$$

Застосуємо рівняння (61.3) для аналізу довільного кругового процесу, урахуємо (61.4) та (61.5) й отримаємо

$$\boxed{\oint \delta Q = \oint \delta A}. \quad (61.6)$$

Співвідношення (61.6) виражає **ще одне формулювання першого закону термодинаміки**: неможливе існування вічного двигуна першого роду, тобто такого двигуна, що періодично працює, який би виконував роботу в більшій кількості, ніж отримувана енергія із зовнішнього середовища.

§ 62 Теплоємність. Питома й молярна теплоємність. Теплоємність за умови постійного тиску, за постійного об'єму. Внутрішня енергія ідеального газу. Рівняння Майєра. Стала адіабати

1 **Теплоємністю тіла** називається величина, що дорівнює кількості теплоти, яку потрібно передати тілу, щоб підвищити його температуру на один градус Кельвіна. Тобто

$$\boxed{C_{\text{тіла}} = \delta Q / dT},$$

де δQ – кількість теплоти, передавання якої підвищує температуру тіла на dT . Теплоємність тіла вимірюється у джоулях на кельвін (Дж/К).

Питома теплоємність називають теплоємність одиниці маси речовини

$$c = C_{\text{тіла}} / m,$$

де m – маса тіла. Вимірюється вона в джоулях на кілограм-кельвін (Дж/(кг · К)).

Молярною теплоємністю називають теплоємність моля речовини .

$$C = C_{\text{тіла}} / \mu,$$

де μ – кількість молів речовини тіла. Вимірюється вона у джоулях на моль-кельвін (Дж/(моль · К)).

Питома й молярна теплоємності пов'язані співвідношенням

$$\boxed{c = C \cdot \mu / m}. \quad (62.1)$$

Теплоємність залежить від умов, за яких відбувається нагрівання тіла. *Найбільш цікавими є теплоємності для випадків, коли нагрівання виконується за сталого об'єму або при сталого тиску. У першому випадку ми маємо справу з теплоємністю за сталого об'єму (позначається C_V), у другому – з теплоємністю за сталого тиску (C_p).*

2 З'ясуємо зв'язок між внутрішньою енергією та теплоємністю газу. Якщо нагрівання відбувається за сталого об'єму, то тіло не виконує роботу над зовнішніми тілами й, отже, уся теплота йде на збільшення внутрішньої енергії тіла: $\delta Q_V = dU$ (формулу першого закону термодинаміки; індекс V біля Q підкреслює ту обставину, що теплота передається в умовах, коли об'єм тіла не змінюється). Звідси випливає, що молярна теплоємність будь-якої речовини за сталого об'єму дорівнює

$$C_V = \frac{dU_\mu}{dT} \quad (V = \text{const}). \quad (62.2)$$

У термодинаміці подібні вирази зазвичай записують у вигляді

$$C_V = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial T} \right)_V. \quad (62.3)$$

Символ частинної похідної з індексом V вказує на те, що під час диференціювання функції U_μ за змінною T об'єм приймається сталим.

Дослідним шляхом встановлено, що в газах, які близькі за своїми властивостями до ідеального газу, теплоємність за сталого об'єму в широких температурних інтервалах практично не залежить від температури: $C_V = \text{const}$. Тоді відповідно до формули (62.2)

$$dU_\mu = C_V dT.$$

Інтегруємо це співвідношення і знаходимо вираз для внутрішньої енергії одного моля ідеального газу

$$U_\mu = \int C_V dT = C_V T + \text{const}$$

(ми врахували, що $C_V = \text{const}$). Відомо, що внутрішня енергія визначається з точністю до довільної адитивної сталої. Тому константу у виразі для U_μ можна взяти як таку, що дорівнює нулю. Унаслідок отримуємо

$$U_\mu = C_V T. \quad (62.4)$$

Внутрішня енергія – величина адитивна. Тоді внутрішня енергія маси газу m буде дорівнювати

$$\boxed{U = \frac{m}{\mu} C_V T}. \quad (62.5)$$

Отже, отримали співвідношення (62.5) для внутрішньої енергії ідеального газу.

3 Знайдемо зв'язок між теплоємностями C_p та C_V . Для цього використаємо рівняння першого закону термодинаміки для моля газу. Візьмемо до уваги, що $\delta A = p dV_\mu$. Будемо розглядати процес, коли теплота передається газу за сталого тиску

$$\delta Q_p = dU_\mu + p dV_\mu$$

(V_μ – об'єм моля; індекс p біля Q вказує на те, що теплота передається газу в умовах, коли тиск залишається сталим). Розділивши цей вираз на збільшення температури dT , яке відбувається через передачу газу теплоти δQ_p , прийдемо до формули для молярної теплоємності газу за сталого тиску

$$C_p = \frac{dU_\mu}{dT} + p \frac{dV_\mu}{dT} \quad (p = \text{const}).$$

Відповідно до формули (62.2) доданок dU_μ / dT дорівнює молярній теплоємності за сталого об'єму. Урахувавши це, прийдемо до співвідношення

$$C_p = C_V + p \left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T} \right)_p. \quad (62.6)$$

Ми не робили жодних припущень про властивості газу, тому формула (62.6) справедлива для будь-яких газів. Тепер припустимо, що газ ідеальний. Відповідно до рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва – Клапейрона) $V_\mu = RT / p$. Диференціюємо цей вираз за величиною T у припущенні, що $p = \text{const}$, й отримуємо

$$\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}. \quad (62.7)$$

Підстановка цього значення похідної в (62.6) призводить до співвідношення

$$\boxed{C_p = C_V + R}. \quad (62.8)$$

Отже, отримали важливе співвідношення між C_p та C_V (62.8), яке називається **рівнянням Майєра**. Підкреслимо, що співвідношення (62.8) справедливе тільки для ідеального газу.

4 Експериментально більш зручно визначати не C_p та C_V , а їхнє відношення

$$\boxed{\gamma = C_p / C_V}. \quad (62.9)$$

Відношення (62.9) являє собою характерну для кожного газу величину і називається **сталою адіабати**. Далі ми встановимо, що значення γ визначається числом і характером ступенів вільності молекул.

Знайдемо вираз для внутрішньої енергії через сталу адіабати. Відповідно до рівняння Майєра (62.8)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad (62.10)$$

звідки

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (62.11)$$

Підставивши цей вираз для C_V в (62.5), отримуємо для внутрішньої енергії ідеального газу формулу

$$\boxed{U = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{\gamma - 1}}. \quad (62.12)$$

Урахуємо, що відповідно до рівняння Менделєєва – Клапейрона $(m/\mu)RT = pV$ прийдемо до ще одного виразу для внутрішньої енергії довільної маси ідеального газу

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (62.13)$$

Отже, отримали ще співвідношення (62.12) та (62.13) для внутрішньої енергії ідеального газу.

§ 63 Рівняння адіабати ідеального газу

1 Під час будь-якого квазістатичного процесу газ підкоряється своєму рівнянню стану. Для ідеального газу це рівняння має вигляд

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (63.1)$$

(рівняння Менделєєва – Клапейрона).

Відбуваються процеси, коли газ, крім рівняння стану, підкоряється ще деякій додатковій умові, яка визначає характер процесу. Ця додаткова умова може полягати, наприклад, у тому, що один із параметрів стану залишається сталим.

Якщо тиск газу залишається сталим, то такий процес називають **ізобаричним**. У цьому разі додаткова умова має вигляд $p = \text{const}$. Якщо залишається незмінним об'єм газу ($V = \text{const}$), то такий процес називається **ізохоричним**. Нарешті, якщо під час процесу залишається незмінною температура ($T = \text{const}$), то такий процес називається **ізотермічним**. З рівняння (63.1) випливає, що у разі ідеального газу за ізотермічного процесу тиск і об'єм пов'язані співвідношенням

$$pV = \text{const}, \quad (63.2)$$

яке називається **рівнянням ізотерми** ідеального газу, а крива, що обумовлена цим рівнянням, називається **ізотермою**.

Процес, що протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем, називається **адіабатичним** ($\delta Q = 0$).

2 Знайдемо рівняння адіабатичного (адіабатного) процесу, або рівняння адіабати. Для цього використаємо рівняння стану (63.1) та перший закон термодинаміки.

Згідно з першим законом термодинаміки

$$\delta Q = d\left(\frac{m}{\mu} C_V T\right) + pdV = 0 \quad \text{або} \quad pdV = -\frac{m}{\mu} C_V dT. \quad (63.3)$$

У цьому рівнянні використали, що внутрішня енергія ідеального газу визначається формулою $(m/\mu)C_V T$, елементарну роботу записали у вигляді $\delta A = pdV$. Для адіабатичного процесу, як це випливає з визначення цього процесу, теплообмін із зовнішнім середовищем відсутній $\delta Q = 0$.

Далі візьмемо диференціал від обох частин рівняння стану (63.1) й прийдемо до рівності

$$pdV + Vdp = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (63.4)$$

Виключимо із системи рівнянь (63.3) та (63.4) dT . Для цього помножимо друге рівняння (63.3) на відношення R/C_V й складемо його з рівнянням (63.4). Унаслідок цього отримаємо

$$\gamma pdV + Vdp = 0, \quad (63.5)$$

де $\gamma = 1 + R/C_V = C_p/C_V$ (визначення сталої адіабати). Потім розділимо (63.5) на добуток pV

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (63.6)$$

Далі виконуємо очевидні перетворення

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}, \quad \gamma \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dp}{p}, \quad \gamma \ln(V) = -\ln(p) + \ln(const), \quad \ln(V^\gamma) + \ln(p) = \ln(const).$$

Звідси випливає, що

$$\boxed{pV^\gamma = const}. \quad (63.7)$$

Ми отримали рівняння (63.7) адіабати ідеального газу в змінних p й V . Це рівняння називають **рівнянням Пуассона**.

Якщо написати рівняння (63.7) у вигляді $pV \cdot V^{\gamma-1} = const$ й замінити pV відповідно до (63.1) через $(m/\mu)RT$ прийдемо до рівняння адіабати ідеального газу у змінних T й V

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = const} \quad (63.8)$$

(сталі m , μ й R ми включили в константу; отже, константи у формулах (63.8) і (63.9) мають неоднакове значення).

Аналогічно, коли відповідно до рівняння стану $V = (m/\mu)RT/p$ замінити об'єм V у виразі (63.8), то отримаємо рівняння адіабати у змінних T та p

$$\boxed{T^\gamma / p^{\gamma-1} = const} \quad \text{або} \quad \boxed{p^{\gamma-1} / T^\gamma = const}. \quad (63.9)$$

3 Під час доведення формул вважали, що розглянуті процеси є квазістатичними, які протікають нескінченно повільно. Однак здійснити не тільки нескінченно повільний, а навіть просто дуже повільний адіабатичний процес неможливо, оскільки матеріалів для виготовлення адіабатичної оболонки, які повністю не проводять тепло не існує. Водночас кількість теплоти, яким обмінюється тіло із зовнішнім середовищем, буде тим менше, чим швидше проходить процес. Отже, близькими до адіабатичного можуть бути тільки процеси, які протікають досить швидко. Швидкість процесу повинна бути, з одного боку, настільки великою, щоб теплообміном із зовнішнім середовищем можна було знехтувати, а, з іншого боку, досить малою для того, щоб процес можна було вважати практично квазістатичним. Такі умови виконуються, зокрема, у межах невеликих об'ємів газу, у якому поширюється звукова хвиля. Тому поведінка газу в разі проходження звукової хвилі в межах кожного досить малого об'єму добре описує рівняння адіабати.

§ 64 Політропічні процеси. Показник політропи. Рівняння політропи

1 **Політропічними** (політропними) називаються процеси, у ході яких теплоємність тіла C залишається сталою. Отже, за політропічного процесу газ, крім рівняння стану, підкоряється додатковій умові

$$\boxed{C = const}. \quad (64.1)$$

Знайдемо рівняння політропи для ідеального газу. Для цього використаємо рівняння стану та перший закон термодинаміки.

Відповідно до першого закону термодинаміки маємо

$$\delta Q = d\left(\frac{m}{\mu} C_V T\right) + pdV.$$

Використовуючи визначення молярної теплоємності газу можемо записати, що $\delta Q = (m/\mu)CdT$. Тоді перший закон термодинаміки набуде вигляду

$$\frac{m}{\mu}CdT = \frac{m}{\mu}C_VdT + pdV \text{ або } \frac{m}{\mu}RdT \cdot (C - C_V) = RpdV. \quad (64.2a)$$

З рівняння стану (Менделєєва – Клапейрона $pV = (m/\mu)RT$) випливає, що

$$\frac{m}{\mu}RdT = pdV + Vdp. \quad (64.2b)$$

Помножимо рівняння (64.2b) на $(C - C_V)$ і за допомогою його виключимо з останнього рівняння (64.2a) доданок з dT , унаслідок отримаємо

$$(C - C_V)(pdV + Vdp) = RpdV,$$

звідки

$$(C - C_V - R)pdV + (C - C_V)Vdp = 0.$$

Розділимо це рівняння на pV й урахуємо, що $C_V + R = C_p$. У підсумку отримаємо

$$(C - C_p)\frac{dV}{V} + (C - C_V)\frac{dp}{p} = 0. \quad (64.3)$$

Уведемо величину

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \quad (64.4)$$

яка називається **показником політропи**. Тоді рівнянню (64.3) можна надати вигляду

$$n\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \text{ або } n\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}. \quad (64.5)$$

Інтегруємо праву й ліву частини останнього рівняння (64.5) аналогічно, як і у разі адіабатичного процесу й отримуємо

$$pV^n = const. \quad (64.6)$$

Рівняння (64.6) і є **рівнянням політропи** ідеального газу в змінних p й V .

Аналогічно, як і в разі адіабатичного процесу, використовуючи рівняння стану, отримуємо **рівняння політропи** в змінних T й V

$$TV^{n-1} = const, \quad (64.7 a)$$

та **рівняння політропи** у змінних T та p

$$T^n / p^{n-1} = const, \text{ або } p^{n-1} / T^n = const. \quad (64.7 b)$$

2 *Ізотермічний, ізохоричний, ізобаричний, адіабатичний процеси можна вважати політропічними процесами з відповідним показником політропи. Водночас рівняння політропи для цих процесів переходять у відповідні рівняння ізопроцесів. Покажемо це.*

У разі **ізобаричного процесу** молярна теплоємність газу

$$C = C_p.$$

Для цього процесу показник політропи, як це випливає із співвідношення (64.4), дорівнює

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C_p - C_p}{C_p - C_V} = 0.$$

За цієї умови рівняння політропи (64.6) переходить у рівняння ізобари

$$pV^n = pV^0 = p = \text{const}.$$

У разі ізохоричного процесу молярна теплоємність газу

$$C = C_V.$$

Для цього процесу показник політропи, як це випливає із співвідношення (64.4), дорівнює

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C_V - C_p}{C_V - C_V} = -\infty.$$

За цієї умови рівняння політропи (64.6) переходить у рівняння ізохори

$$(pV^n)^{1/n} = p^{1/n}V = p^{1/(-\infty)}V = p^0V = V = \text{const}.$$

У разі ізотермічного процесу молярна теплоємність газу

$$C_T = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} = \infty.$$

Це узгоджується з тим, що передавання тілу кількості теплоти $\delta Q \neq 0$ не призводить до зміни температури: $dT = 0$. Показник політропи для цього процесу буде дорівнювати

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{\infty - C_p}{\infty - C_V} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

За цієї умови рівняння політропи (64.7a) переходить у рівняння ізотерми

$$TV^{n-1} = TV^{1-1} = TV^0 = T = \text{const}.$$

У разі адіабатичного процесу молярна теплоємність газу

$$C_Q = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{0}{dT} = 0.$$

Це узгоджується з тим, що адіабатичний процес, за визначенням, протікає без теплопередачі ($\delta Q = 0$). Для цього процесу показник політропи, як це випливає з співвідношення (64.4), дорівнює

$$n = \frac{0 - C_p}{0 - C_V} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma.$$

За цієї умови рівняння політропи (64.6) переходить у рівняння адіабати

$$pV^n = pV^\gamma = \text{const}.$$

§ 65 Робота, яку виконує газ під час ізопроцесів

1 Знайдемо роботу, яку виконує газ за ізотермічного, ізобаричного, ізохоричного та адіабатичного процесів. Для цього використаємо співвідношення, яке визначає роботу за будь-якого процесу

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV, \quad (65.1)$$

де V_1 й V_2 – об'єм газу в початковому й кінцевому станах. Далі знайдемо, як у кожному з різних ізопроцесів тиск залежить від об'єму $p = p(V)$, обчислимо інтеграл (65.1) і знайдемо шукану роботу.

2 Розглянемо ізохоричний процес. У цьому разі $V_1 = V_2$, $dV = 0$ й інтеграл (65.1) дорівнює нулю. Отже, для ізохоричного процесу $A = 0$. Це справедливо не тільки для ідеального газу, але й загалом для всякого тіла.

3 Розглянемо ізобаричний процес. Тут тиск p залишається сталим. Тому його можна винести у формулі (65.1) за знак інтеграла. Унаслідок отримуємо для ізобаричного процесу

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (65.2)$$

Ця формула є справедливою також для будь-якого тіла.

4 Розглянемо ізотермічний процес. У цьому разі знайдемо залежність тиску від об'єму за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона $p = (m/\mu)RT/V$. Підставивши цю функцію у формулу (65.1) і взявши до уваги, що за ізотермічного процесу $T = const$, знаходимо

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln(V_2/V_1).$$

Отже, робота, яка виконується ідеальним газом за ізотермічного процесу, визначається формулою

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln(V_2/V_1). \quad (65.3)$$

5 Розглянемо адіабатичний процес. Роботу, яку виконує газ за адіабатичного процесу, можна знайти декількома способами. У першому способі можна за допомогою рівняння адіабати знайти залежність тиску від об'єму ($pV^\gamma = p_1V_1^\gamma$, $p = p_1V_1^\gamma/V^\gamma$), підставити цю залежність у (65.1) і знайти шукану роботу A_{12} . У другому способі використаємо перший закон термодинаміки, візьмемо до уваги, що для адіабатичного процесу $Q = 0$. Тоді

$$\delta A = -dU \quad (65.4)$$

або

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2.$$

Підставивши вираз для внутрішньої енергії U в цю формулу, знаходимо роботу ідеального газу за адіабатичного процесу

$$A_{12} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1} \right).$$

Напишемо цю формулу у вигляді

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{p_2V_2^\gamma}{p_1V_1^\gamma} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Використаємо рівняння Пуассона для адіабатичного процесу $p_2V_2^\gamma = p_1V_1^\gamma$. Тоді остаточно

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (65.5)$$

З рівняння стану випливає, що $p_1V_1 = (m/\mu)RT_1$. Зробивши таку заміну, отримаємо ще один вираз для роботи, яка виконується ідеальним газом за адіабатичного процесу

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (65.6)$$

6 Розглянемо політропічний процес. Через те, що формули політропічного процесу подібні формулам для адіабатичного процесу, у яких потрібно стали адіабати γ замінити на

сталу політропи n , то формули для роботи за політропічного процесу можемо отримати з (65.5) і (65.6), у яких замінимо γ на n .

§ 66 Класична теорія теплоємності ідеального газу

1 Молекулярно-кінетична теорія дозволяє знайти теплоємність ідеального газу. Як відомо, молекули ідеального газу не взаємодіють між собою (крім щодо рідких зіткнень молекул одна з одною). Тому внутрішню енергію одного моля ідеального газу можна знайти, помноживши середню енергію однієї молекули $\langle \varepsilon \rangle$ на число молекул в одному молі (сталу Авогадро N_A). Як відомо, середня енергія однієї молекули дорівнює

$$\langle \varepsilon \rangle = (i/2)kT,$$

де

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2 \cdot i_{\text{кол}} \quad (66.1)$$

є сумою поступальних, обертальних і подвоєного числа коливальних ступенів вільності молекули.

Тоді енергія одного моля ідеального газу буде дорівнювати

$$U_\mu = N_A \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT. \quad (66.2)$$

Тут використали, що універсальна газова стала пов'язана зі сталою Больцмана $R = N_A k$.

Відомо, що молярна теплоємність за сталого об'єму визначається співвідношенням

$$C_V = \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial T} \right)_V = \frac{dU_\mu}{dT}.$$

Підставляємо в цю формулу (66.2) й отримуємо вираз молярної теплоємності ідеального газу за сталого об'єму

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (66.3)$$

Відповідно до рівняння Майєра

$$C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (66.4)$$

З формул (66.3) і (66.4) випливає, що

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (66.5)$$

Отже, значення теплоємностей C_V , C_p та сталої адіабати γ визначається числом i характером ступенів вільності молекул ідеального газу i (формулу (66.1)).

2 Порівняємо теоретичні та експериментальні значення сталої адіабати.

Розглянемо одноатомні гази. Експеримент для гелію та аргону за умови $T = 290$ К дає такий результат

$$\gamma_{\text{He}} = 1,660, \quad \gamma_{\text{Ar}} = 1,650.$$

Молекула одноатомного газу має лише три поступальні ступені вільності ($i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{оберт}} = 0$, $i_{\text{кол}} = 0$). Тобто $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2 \cdot i_{\text{кол}} = 3$. Тоді з формули (66.5) знаходимо теоретичне значення для одноатомних газів

$$\gamma = (i+2)/i = (3+2)/3 = 1,6666(6).$$

Бачимо, що *теоретичні та експериментальні значення сталої адіабати є дуже близькими, але вони не збігаються між собою.*

Розглянемо двоатомні гази. Експеримент для водню, азоту та кисню за умови $T = 290 \text{ K}$ дає такий результат:

$$\gamma_{H_2} = 1,407, \quad \gamma_{N_2} = 1,398, \quad \gamma_{O_2} = 1,398.$$

Якщо ці молекули вважати двоатомними молекулами з жорстким зв'язком, то вони мають три поступальних $i_{\text{пост}} = 3$ та два обертових $i_{\text{оберт}} = 2$ ступені вільності ($i_{\text{кол}} = 0$). Тобто $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2 \cdot i_{\text{кол}} = 5$. Тоді з формули (66.5) знаходимо теоретичне значення для двоатомних молекул із жорстким зв'язком

$$\gamma = (i + 2) / i = (5 + 2) / 5 = 1,40000.$$

Бачимо, що і в цьому разі *теоретичні та експериментальні значення сталої адіабати є дуже близькими, але вони не збігаються між собою.*

Особливо разючим стає розбіжність між теорією й експериментом, якщо звернутися до рисунка 66.1, на якому подана залежність C_V водню від температури. За низьких температур двоатомний водень поводить себе як одноатомний газ із трьома поступальними ступенями вільності $i = 3$, $C_V = i / (2R) = 3 / (2R)$. За більш високої температури (кімнатні температури) наче «вмикаються» обертові ступені вільності й $i = 3 + 2 = 5$, $C_V = i / (2R) = 5 / (2R)$. За ще більшої температури «вмикається» ще і коливальна ступінь вільності й $i = 3 + 2 + 2 \cdot 1 = 7$, $C_V = i / (2R) = 7 / (2R)$. Класична теорія цю температурну залежність пояснити не може.

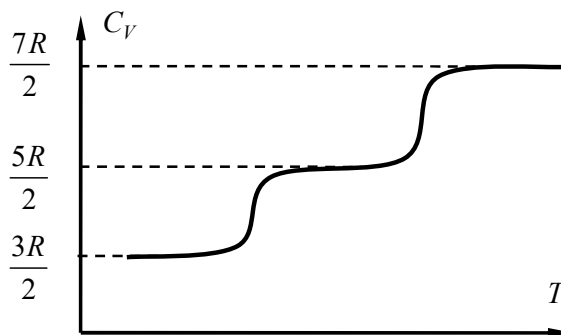


Рисунок 66.1

Розходження теорії та експерименту можна пояснити тим, що ньютонівська механіка стає неправильною для застосування до об'єктів, розміри яких порівняні з розмірами атомів. Ці об'єкти описуються квантовою механікою. Саме квантова теорія теплоємності повністю узгоджується з експериментом.

ТЕМА 10 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

§ 67 Будова і принцип дії теплової машини. Коефіцієнт корисної дії теплової машини

1 Перший закон термодинаміки не дає жодної інформації щодо напрямку, у якому можуть відбуватися процеси в природі. Для ізольованої системи, наприклад, перший закон вимагає тільки, щоб для всіх процесів енергія системи залишалася сталою. Якщо 1 і 2 – два стани такої системи, то перший закон нічого не може сказати, чи буде система переходити зі стану 1 у стан 2, або зі стану 2 у стан 1. Загалом, на підставі першого закону не можна з'ясувати, чи будуть в ізольованій системі відбуватися будь-які процеси.

Другий закон термодинаміки, навпаки, дозволяє з'ясувати напрямки процесів, які можуть відбуватися в природі. Але цим значення другого закону не вичерпується. Другий і перший закони термодинаміки встановлюють дуже багато точних кількісних співвідношень між різними макроскопічними параметрами тіл, що перебувають у стані термодинамічної рівноваги.

2 Щоб перейти до формулювання другого закону термодинаміки, дотримуючись історичного ходу ідей, розглянемо схематично роботу теплової машини. Саме проблеми створення ефективних теплових машин послужили потужним поштовхом до розвитку термодинаміки.

Тепловою машиною (двигуном) називається періодично працюючий двигун, який виконує роботу за рахунок теплоти, що надходить до нього ззовні. Довільна тепла машина складається з трьох складових (рис. 67.1): робочого тіла, нагрівача та холодильника.



Рисунок 67.1

Працює тепла машина так. Для визначеності будемо вважати, що робочим тілом є газ, який міститься в циліндрі з поршнем. Будемо вважати, що початковий стан робочого тіла на діаграмі VP зображено точкою 1 (рис. 67.2). Приведемо робоче тіло в тепловий контакт із **нагрівачем**, тобто тілом, температура якого вище за температуру газу в циліндрі. Газ буде нагріватися й розширюватися, цей процес зображений кривою 1 a 2. Робоче тіло отримає від нагрівача теплоту Q й виконає додатну роботу A_1 . Згідно з першим законом термодинаміки можемо записати

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \quad (67.1)$$

Тепер треба повернути робоче тіло у вихідне положення (теплова машина – періодично працюючий механізм), тобто стиснути газ. Це треба зробити так, щоб робота A_2 , яка витрачається на стиснення, була меншою за A_1 . З цією метою приведемо робоче тіло в тепловий контакт із **холодильником**, тобто тілом, температура якого нижче за температуру газу в циліндрі, і стиснемо газ по шляху 2 b 1. Унаслідок цього газ повернеться у вихідний стан 1. Водночас він віддасть холодильнику кількість теплоти Q_2 . Згідно з першим законом термодинаміки

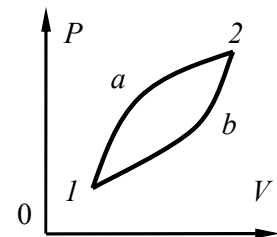


Рисунок 67.2

$$-Q_2 = U_1 - U_2 - A_2. \quad (67.2)$$

Звідси, використовуючи (67.1), отримуємо

$$Q_1 - Q_2 = A_1 - A_2. \quad (67.3)$$

Отже, тепла машина виконала круговий процес, унаслідок якого нагрівач віддав кількість теплоти Q_1 , холодильник отримав кількість теплоти Q_2 , $Q = Q_1 - Q_2$ пішло на виконання роботи $A = A_1 - A_2$. Відношення

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (67.4)$$

називається **коефіцієнтом**, або **коефіцієнтом корисної дії** (ККД) теплової машини. Зрозуміло, що коефіцієнт корисної дії теплової машини, як це випливає з визначення, не може перевищувати одиниці.

§ 68 Вічний двигун другого роду. Другий закон термодинаміки. Формулювання другого закону термодинаміки Томсона і Клаузіуса

1 Виникає питання, чи не можна побудувати періодично працюючу теплову машину без холодильника, тобто зробити так, щоб $Q_2 = 0$ і, отже, $\eta = 1$? Така машина могла б перетворювати в роботу всю теплоту, взяту від теплового резервуара. Можливість її побудови не суперечить закону збереження енергії. За своїм практичним значенням вона майже не поступалася б вічному двигуну першого роду, тому що за її допомогою можна було б виконувати роботу за рахунок практично невичерпних запасів внутрішньої енергії, які

мають океани і моря, повітряна атмосфера й надра Землі. Таку машину Вільгельм Оствальд (1853–1932) назвав **вічним двигуном другого роду** на відміну від вічного двигуна першого роду, тобто двигуна, що виконує роботу з нічого, можливість якого заперечує закон збереження енергії.

Дослідні факти свідчать про неможливість побудови вічного двигуна другого роду. Тому неможливість побудови такого вічного двигуна була введена в постулат. Цей постулат називається **другим законом термодинаміки** і є узагальненням дослідних фактів. Доказом цього є узгодження всіх наслідків, які випливають з цього постулату, з дослідом. Застосовуючи цей постулат до макроскопічних систем, розміри яких не дуже малі, фізика ніде не зіткнулася із суперечністю. Тому другий закон термодинаміки ґрунтується на надійній експериментальній базі. Наведемо два точних формулювання другого закону термодинаміки.

2 Вільям Томсон (який отримав пізніше за наукові заслуги титул лорда Кельвіна) у 1851 р. дав таке **формулювання другого закону термодинаміки**: **«Неможливий круговий процес, єдиним результатом якого було б виконання роботи за рахунок зменшення внутрішньої енергії теплового резервуара»**.

Нагадаємо, що тепловим резервуаром вважають тіло або систему тіл, які перебувають у стані термодинамічної рівноваги й мають запас внутрішньої енергії. Але тепловий резервуар сам макроскопічної роботи не виконує, а може тільки передавати внутрішню енергію іншому тілу або системі тіл. **Якщо остання система виконує роботу завдяки внутрішній енергії теплового резервуара, то вона називається в термодинаміці робочим тілом.**

3 Клаузіус (1822–1888) у 1850 р. дав істотно інше формулювання основного постулату. Він висунув таке положення: **«Теплота не може самочинно переходити від менш нагрітого тіла до більше нагрітого тіла»**. Теплотою тут треба вважати внутрішню енергію тіла. Передавання теплоти (точніше, внутрішньої енергії) можна здійснити не тільки тепловим контактом, але й великою кількістю інших способів. Наприклад, усі тіла випромінюють і поглинають видимі або невидимі промені (електромагнітні хвилі). Випромінювання одного тіла можна за допомогою лінзи або сферичного дзеркала сконцентрувати на іншому тілі, й таким шляхом передати йому тепло. Однак не всяке передавання можливе. Зміст постулату Клаузіуса саме й полягає в тому, що неможливо **будь-яким способом** забрати теплоту від тіла менш нагрітого, цілком передати його тілу більше нагрітому й так, щоб у природі більше не відбулося жодних змін.

Але постулат Клаузіуса не стверджує, що передача тепла від тіла менш нагрітого до тіла більше нагрітого загалом неможлива. Вона неможлива за умови, що у всіх інших тілах **жодних змін не повинно відбутися**. У цьому сенсі використовують слово **«самочинно»** для формулювання другого закону термодинаміки. Якщо ж відбуваються й інші процеси, то передавання теплоти від тіла, менше нагрітого, до тіла, більше нагрітого, стає можливою. Так, у холодильних машинах теплота, яка береться від менш нагрітого тіла, передається більш нагрітому тілу. Це не суперечить постулату Клаузіуса, тому що такий перехід відбувається тут не самовільно, а супроводжується роботою електричного двигуна. Якщо ж виключити його електричний двигун, то електричний холодильник перестав діяти.

4 Можна довести що **формулювання другого закону термодинаміки Томсона та Клаузіуса є еквівалентними**.

§ 69 Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно. Перша і друга теореми Карно

1 Якщо внаслідок деякого процесу система переходить зі стану *A* в інший стан *B* і якщо можливо повернути її хоча б одним способом у вихідний стан *A* і притому так, щоб у всіх інших тілах не відбулося жодних змін, то цей процес називається **оборотним**. Якщо ж це зробити неможливо, то процес називається **необоротним**. Прикладом необоротного процесу може служити перехід теплоти від більше нагрітого тіла до тіла, менше нагрітого,

під час теплового контакту цих тіл. Необоротність такого процесу впливає безпосередньо з другого закону термодинаміки у формулюванні Клаузіуса. Необоротним є і процес отримання теплоти через тертя. Прикладом оборотного процесу є довільний квазістатичний процес.

2 Циклом Карно називають круговий процес, який складається з двох ізотерм і двох адіабат (рис. 69.1). У цьому квазістатичному процесі систему можна приводити у тепловий контакт із двома тепловими резервуарами, які мають сталі температури T_1 й T_2 . Надалі будемо вважати, що $T_1 > T_2$. Тепловий резервуар із більш високою температурою T_1 є нагрівачем, а з більш низькою температурою T_2 – холодильником. Цикл Карно виконується так. Спочатку систему приводять в тепловий контакт із нагрівачем, температура якого дорівнює T_1 . Далі, нескінченно повільно зменшуючи зовнішній тиск, відбувається ізотермічне розширення 1–2 (рис. 69.1).

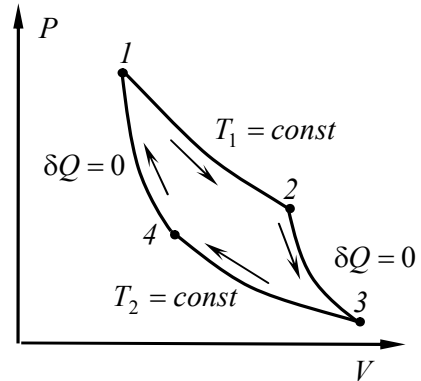


Рисунок 69.1

Водночас система *отримує* теплоту Q_1 від нагрівача й виконує додатну роботу A_{12} . Після цього систему адіабатично ізолюють і змушують квазістатично розширюватися по адіабаті 2–3 поки її температура не стане дорівнювати температурі холодильника T_2 . За адіабатичного розширення система також виконує деяку додатну роботу A_{23} . У стані 3 систему приводять у тепловий контакт із холодильником і ізотермічно стискають її до деякого стану 4. Водночас над системою виконується робота (тобто сама система виконує від’ємну роботу A_{34}), і вона *віддає* холодильнику деяку кількість теплоти Q_2 . Стан 4 вибирається так, щоб можна було квазістатичним стисненням по адіабаті 1–4 повернути систему у вихідний стан 1. Для цього потрібно над системою виконати роботу (тобто сама система повинна виконати від’ємну роботу A_{41}).

3 Особливість циклу Карно полягає в тому, що він є оборотним циклом. Це означає, що коли ми будемо виконувати його в оберненому напрямку, то холодильник віддасть теплоту $Q'_2 = Q_2$, а нагрівач отримає теплоту $Q'_1 = Q_1$. Використовуючи те, що цикл Карно є оборотним, і другий закон термодинаміки, можна довести першу і другу теореми Карно.

Перша теорема Карно: коефіцієнт корисної дії теплової машини, яка працює за циклом Карно, залежить тільки від температур T_1 і T_2 нагрівача й холодильника і не залежить від будови машини, а також від виду робочої речовини. Можна отримати формулу для коефіцієнта корисної дії циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (69.1)$$

Друга теорема Карно: коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини не може бути більшим за коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, що працює за циклом Карно з тими самими температурами нагрівача та холодильника

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (69.2)$$

§ 70 Нерівність і рівність Клаузіуса. Ентропія. Закон зростання ентропії

1 З першої та другої теореми Карно впливає цікавий наслідок. Розглянемо частинний випадок теплової машини, під час роботи якої робоче тіло отримує від нагрівача з температурою T_1 кількість теплоти Q_1 і це саме робоче тіло віддає холодильнику з

температурою T_2 кількість теплоти Q_2 . Відповідно до другої теореми Карно коефіцієнт корисної дії будь-якої теплової машини не може бути більшим за коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно з тими самими температурами нагрівача та холодильника. Тому можемо записати

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (70.1)$$

Співвідношення (70.1) можна перетворити

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{або} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (70.2)$$

Далі не будемо розрізняти, який тепловий резервуар є нагрівачем, а який – холодильником. Кількість теплоти, яку *відає* тепловий резервуар, будемо вважати *додатною*, кількість теплоти, яка *передається* тепловому резервуару, – *від'ємною*. Завдяки цьому остання формула (70.1) набуває симетричного вигляду

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (70.3)$$

Можна провести узагальнення формули (70.3) на будь-який круговий тепловий процес. Виділимо малу ділянку такого процесу. Позначимо через δQ кількість теплоти, яка була передана робочому тілу на цій ділянці. Температуру резервуару на цій ділянці позначимо через T . Тоді відповідно із (70.3) сума відношень $\delta Q/T$ на всіх ділянках кругового процесу повинна задовольняти нерівності

$$\sum_i \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_i \leq 0.$$

На підставі визначення інтеграла цю нерівність можна записати у вигляді

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (70.4)$$

Нерівність (70.4), яка є правильною для будь-якого кругового процесу, отримала назву «**нерівність Клаузіуса**».

2 Припустимо, що круговий процес, який виконує система є *квазістатичним*. Нерівність Клаузіуса (70.4) є справедливою і для такого процесу. Варто зазначити, що в разі квазістатичного процесу температура теплового резервуару та системи однакові.

Квазістатичний процес оборотний. Тому він може йти в протилежному напрямку. Для зворотного процесу також є справедливою нерівність Клаузіуса $\oint \frac{\delta'Q}{T} \leq 0$, де через $\delta'Q$ позначили елементарні кількості теплоти, які отримує система на окремих ділянках такого зворотного процесу. Через те, що система проходить через ті самі рівноважні стани, що й у прямому процесі, то $\delta'Q = -\delta Q$ і тому $\oint \frac{\delta Q}{T} \geq 0$. Це співвідношення сумісне зі співвідношенням (70.4) тільки в тому разі, коли взяти знак рівності. Отже, для *квазістатичного процесу нерівність Клаузіуса переходить у рівність*

$$\oint_{\text{квст}} \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (70.5)$$

Це співвідношення отримало назву **рівності Клаузіуса**.

3 На рівності Клаузіуса засноване введення фундаментального в термодинаміці поняття *ентропії*.

Нехай система може переходити з початкового стану 1 (рис. 70.1) у кінцевий стан 2 декількома способами, кожний із яких є квазістатичним процесом. Візьмемо два з них – I і II. Ці процеси можна об'єднати в один квазістатичний круговий процес 1–I–2–II–1. Застосуємо до нього рівність Клаузіуса

$$\int_{1/2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2/1} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

або

$$\int_{1/2} \frac{\delta Q}{T} - \int_{1/2} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Зауважимо, що в цій рівності ми поміняли знак через те, що змінили межі інтегрування на обернені. Годі

$$\boxed{\int_{1/2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1/2} \frac{\delta Q}{T}}.$$

Кількість теплоти, що отримує система, і яка поділена на абсолютну температуру T , за якої ця теплота була отримана, іноді називають **приведеною кількістю теплоти**. Величина $\delta Q/T$ є елементарною приведеною кількістю теплоти, що отримується в

нескінченно малому процесі, а інтеграл $\int \frac{\delta Q}{T}$ можна назвати приведеною кількістю теплоти,

що отримується в скінченному процесі. Користуючись цією термінологією, рівності Клаузіуса (70.5) можна дати таке формулювання: *приведена кількість теплоти, яку отримує система за будь-якого квазістатичного кругового процесу, дорівнює нулю*. Еквівалентним є таке формулювання: *приведена кількість теплоти, що квазістатично отримана системою, не залежить від шляху переходу, а визначається лише початковим і кінцевим станами системи*. Цей важливий результат дозволяє ввести нову функцію стану, яку називають ентропією.

Ентропія системи є функція її стану, що визначається з точністю до довільної сталої. Різниця ентропії у двох рівноважних станах 2 і 1 за визначенням дорівнює *приведеній кількості теплоти, яку потрібно передати системі, щоб перевести її зі стану 1 у стан 2 будь-яким квазістатичним способом*. Отже, якщо ентропії в станах 1 і 2 позначити буквами S_1 й S_2 , то за визначенням

$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T}}. \quad (70.6)$$

Значення довільної сталої, до якої визначена ентропія, тут не відіграє жодної ролі. Фізичний зміст має не сама ентропія, а лише *різниця ентропії*.

4 Припустимо, що система переходить з рівноважного стану 1 у рівноважний стан 2 (рис. 70.2), але процес переходу є необоротним – на рисунку він зображений штриховою лінією I. Повернемо систему зі стану 2 у вихідний стан 1 квазістатично за будь-яким шляхом II. На підставі нерівності Клаузіуса можна написати

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_I \frac{\delta Q}{T} + \int_{II} \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

Через те, що процес II квазістатичний

$$\int_{II} \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2.$$

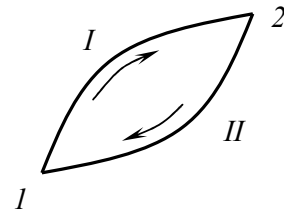


Рисунок 70.1

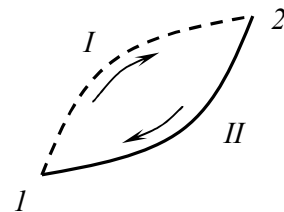


Рисунок 70.2

Тому нерівність Клаузіуса набуває вигляду

$$S_2 - S_1 \geq \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T}. \quad (70.7)$$

Тут під T потрібно розуміти температуру навколишнього середовища, за якої воно віддає системі кількість теплоти δQ .

Якщо система адіабатично ізольована, то $\delta Q = 0$, і інтеграл у (70.7) стає таким, що дорівнює нулю. Тоді

$$\boxed{S_2 - S_1 = \Delta S \geq 0}. \quad (70.8)$$

Отже, ентропія адіабатично ізольованої системи не може зменшуватися: вона або зростає, або залишається сталою. Це твердження є **формулюванням закону зростання ентропії**. Це є ще одним формулюванням другого закону термодинаміки.

§ 71 Ентропія ідеального газу

1 Обчислимо зміну ентропії ідеального газу. Спочатку розглянемо один моль речовини. Для будь-якого нескінченно малого квазістатичного процесу для ідеального газу згідно з першим законом термодинаміки можемо записати

$$\delta Q_\mu = dU_\mu + \delta A_\mu = C_V dT + PdV = C_V dT + RTdV/V.$$

Тут використали, що $dU_\mu = C_V dT$ (індекс « μ » показує, що величина характеризує один моль речовини) та відповідно до рівняння Менделєєва – Клапейрона для одного моля газу $P = RT/V$. Далі згідно з визначенням ентропії

$$S_{\mu 2} - S_{\mu 1} = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q_\mu}{T} = \int_{1 \rightarrow 2} \left(C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right).$$

Теплоємність ідеального газу C_V не залежить від температури. Тоді

$$\boxed{S_{\mu 2} - S_{\mu 1} = C_V \ln(T_2/T_1) + R \ln(V_2/V_1)}. \quad (71.1)$$

Якщо газ містить $\nu = m/\mu$ молей, то зміну ентропії для цієї кількості газу знайдемо, помноживши (71.1) на $\nu = m/\mu$ (ентропія адитивна величина),

$$\boxed{S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}. \quad (71.2)$$

Потрібно пам'ятати, що цей вираз був отриманий у припущенні, що зміна ентропії відбувається за умови сталого числа молекул у газі.

2 Коли квазістатичний процес є адіабатним, то $\delta Q = 0$, а отже, $dS = 0, S = const$. Отже, будь-який квазістатичний адіабатичний процес є процесом, що відбувається за сталої ентропії. Тому його можна також назвати *ізоентропійним процесом*.

ТЕМА 11 СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ

§ 72 Функція розподілу ймовірності. Функції розподілу молекул за швидкостями Максвелла

Розглянемо низку питань із теорії ймовірності. Вони будуть нам потрібними під час вивчення елементів статистичної фізики.

1 Нехай деяка величина x може набувати ряд дискретних значень:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

Якщо провести N вимірів величини x , то виявиться, що величина x набуває значення x_1 N_1 разів, значення x_2 – N_2 разів, ..., значення x_i – N_i разів тощо. Зрозуміло, що $N = N_1 + N_2 + \dots + N_i + \dots$. Величина

$$\boxed{P_i = \frac{N_i}{N}} \text{ за умови, що } N \rightarrow \infty \quad (72.1)$$

називається **ймовірністю** того, що величина x має значення x_i .

Ймовірність має таку властивість

$$\boxed{\sum_i P_i = \sum_i \frac{N_i}{N} = \frac{\sum_i N_i}{N} = \frac{N}{N} = 1}. \quad (72.2)$$

Тут використали, що $\sum_i N_i = N$. Отже, сума ймовірностей усіх можливих значень величини x дорівнює одиниці. Цю властивість називають **умовою нормування**.

2 Знайдемо, використовуючи поняття ймовірності, середнє значення величини x . Згідно з визначенням середнє значення $\langle x \rangle$ знаходимо як суму всіх результатів експериментів, що поділена на кількість експериментів

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_i N_i x_i}{N} = \sum_i \frac{N_i x_i}{N} = \sum_i \left(\frac{N_i}{N} \right) x_i = \sum_i P_i x_i.$$

Тут взяли до уваги, що величина x_i під час вимірів з'являлася N_i разів. Отже, середнє значення величини x знаходимо за допомогою співвідношення

$$\boxed{\langle x \rangle = \sum P_i x_i}. \quad (72.3)$$

Отримана нами формула дозволяє, знаючи ймовірності різних величин x , знайти середнє значення цієї величини.

Розглянемо деяку функцію $F = F(x)$, аргументом у якої є величина x . Будемо вважати, що ймовірність P_i того, що величина x набуде значення x_i нам відома. Тоді середнє значення функції F , як це отримано в теорії ймовірності, визначається за допомогою співвідношення

$$\boxed{\langle F \rangle = \sum P_i F(x_i)}. \quad (72.4)$$

Бачимо, що формули (72.3) та (72.4) подібні.

3 Тепер розглянемо випадок, коли величина x може набувати неперервного ряду значень від $x = a$ до $x = b$ (зокрема, a і b можуть дорівнювати $-\infty$ й $+\infty$). Прикладами таких величин можуть служити модуль поступальної швидкості або кінетична енергія молекули. У цьому разі число можливих значень x нескінченно велике, а кількість молекул N хоча й дуже велика, але скінченна. Тому питання про те, яка кількість молекул має абсолютно точно задане значення величини x не має сенсу, ця кількість дорівнює нулю.

У розглянутому випадку правомірним є питання про те, яка ймовірність dP_x того, що величина x має значення, які належать малому інтервалу $[x, x + dx]$. Зрозуміло, що за малого dx ця ймовірність буде пропорційною dx . Крім того, вона повинна Загалом залежати від того, у якому місці осі x розміщений цей інтервал, тобто є функцією x . Отже,

$$\boxed{dP_x = f(x)dx}. \quad (72.5)$$

Тут індекс x біля dP вказує на значення x , біля якого розміщений інтервал шириною dx . Функція $f(x)$, що входить у формулу (72.5), називається **функцією розподілу ймовірності, або густиною ймовірності**.

Помноживши dP_x на повне число молекул N , отримаємо кількість молекул dN_x , що мають значення x , яке знаходяться в межах інтервалу $[x, x + dx]$

$$dN_x = NdP_x = Nf(x)dx. \quad (72.6)$$

Інтеграл від dN_x , узятий за всіма можливими значеннями x (тобто «сума» dN_x), повинен дорівнювати повному числу молекул N :

$$\int dN_x = \int NdP_x = \int Nf(x)dx = N.$$

Звідси випливає, що

$$\boxed{\int dP_x = \int f(x)dx = 1}. \quad (72.7)$$

Формула (72.7) є аналогом формули (72.2) і її також називають **умовою нормування**.

4 Вираз $x dN_x$ дає суму значень x , яку мають dN_x молекул, а «сума» таких виразів, тобто

$$\int x dN_x = \int x NdP_x = N \int x dP_x, \quad (72.8)$$

дає суму значень x всіх N молекул. Розділивши цю суму на N , отримаємо *середнє (за всіма молекулами) значення величини x* :

$$\boxed{\langle x \rangle = \int x dP_x = \int x f(x) dx}. \quad (72.9)$$

Ця формула є аналогом формули (72.3).

Підставивши у формулу (72.9) замість x деяку функцію цієї величини $F(x)$, прийдемо до формули

$$\boxed{\langle F \rangle = \int F(x) f(x) dx}, \quad (72.10)$$

яка дозволяє знайти середнє значення довільної функції $F(x)$ за відомою густиною ймовірності $f(x)$. За допомогою цієї формули можна обчислити, наприклад, середнє значення x^2

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx. \quad (72.11)$$

5 Розглянемо ідеальний газ, який перебуває у стані теплової рівноваги. Ми знаємо, що в цьому разі молекули газу рухаються хаотично. Тобто різні молекули мають різні швидкості як за напрямком, так і за модулем. До того ж із часом через зіткнення ці швидкості змінюються. Поставимо перед собою завдання: *описати розподіл молекул за швидкостями*.

Для того, щоб розв'язати поставлену задачу, скористаємося таким прийомом. Уведемо уявний *простір швидкостей* (v -простір), у якому будемо відкладати уздовж прямокутних координатних осей значення компонент швидкостей v_x, v_y, v_z окремих молекул (рис. 72.1). Тоді кожній молекулі буде відповідати у просторі швидкостей точка.

Визначимо кількість молекул dN_{v_x} , компоненти швидкості v_x яких лежать в інтервалі $[v_x, v_x + dv_x]$. Зрозуміло, що dN_{v_x} буде залежати прямо пропорційно від загальної кількості молекул N . За малої dv_x ця кількість буде пропорційною ширині інтервалу dv_x . Крім того, dN_{v_x} повинна загалом залежати і від величини швидкості v_x . Узагальнюючи сказане вище, можемо записати

$$dN_{v_x} = N \cdot \varphi(v_x) \cdot dv_x. \quad (72.12)$$

Як бачимо, шукану кількість визначає функція $\varphi = \varphi(v_x)$. Ця функція називається **функцією розподілу молекул за компонентою швидкості** v_x . Неважко з'ясувати зміст цієї функції. Перетворимо вираз (72.12), використовуючи, що $dN_{v_x} / N = dP_{v_x}$ є ймовірністю того, що швидкість молекули міститься в інтервалі $[v_x, v_x + dv_x]$

$$dP_{v_x} = \varphi(v_x) \cdot dv_x. \quad (72.13)$$

Порівнюючи формулу (72.13) з (72.5), можемо стверджувати, що $\varphi(v_x)$ є густиною ймовірності розподілу молекул за компонентою швидкості v_x .

Визначимо кількість молекул dN_v , модулі швидкості v яких лежать в інтервалі $[v, v + dv]$. Зрозуміло, що dN_v буде залежати прямо пропорційно від загальної кількості молекул N . За малої dv ця кількість буде пропорційною ширині інтервалу dv . Крім того, dN_v повинна загалом залежати і від величини модуля швидкості v . Унаслідок отримуємо

$$dN_v = N \cdot F(v) \cdot dv. \quad (72.14)$$

Формулу (72.14) визначає функція $F = F(v)$, яка називається **функцією розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей** v . Як і в попередньому випадку, нескладно показати, що ця функція є густиною ймовірності розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей молекул v .

Визначимо кількість молекул dN_{v_x, v_y, v_z} , компоненти швидкостей v_x, v_y, v_z яких лежать в інтервалах $[v_x, v_x + dv_x], [v_y, v_y + dv_y], [v_z, v_z + dv_z]$. Зрозуміло, що dN_{v_x, v_y, v_z} буде залежати прямо пропорційно від загальної кількості молекул N . За малих dv_x, dv_y, dv_z ця кількість буде пропорційною об'єму у просторі швидкостей $dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$ (рис. 72.1). Крім того, dN_{v_x, v_y, v_z} повинна загалом залежати і від значень компонент швидкостей v_x, v_y, v_z . Отже, отримуємо

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = N \cdot f(v_x, v_y, v_z) \cdot dv_x dv_y dv_z. \quad (72.15)$$

Формулу (72.15) визначає функція $f(v_x, v_y, v_z)$, яка називається **функцією розподілу молекул за компонентами швидкостей** v_x, v_y, v_z . Ця функція є густиною ймовірності розподілу молекул за компонентами швидкостей молекул v_x, v_y, v_z .

Отже, задача опису молекул газу у стані теплової рівноваги зводиться до пошуку функцій $\varphi = \varphi(v_x), F = F(v), f(v_x, v_y, v_z)$, які називаються **функціями розподілу молекул за швидкостями**.

6 Вигляд функцій $\varphi = \varphi(v_x), F = F(v), f(v_x, v_y, v_z)$ встановив Максвелл. Для цього він використав рівноправність усіх напрямків руху та незалежність швидкостей v_x, v_y, v_z . Унаслідок розрахунків було отримано

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right), \quad (72.16)$$

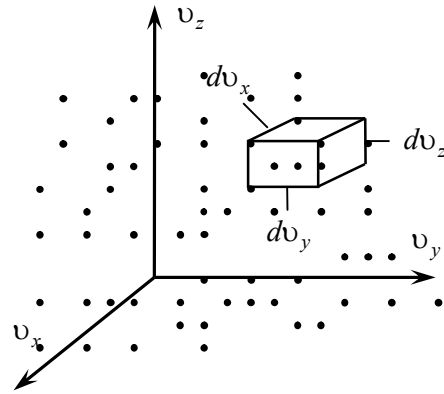


Рисунок 72.1

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2, \quad (72.17)$$

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right). \quad (72.18)$$

Формули (72.16)–(72.18) називаються **Максвеллівським розподілом молекул ідеального газу за швидкостями**. У цих формулах m – маса однієї молекули газу; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

§ 73 Середні швидкості молекул. Число ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу

Визначимо величини, які характеризують ідеальний газ, за допомогою розподілу Максвелла.

1 Знайдемо середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$. Для цього використаємо розподіл Максвелла за абсолютними значеннями швидкості (модулям швидкості) молекул

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2. \quad (73.1)$$

У цій формулі m – маса однієї молекули газу; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура. Як відомо, функція $F(v)$ є густиною ймовірності розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей. Тому для знаходження середнього значення швидкості $\langle v \rangle$ застосуємо відоме в теорії ймовірності співвідношення

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv. \quad (73.2)$$

В інтегралі (73.2) проводимо інтегрування (підсумовування) за всіма можливими значеннями модуля швидкості, тобто від нуля до нескінченності. Далі підставляємо в (73.2) розподіл $F(v)$ у явному вигляді та отримуємо

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi v^2 dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 \frac{1}{2} d(v^2) = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT} \right) \cdot u \cdot du. \end{aligned} \quad (73.3)$$

Тут провели заміну змінних $u = v^2$. Щоб знайти отриманий, інтеграл про диференціюємо відомий інтеграл (праву і ліву частини рівності)

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) dx = \frac{\exp(-\alpha x)}{(-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

за параметром α . Унаслідок цього отримуємо

$$\int_0^{\infty} -x \exp(-\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (73.4)$$

Порівнюємо (73.3) та (73.4) і бачимо, що ці інтеграли є подібними, коли взяти $\alpha = m/(2kT)$. Тому з (73.3) та (73.4) знаходимо

$$\langle v \rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) \cdot u \cdot du = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{2\pi}{\alpha^2} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Зауважимо, що інтеграл (73.3) можна також знайти, використовуючи інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \frac{1}{2} d(v^2) = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) \cdot u \cdot du = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{2kT}{m} \right) \int_0^{\infty} u \cdot d\left(\exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) \right) = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{2kT}{m} \right) \cdot \left[u \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) du = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{2kT}{m} \right) \cdot \left[0 - \left(-\frac{2kT}{m} \right) \exp\left(-\frac{m \cdot u}{2kT}\right) \right]_0^{\infty} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{2kT}{m} \right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \end{aligned}$$

Отже, *середнє значення модуля швидкості молекул* дорівнює

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kN_A T}{\pi m N_A}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}}. \quad (73.5)$$

Знайдемо середню швидкість молекул азоту ($\mu = 28$ г/моль = $28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) за кімнатної температури (293 К)

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 293}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 470 \text{ м/с.}$$

Для кисню отримуємо для тієї самої температури $\langle v \rangle = 440$ м/с, а для водню – $\langle v \rangle = 1760$ м/с.

2 Знайдемо середнє значення квадрата швидкості молекул. Для цього використаємо відоме в теорії ймовірності співвідношення

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv. \quad (73.6)$$

Далі підставляємо в (73.4) розподіл $F(v)$ у явному вигляді

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv. \quad (73.7)$$

Для того щоб провести інтегрування, використаємо відомий із математики інтеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (73.8)$$

Продиференціюємо інтеграл Пуассона (73.8) за параметром α двічі

$$\left(\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \right)'' = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)''$$

і отримаємо

$$\int_0^{\infty} x^4 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \alpha^{-5/2}. \quad (73.9)$$

Порівнюємо (73.9) та (73.7) і бачимо, що ці інтеграли є подібними, коли взяти позначення $\alpha = m/(2kT)$. Тому з (73.9) та (73.7) знаходимо

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \alpha^{-5/2} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-5/2} = \frac{3kT}{m}. \end{aligned}$$

Отже, середнє значення квадрата швидкості молекул має вигляд

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}}. \quad (73.10)$$

Середньоквадратичною швидкістю молекул називають корінь квадратний з середнього значення квадрата швидкості молекул. Тому ця швидкість дорівнює

$$\boxed{v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}. \quad (73.11)$$

3 Знайдемо найбільш імовірну швидкість молекули. **Найбільш імовірною швидкістю** $v_{\text{ім}}$ називають швидкість, яка відповідає максимальному значенню функції розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкостей $F(v)$. Функція $F(v)$ описується формулою (73.1), яку нескладно зобразити графічно (рис. 73.1).

Як відомо, для того щоб знайти максимум будь-якої функції, потрібно прирівняти її похідну до нуля, а потім з'ясувати, як змінюється знак цієї похідної у разі переходу через точку екстремуму.

Тому, опустивши у виразі (73.1) множники, що не залежать від v , отримаємо для знаходження $v_{\text{ім}}$ співвідношення

$$\frac{d}{dv} \left[\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \right] = 0.$$

Виконавши диференціювання, прийдемо до рівняння

$$\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(2 - \frac{mv^2}{kT}\right) \cdot v = 0.$$

Перший співмножник (експонента) обертається в нуль за умови $v = \infty$, а третій співмножник (v) – за умови $v = 0$. Однак із графіка на рисунку 73.1 бачимо, що значення $v = 0$ й $v = \infty$ відповідають мінімумам функції $F(v)$. Значення v , що відповідає максимуму, випливає з рівності нулю другої дужки: $(2 - mv^2/kT) = 0$. Звідси знаходимо **найбільш імовірну швидкість**

$$\boxed{v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}. \quad (73.12)$$

4 Обчислимо число z ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу. Нехай газ поміщено в закриту посудину і всі молекули однакові. Ці молекули рухаються з різними швидкостями, які відрізняються одна від одної як за величиною, так і за напрямком. Виділимо групу молекул, проекції швидкості v_x, v_y, v_z яких належать таким інтервалам: $[v_x, v_x + dv_x], [v_y, v_y + dv_y], [v_z, v_z + dv_z]$. Число таких молекул, як відомо, дорівнює

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = N \cdot f(v_x, v_y, v_z) \cdot dv_x dv_y dv_z, \quad (73.13)$$

де $f(v_x, v_y, v_z)$ є функцією розподілу Максвелла за компонентами швидкостей молекул; N – загальна кількість молекул. Зрозуміло, що в одиниці об'єму буде міститися $dn_{v_x, v_y, v_z} = dN_{v_x, v_y, v_z} / V$ молекул, де V – об'єм посудини. Розглянемо на стінці посудини малу площу ΔS (рис. 73.2). Якщо молекули рухаються в напрямку до площі ΔS , то вони можуть зіштовхнутися з нею. Якщо ж вони рухаються від площини, то зіткнень не буде. Припустимо, що молекули групи, що розглядається, рухаються в напрямку до площі ΔS , і обчислимо число dN'_{v_x, v_y, v_z} молекул такої групи, що вдаряються об цю площу за малий час dt . Побудуємо на площі ΔS , як на основі, косий циліндр із твірними $\vec{v} \cdot dt$, який розміщений усередині посудини. Кожна молекула досліджуваної групи, яка міститься в цьому циліндрі, за час dt встигне досягти площі ΔS й вдаритися об неї. Тому число ударів dN'_{v_x, v_y, v_z} буде дорівнювати числу молекул цієї групи всередині побудованого циліндра, тобто $dN'_{v_x, v_y, v_z} = dn_{v_x, v_y, v_z} dV$, де dV – об'єм циліндра. Спрямуємо координатну вісь X уздовж зовнішньої нормалі до площі ΔS . Тоді висота циліндра буде дорівнювати $v_x dt$, а його об'єм $dV = \Delta S \cdot v_x dt$. Отже,

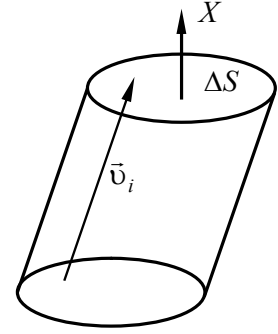


Рисунок 73.2

$$dN'_{v_x, v_y, v_z} = \Delta S \cdot dn_{v_x, v_y, v_z} \cdot v_x dt.$$

Зрозуміло, що число ударів молекул цієї групи об одиничну поверхню за одиницю часу буде дорівнювати

$$dz_{v_x, v_y, v_z} = \frac{dN'_{v_x, v_y, v_z}}{\Delta S \cdot dt} = \frac{\Delta S \cdot dn_{v_x, v_y, v_z} \cdot v_x dt}{\Delta S \cdot dt} = dn_{v_x, v_y, v_z} \cdot v_x.$$

Для того щоб знайти повну кількість ударів молекул потрібно провести підсумовування за усіма групами молекул або інтегрування. Водночас потрібно взяти до уваги, що необхідно враховувати лише ті молекули, які летять у напрямку до площі ΔS (ті молекули, що летять від площини, не вдаряються в площу ΔS), тобто мають компоненту швидкості $v_x > 0$. Також використовуючи (73.13) та явний вигляд функції розподілу Максвелла, отримуємо

$$\begin{aligned} z &= \int dz_{v_x, v_y, v_z} = \int v_x \cdot dn_{v_x, v_y, v_z} = \int v_x \cdot (N/V) \cdot f(v_x, v_y, v_z) \cdot dv_x dv_y dv_z = \\ &= \int v_x \cdot (N/V) \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) \cdot dv_x dv_y dv_z = \\ &= (N/V) \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v_x \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) \cdot dv_x \cdot \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT} \right) \cdot dv_y \cdot \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT} \right) \cdot dv_z. \end{aligned} \quad (73.14)$$

Останні два інтеграли (73.14) є інтегралами Пуассона (формулу (73.8))

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT} \right) \cdot dv_y = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT} \right) \cdot dv_z = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}},$$

де $\alpha = m/(2kT)$. Перший інтеграл (73.14) зводиться до стандартного

$$\int_0^\infty v_x \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) \cdot dv_x = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) \cdot \frac{1}{2} dv_x^2 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mu}{2kT} \right) \cdot \frac{1}{2} du = -\frac{2kT}{2m} \exp\left(-\frac{mu}{2kT} \right) \Big|_0^\infty = \frac{kT}{m}.$$

Тоді вираз (73.14) набуде вигляду

$$z = (N/V) \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{kT}{m} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\right)^2 = \frac{(N/V)}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle.$$

У цій формулі взяли до уваги, що $N/V = n$ – концентрація молекул газу в посудині, $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$ – середня швидкість молекул газу. Отже, **число ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу буде дорівнювати**

$$\boxed{z = \frac{1}{4} n \langle v \rangle}. \quad (73.15)$$

Підіб'ємо підсумок викладеного в цьому параграфі матеріалу: за допомогою функцій розподілу Максвелла можемо знайти довільні характеристики ідеального газу.

§ 74 Розподіл Больцмана

1 Як відомо, тиск у полі сили тяжіння Землі змінюється з висотою згідно з формулою (барометрична формула)

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad (74.1)$$

де p – тиск на висоті h ; p_0 – тиск коли $h = 0$; μ – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура; g – прискорення вільного падіння. Змінимо у формулі (74.1) відношення $\mu/R = (m \cdot N_A)/(k \cdot N_A) = m/k$, де m – маса молекули, k – стала Больцмана. Крім того, подамо тиск p у вигляді nkT . Унаслідок прийдемо до формули

$$nkT = n_0 kT \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Співвідношення (74.1) отримане для ізотермічної атмосфери. Тому у вищенаведеній формулі значення T в обох частинах рівності однакове, так що kT у правій і лівій частинах рівняння можна скоротити. Отже, отримуємо

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right), \quad (74.2)$$

де n – концентрація молекул (тобто їхнє число в одиниці об'єму) на висоті h ; n_0 – концентрація молекул, коли $h = 0$.

Формула (74.2) описує розподіл молекул в ізотермічній атмосфері за висотою. З неї випливає, що зі зниженням температури концентрація молекул на висотах, які відмінні від нуля, зменшується, перетворюючись на нуль за умови $T = 0$. Це означає, що за абсолютного нуля всі молекули розміщувалися б на поверхні Землі. З підвищенням температури залежність n від h стає більш слабкою, молекули виявляються розподіленими за висотою майже рівномірно. Таку поведінку концентрації за зміни температури можна пояснити тим, що вона відображає «протиріччя» двох тенденцій: 1) притягання молекул до Землі (характеризується силою mg) прагне розмістити їх на земній поверхні; 2) тепловий рух (характеризується енергією kT) прагне розкидати молекули рівномірно за всіма висотами. За кожного конкретного розподілу молекул за висотою (за кожного значення T) обидві тенденції врівноважують одна одну.

Вираз mgh є потенціальною енергією молекули ϵ_p . Тому формулу (74.2) можна написати так:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right), \quad (74.3)$$

де n_0 – концентрація молекул у тому місці простору, для якого ε_p взята такою, що дорівнює нулю; n – концентрація молекул там, де потенціальна енергія молекули дорівнює ε_p .

Л. Больцман довів, що формула (74.3) є справедливою в разі потенціального силового поля будь-якої природи для сукупності будь-яких однакових частинок, які перебувають у стані хаотичного теплового руху. У зв'язку з цим функцію (74.3) називають **розподілом Больцмана**. Отже, розподіл (74.2) є окремим випадком більш загального розподілу (74.3).

Між розподілами Больцмана й Максвелла є велика подібність: і в тому, і в іншому випадку основним множником є експонента, під знаком якої міститься відношення енергії молекули (в одному разі потенціальної, в іншому – кінетичної) до величини kT , яка визначає середню енергію теплового руху молекул.

Візьмемо елементарний об'єм $dV = dx dy dz$, який розміщено в точці з координатами x, y, z . Відповідно до формули (74.3) у межах цього об'єму міститься число молекул $dN_{x,y,z} = n \cdot dV$ або

$$dN_{x,y,z} = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(x,y,z)}{kT}\right) dx dy dz. \quad (74.4)$$

Ця формула виявляє ще більшу подібність із розподілом Максвелла і теж є **розподілом Больцмана**.

ТЕМА 12 ЯВИЩА ПЕРЕНЕСЕННЯ

§ 75 Довжина вільного пробігу молекул

1 Середня швидкість теплового руху молекул газу визначається формулою $\langle v \rangle = \sqrt{8RT / (\pi \mu)}$. Уже за кімнатної температури вона має порядок швидкості кулі рушниць. Наприклад, за умови 0°C для молекул водню, азоту й кисню ця швидкість дорівнює, відповідно, 1700 м/с, 455 м/с і 425 м/с. На ранній стадії розвитку кінетичної теорії газів настільки великі значення швидкостей молекул деяким фізиком здавалися неможливими. «Якщо швидкості молекул дійсно такі великі, – говорили вони, – то запах пахучої речовини повинен був би поширюватися від одного кінця кімнати до іншого практично миттєво». Насправді за умови відсутності конвективних потоків повітря час поширення запаху на такі відстані може становити багато хвилин і навіть години. Поширення запаху здійснюється за допомогою повільного процесу дифузії.

Повільність дифузії й аналогічних їм явищ Клаузіуса пояснив зіткненнями молекул. Молекула газу не увесь час рухається вільно, а час від часу має зіткнення з іншими молекулами. Вільно вона пролітає тільки коротку відстань від одного зіткнення до наступного. У момент зіткнення швидкість молекули різко змінюється як за модулем, так і за напрямком. Унаслідок траєкторія молекули є не прямою, а ламаною лінією з великою кількістю ланок. Молекула безладно метастає туди й сюди, і її загальне просування вперед відбувається порівняно повільно. Для кількісного опису явища Клаузіуса увів поняття **середньої довжини вільного пробігу**, тобто середньої відстані, що пролітає молекула від одного зіткнення до наступного.

2 Для обчислення середньої довжини вільного пробігу будемо користуватися моделлю твердих куль. Між зіткненнями молекули кулі рухаються за інерцією прямолінійно й рівномірно. У моменти зіткнень між молекулами розвиваються дуже великі сили відштовхування, що змінюють їхні швидкості за величиною й напрямком. Зрозуміло, така груба модель передає далеко не всі риси явищ, які відбуваються під час зіткнень. Молекули

можуть розпадатися й з'єднуватися. Атоми можуть іонізуватися, переходити в збуджені стани тощо. Усе це залишимо зараз без уваги. Модель твердих куль може приблизно правильно описати тільки процеси розсіювання молекул, у яких відбуваються зміни швидкості й напрямку руху цих частинок унаслідок зіткнень їх між собою й зі стінками посудини, у якому перебуває газ.

Для спрощення розрахунку припустимо, що рухається тільки одна молекула із сталою швидкістю v , а всі інші молекули є нерухомими. Будемо називати молекулу, яка рухається, молекулою A . Уявимо, що з молекулою A жорстко зв'язана концентрична з нею тверда сфера S удвічі більшого діаметра. Назвемо цю сферу сферою огороження молекули A . У момент зіткнення відстань між центрами молекул, що зіштовхуються, дорівнює

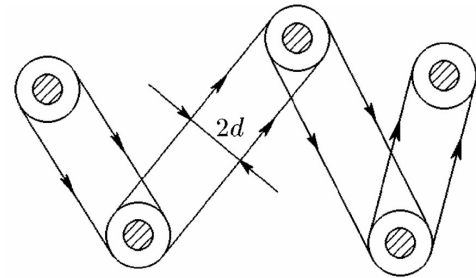


Рисунок 75.1

діаметру молекули d . Отже, у цей момент центр нерухокої молекули, з якої зіштовхнулася молекула A , виявиться на поверхні сфери огороження останньої. Очевидно, він не може проникнути всередину цієї сфери. Між двома послідовними зіткненнями молекули A її сфера огороження описує циліндр, довжина якого l є вільним пробігом молекули A . З таких циліндрів складається поверхня, що описується з часом сферою огороження (рис. 75.1). Для стислості будемо називати цю поверхню ламаним циліндром. Якщо центр іншої молекули лежить усередині або на бічній поверхні цього циліндра, то вона зіштовхнеться з молекулою A . В іншому разі зіткнення не відбудеться. Нехай V – об'єм ламаного циліндра, що описує сфера S за час Δt . Число зіткнень молекули, що рухається, з іншими молекулами за цей час Δt дорівнює середньому числу останніх в об'ємі V , Vn , де n – число молекул в одиниці об'єму. Ми припускаємо, що середня довжина вільного пробігу λ дуже велика порівняно з діаметром сфери огороження $2d$. Тоді можна знехтувати тими частинами об'єму V , які знаходяться на зламі циліндра, тобто під час обчислення V циліндр можна вважати прямим, а його висоту такою, що дорівнює добутку швидкості молекули v на час Δt . У цьому наближенні $V = \sigma \cdot v \cdot \Delta t$, де $\sigma = \pi d^2$ – площа поперечного перерізу циліндра. Отже, число зіткнень молекули, що рухається, з іншими молекулами за час Δt дорівнює $\sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n$, а за одиницю часу

$$z = \sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n / \Delta t = n \cdot \sigma \cdot v. \quad (75.1)$$

Шлях, пройдений молекулою A за час Δt , дорівнює $v \cdot \Delta t$. Розділивши його на число зіткнень за цей самий час, знайдемо середню довжину вільного пробігу молекули

$$\lambda = \frac{v \Delta t}{\sigma \cdot v \cdot \Delta t \cdot n} = \frac{1}{\sigma \cdot n}. \quad (75.2)$$

Зазвичай, формули (75.1) і (75.2) не є точними, оскільки в основу їхнього доведення покладене припущення, що рухається тільки одна молекула, а всі інші – нерухомі. Математично точний розрахунок було виконано Максвеллом з урахуванням максвеллівського розподілу молекул за швидкостями. Максвелл отримав

$$z = \sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma \cdot v \quad (75.3)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot n}. \quad (75.4)$$

Як бачимо, формули (75.3) та (75.4) суттєво залежать від величини σ . Площа перерізу сфери огороження по великому колу σ отримала назву **ефективного перетину молекули**, точніше газокінетичним ефективним перетином молекули у разі розсіювання її на інших молекулах. Якщо розсіювання відбувається на таких же самих молекулах, то ефективний перетин $\sigma = \pi d^2$, де d – діаметр молекули (мінімальна відстань, на яку зближуються молекули під час зіткнення). Зазначимо, що мінімальна відстань, на яку зближуються

молекули, залежить від енергії (температури) молекул із якими відбувається зіткнення. Тому з підвищенням температури ефективний діаметр молекули зменшується.

§ 76 Емпіричні рівняння, що описують дифузію, теплопровідність, внутрішнє тертя. Якісне пояснення явищ перенесення в газах

1 Дотепер ми вивчали рівноважні стани й оборотні процеси. Тепер перейдемо до розгляду процесів, що виникають за порушень рівноваги в системі. Якщо після порушення рівноваги залишити систему без зовнішнього впливу, який спричинив це порушення, то виникає процес релаксації, унаслідок чого система переходить у рівноважний стан. Ми будемо припускати, що внаслідок впливу ззовні нерівноважний стан системи зберігається незмінним протягом необмеженого часу, унаслідок чого процеси, що виникли в системі, будуть стаціонарними (тобто не залежними від часу). Крім того, будемо вважати, що порушення рівноваги невеликі.

Порушення рівноваги призводять до перенесення з одних місць середовища в інші або речовини, або енергії, або імпульсу тощо. Інтенсивність процесу перенесення характеризується потоком відповідної величини. **Потоком** якої-небудь величини (наприклад, частинок, маси, енергії, імпульсу, електричного заряду) називається кількість цієї величини, що проходить в одиницю часу через деяку уявну поверхню. Прикладами можуть служити потік води через поперечний переріз труби, потік електричного заряду через поперечний переріз провідника (який характеризується силою струму) тощо. Поверхня, через яку розглядається потік, може мати будь-яку форму; зокрема ця поверхня може бути замкненою.

Потік – скалярна алгебраїчна величина, знак якої визначається вибором напрямку, уздовж якого потік вважається додатним. Цей вибір є довільним. У разі замкнених поверхонь взято потік, що виходить назовні, вважають додатним, а в іншому разі – від’ємним. Ми будемо розглядати потоки через плоскі поверхні, які є перпендикулярними до осі Z . Якщо потік даної величини (частинок, енергії, імпульсу) спрямований уздовж осі Z , то будемо вважати його додатним, в іншому разі – від’ємним.

У цьому параграфі ми розглянемо три явища перенесення: дифузію (перенесення частинок або маси), теплопровідність (перенесення енергії) і внутрішнє тертя (перенесення імпульсу). Спочатку розглянемо емпіричні (тобто такі, які ґрунтуються на досвіді) рівняння цих процесів, що мають застосування до будь-яких середовищ (твердих, рідких і газоподібних). Далі буде викладено елементарну молекулярно-кінетичну теорію дифузії в газах. Молекулярно-кінетичні теорії теплопровідності та в’язкості газів є аналогічними.

2 Дифузією називається вирівнювання концентрації, що обумовлене тепловим рухом, у суміші декількох речовин. Цей процес спостерігається в газоподібних, рідких і твердих середовищах. Ми обмежимося розглядом тільки двокомпонентних сумішей.

Нехай в одиниці об’єму суміші міститься n_1 молекул однієї компоненти і n_2 молекул іншої компоненти. Число молекул даного сорту в одиниці об’єму будемо називати концентрацією цієї компоненти.

Припустимо, що концентрації n_1 й n_2 змінюються уздовж осі Z (від координат x і y концентрації не залежать). На рисунку 76.1 подано залежність концентрацій двокомпонентної газової суміші від z .

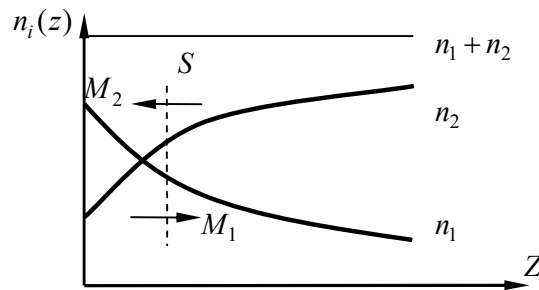


Рисунок 76.1

Оскільки тиск і температура всюди однакові, сума $n_1 + n_2$ стала. Швидкість цієї зміни характеризується похідними dn_1/dz й dn_2/dz . Похідну dn/dz зазвичай називають градієнтом концентрації (це не є точним визначенням, насправді градієнт є вектором).

Щоб спостерігати процес дифузії в чистому вигляді, будемо вважати тиск у рідких і газоподібних сумішах таким, що не залежить від z . Через це гідродинамічні потоки не виникають. У цьому разі похідні dn_1/dz й dn_2/dz мають різні знаки (рис. 76.1).

Унаслідок теплового руху виникає потік молекул кожної з компонент у напрямку зменшення її концентрації. Експериментально встановлено, що потік молекул i -ї компоненти через перпендикулярну до осі Z поверхню S (N_i – кількість молекул i -го сорту, які проходять через поверхню S за одиницю часу) визначається рівнянням

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S, \quad (76.1)$$

де D – коефіцієнт пропорційності, який називається **коефіцієнтом дифузії**. Отже, потік молекул пропорційний градієнту концентрації. Знак мінус у рівнянні (76.1) обумовлений тим, що потік спрямований у напрямку зменшення концентрації.

Помноживши обидві частини формули (76.1) на масу молекули i -ї компоненти m_i , отримаємо рівняння дифузії для потоку маси i -ї компоненти (M_i – кількість маси i -го сорту речовини, яка проходить через поверхню S за одиницю часу)

$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S. \quad (76.2)$$

Тут $\rho_i = n_i m_i$ парціальна густина i -ї компоненти.

Потік маси M вимірюється в кг/с; парціальна густина ρ – у кг/м³; поверхня S – у м²; координата z – у метрах. Отже, коефіцієнт дифузії D вимірюється в м²/с, тобто має розмірність квадрата довжини, поділеного на час. Емпіричне рівняння дифузії (76.1), (76.2) називають **законом Фіка**.

3 Теплопровідність. Якщо в деякому середовищі створити уздовж осі Z градієнт температури, то виникає тепловий потік (q – кількість теплоти, яка проходить через поверхню S за одиницю часу), який задовольняє рівнянню

$$q = -\chi \frac{dT}{dz} S. \quad (76.3)$$

Тут q – тепловий потік через поверхню S , що перпендикулярна до осі Z ; dT/dz – градієнт температури (точніше, проекція градієнта температури на вісь z); χ – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища й називається **теплопровідністю** (коефіцієнт теплопровідності). Знак мінус у рівнянні (76.3) відображає той факт, що теплота переходить у напрямку зменшення температури, у зв'язку з чим знаки q і dT/dz протилежні.

Оскільки одиницею теплового потоку q є джоуль у секунду, тобто ват, χ вимірюється у ватах на метр-кельвін (Вт/(м · К)). Рівняння (76.3) являє собою *аналітичне формулювання закону, встановленого Фур'є в 1822 р., яке має його ім'я*.

4 Внутрішнє тертя. Формула Ньютона для внутрішнього тертя, що визначає силу внутрішнього тертя в рідинах, справедлива також і для газів. Напишемо цю формулу, замінивши позначення v на u

$$F = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S \quad (76.4)$$

(заміна v на u викликана тим, що буквою v ми будемо позначати невпорядковану швидкість молекул газу). У цій формулі η – коефіцієнт пропорційності, який називають в'язкістю (коефіцієнт в'язкості); S – площа границі між шарами поверхні, на яку діє сила F ; du/dz – величина, що показує, як швидко змінюється швидкість потоку рідини або газу в напрямку Z ,

Через поверхню S пролітають молекули, що перетерпіли останнє зіткнення на різних відстанях від цієї поверхні. Однак у середньому останнє зіткнення відбувається на відстані від S , яке дорівнює середній довжині вільного пробігу λ . Тому за n_1' природно взяти значення $n_1(z-\lambda)$, а за n_1'' – значення $n_1(z+\lambda)$. Тоді, узявши до уваги формули (76.8) і (76.9), можна написати, що

$$N_1 = \frac{1}{6} \langle v \rangle S [n_1(z-\lambda) - n_1(z+\lambda)]. \quad (76.10)$$

Різницю значень функції $n_1(z)$ у формулі (76.10) можна подати у вигляді

$$n_1(z-\lambda) - n_1(z+\lambda) \approx -\frac{dn_1}{dz} \cdot 2\lambda. \quad (76.11)$$

Тут використали відому з математики наближену формулу $f(z+\alpha) \approx f(z) + \alpha \cdot df/dz$ для достатньо малих α . Підставивши вираз (76.11) у формулу (76.10), отримаємо, що

$$N_1 = -\left(\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda\right) \frac{dn_1}{dz} S. \quad (76.12)$$

Отже, ми не тільки дійшли до рівняння (76.1), але й отримали вираз для коефіцієнта дифузії

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda. \quad (76.13)$$

Більш точний розрахунок призводить до такої самої формули, але з трохи відмінним числовим коефіцієнтом.

Провівши аналогічні обчислення для другої компоненти газової суміші, ми прийдемо до такого ж виразу, як (76.12), із заміною n_1 на n_2 . Отже, коефіцієнт дифузії має однакове значення для обох компонент суміші.

Ми припустили, що молекули обох компонент однакові за масою й ефективними перетинами. Тому вираз (76.12) визначає коефіцієнт самодифузії, тобто дифузії молекул деякого газу в середовищі молекул того самого газу (подібного газу).

ТЕМА 13 РЕАЛЬНІ ГАЗИ ТА РІДКИЙ СТАН

§ 77 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса

1 У разі збільшення густини газів починають відігравати все більше роль об'єм молекул газу та їхня взаємодія між собою. У цьому разі модель ідеального газу й рівняння ідеального газу (Менделєєва – Клапейрона) для одного моля

$$p_{id} V_\mu = RT \quad (77.1)$$

стають непридатними. Тут p_{id} – тиск ідеального газу на стінки посудини; V_μ – об'єм посудини, у якому міститься один моль газу; T – температура газу; R – універсальна газова стала.

Для опису поведінки реальних газів було запропоновано багато різних рівнянь. Найпростішим із них і водночас таким, що дає досить гарні результати, виявилось рівняння, запропоноване Ван-дер-Ваальсом у 1873 р. Це рівняння було отримано шляхом внесення поправок у рівняння (77.1) і для одного моля газу має вигляд (*рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля речовини*)

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right) (V_\mu - b) = RT. \quad (77.2)$$

Тут a і b – **сталі Ван-дер-Ваальса**, що мають для різних газів різні значення, які визначаються експериментально; p – тиск реального газу на стінки посудини. Стала a вимірюється в $\text{Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$, стала b – у $\text{м}^3/\text{моль}$. Обґрунтуємо внесені в рівняння (77.2) поправки.

2 Кожна молекула реального газу має власний об'єм. Тому молекули рухаються в посудині менш вільно, ніж «точкові» молекули ідеального газу. Ван-дер-Ваальс урахував власний об'єм молекул газу заміною в рівнянні Менделєєва – Клапейрона (77.1) повного об'єму посудини V_μ , який займає один моль речовини, на так званий «вільний» об'єм

$$V'_\mu = V_\mu - b, \quad (77.3)$$

у якому можуть рухатися молекули. Тут b – поправка, стала Ван-дер-Ваальса, яка залежить від власного об'єму молекул.

Доведемо, що поправка b у чотири рази більше за власний об'єм усіх N_A молекул одного моля газу (N_A – стала Авогадро).

Нехай у посудині містяться тільки дві молекули. Центр кожної з цих молекул не може наблизитися до центра іншої молекули на відстань, меншу за діаметр молекули d (рис. 77.1). Отже, для центрів обох молекул є недоступним сферичний об'єм радіусом d , тобто об'єм, який дорівнює $\frac{4}{3}\pi d^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$ восьми об'ємам молекули. У розрахунку

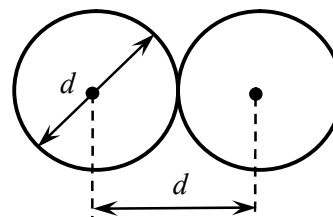


Рисунок 77.1

на одну з двох молекул недоступним виявляється вдвічі менший об'єм, який дорівнює об'ємам чотирьох молекул. Оскільки молекули, зазвичай, зіштовхуються попарно (зіткнення трьох і більше молекул малоімовірні), отриманий нами результат справедливий для будь-якої пари молекул. Звідси випливає, що в розрахунку на кожную молекулу газу недоступним буде об'єм, який дорівнює чотирьом об'ємам молекули, а для всіх молекул в одному молі – об'єм b , який дорівнює чотирьом сумарним об'ємам молекул газу

$$b = N_A \cdot 4 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3. \quad (77.4)$$

Отриманий нами результат потрібно розглядати не як абсолютно точний, а лише як оціночний.

3 Розглянемо тепер вплив сил молекулярного притягання.

Змінімо модель газу. Молекули будемо вважати точками, між якими діють сили притягання. Сили притягання між молекулами в разі збільшення відстані між ними швидко зменшуються. Тому помітна взаємодія молекул між собою відбувається лише в межах невеликої відстані r , яка називається **радіусом молекулярної дії** і яка дорівнює декільком ефективним діаметрам молекули. Сфера радіусом r називається **сферою молекулярної дії**.

Якщо ця сфера цілком розміщена всередині газу, то сили, що діють на розглянуту молекулу з боку навколишніх молекул, у середньому врівноважуються (рисунок 77.2, ліворуч). Але цього не буде, коли молекула перебуває поблизу границі газу зі стінкою (рисунок 77.2, праворуч). Тут сфера молекулярної дії лише частково міститься у газі. Кількість молекул, що тягнуть розглянуту молекулу усередину газу, є більшою порівняно з молекулами, що тягнуть її назовні. Отже, поблизу стінки виникає шар газу, товщина якого дорівнює радіусу сфери молекулярної дії r . На кожную молекулу, що міститься в цьому шарі, діє сила F , яка спрямована всередину газу. Величина сили F максимальна, коли молекула перебуває біля самої стінки, і зменшується у разі видалення від неї. Коли молекула газу летить до стінки, а потім відбивається від неї, то змінюється її імпульс. На відміну від ідеальних газів, імпульс молекул, що налітають, змінюється не тільки під дією сил тиску з боку стінки, але й під дією сил, з якими їх тягнуть усередину газу молекули шару біля стінки.

Зокрема під дією цих останніх сил молекула може відбитися всередині цього шару, не долетівши до стінки. Це призводить до того, що тиск газу на стінку посудини у разі реального газу стає меншим, ніж у разі ідеального газу на величину Δp . Проведемо оцінювання величини Δp .

Зрозуміло, що зміна тиску Δp пропорційна середній силі \bar{F} , що діє на одну молекулу з боку молекул шару біля стінки, а також кількості молекул, які падають на стінку (чим більша концентрація молекул n , тим більша кількість молекул, що падають на стінку), на які сила \bar{F} діє. Тому

$$\Delta p \sim n \cdot \bar{F}. \quad (77.5)$$

Також візьмемо до уваги, що середнє значення сили \bar{F} , що діє на одну молекулу з боку молекул шару біля стінки, залежить від кількості молекул у сфері молекулярної дії, яка, зі свого боку, залежить від концентрації молекул n . Отже, $\bar{F} \sim n$. Отже, зменшення тиску Δp на стінку посудини для реального газу порівняно з ідеальним буде пропорційною квадрату концентрації

$$\Delta p \sim n \cdot \bar{F} \sim n \cdot n = (N/V)^2 \sim 1/V^2$$

(N – кількість молекул у посудині; V – об'єм посудини) або для одного моля речовини

$$p_{id} - p = \Delta p_\mu = a/V_\mu^2, \quad (77.6)$$

де a – стала Ван-дер-Ваальса, яка пов'язана з притяганням молекул між собою.

4 Зрозуміло, що такі чинники як притягання молекул між собою та відмінний від нуля об'єм молекул діють одночасно. Для того щоб це врахувати, підставимо в (77.1) замість тиску ідеального газу співвідношення, що отримали з (77.6)

$$p_{id} = p + \Delta p_\mu = p + a/V_\mu^2,$$

а також замість об'єму посудини V_μ , який займає один моль речовини так званий «вільний» об'єм (77.3) $V_\mu - b$. Унаслідок цього отримаємо рівняння Ван-дер-Ваальса (77.2).

Рівняння Ван-дер-Ваальса легко можна записати для довільної кількості молей. Для цього потрібно врахувати, що ν молей газу займають у ν разів більший об'єм, ніж один моль (за однакових температур і тиску)

$$V = \nu \cdot V_\mu \text{ або } V_\mu = V/\nu. \quad (77.7)$$

Підставивши це співвідношення до (77.2), **отримаємо рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної кількості речовини**

$$\left(p + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2} \right) (V - b \cdot \nu) = \nu RT. \quad (77.8)$$

§ 78 Ізотерми Ван-дер-Ваальсівського газу. Критичні температура, тиск, об'єм і їхній зв'язок із сталими Ван-дер-Ваальса

1 Перейдемо до дослідження рівняння Ван-дер-Ваальса

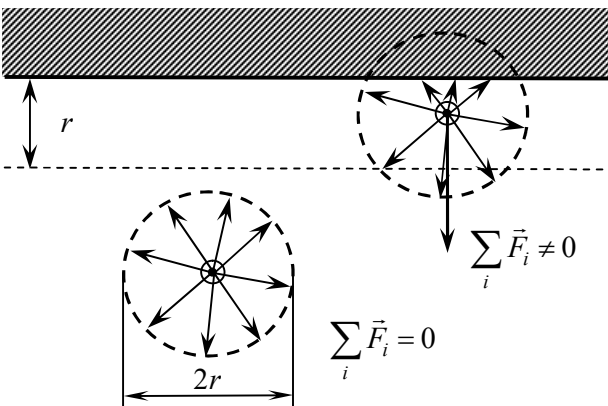


Рисунок 77.2

$$\left(p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} \right) (V - b \cdot v) = vRT.$$

Розкриємо дужки й помножимо отримане співвідношення на V^2 . Унаслідок рівняння Ван-дер-Ваальса набуває вигляду

$$pV^3 - (bv \cdot p + vRT)V^2 + av^2V = ab \cdot v^3. \quad (78.1)$$

Співвідношення (78.1) є кубічним рівнянням щодо V , коефіцієнти якого залежать від параметрів p і T . Це рівняння має три розв'язки, причому залежно від значень коефіцієнтів або всі три розв'язки є дійсними, або один розв'язок є дійсним, а інші два – комплексними. Об'єм може визначатися тільки дійсним числом, тому комплексні розв'язки не мають фізичного змісту й повинні бути відкинутими.

На рисунку 78.1 зображені ізотерми Ван-дер-Ваальса для декількох значень температури ($T' < T'' < T'''$), K – критична точка. Зафіксуємо температуру, наприклад, T' . Для кожного значення тиску p' з рівняння (78.1) отримаємо значення об'єму V . У разі, коли буде три дійсних кореня, то позначимо їх V'_1, V'_2, V'_3 . Зрозуміло, що можливий випадок, коли буде один дійсний корінь. Унаслідок цього отримаємо ізотерму. Аналогічно можемо побудувати ізотерми для різних температур, наприклад, T', T'', T''' .

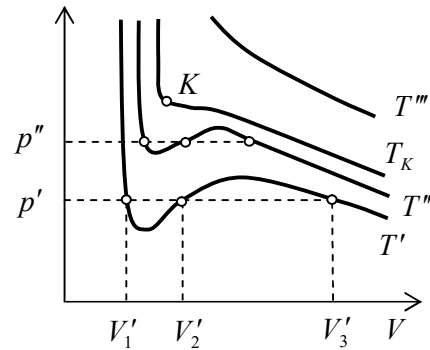


Рисунок 78.1

З цих ізотерм випливає, що з підвищенням температури розходження між трьома дійсними розв'язками для об'єму зменшується (порівняйте ізотерми за умови T' і T''). Починаючи з деякої температури T_k , для кожного газу різної, за будь-якого тиску дійсним виявляється тільки один розв'язок (78.1). Ця температура T_k називається **критичною**.

За підвищення температури точки, що відповідають значенням об'єму V'_1, V'_2 і V'_3 усе більше зближуються і зрештою зливаються за критичної температури в одну точку K , яку називають **критичною точкою** (рис. 78.1). Для критичної ізотерми критична точка K є точкою перегину. Їй відповідають три розв'язки рівняння (78.1), що збігаються між собою. Дотична до ізотерми в точці K є границею, до якої прямують січні p', p'' та інші за наближення температури до критичної. Це означає, що дотична до ізотерми в точці K , як і всі січні, є паралельною осі V . Тому похідна dp/dV у точці K дорівнює нулю. Крім того, у точці перегину повинна бути дорівнювати нулю і друга похідна d^2p/d^2V . Об'єм і тиск, який відповідає точці K , називають відповідно **критичним об'ємом** V_k і **критичним тиском** p_k .

2 Знайдемо, на підставі рівняння Ван-дер-Ваальса критичні температуру T_k , критичний об'єм V_k та критичний тиск p_k . Для цього розв'яжемо рівняння (78.1) щодо p :

$$p = \frac{vRTV^2}{V^2(V - vb)} - \frac{av^2(V - bv)}{V^2(V - vb)} = \frac{vRT}{(V - vb)} - \frac{av^2}{V^2} \quad (78.2)$$

і знайдемо першу та другу похідні

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V - vb)^2} + \frac{2a}{V^3}, \quad \frac{d^2p}{dV^2} = +\frac{2RT}{(V - vb)^3} - \frac{6a}{V^4}.$$

Розглянемо один моль речовини $\nu = 1$. Поклавши $T = T_K$, $V = V_{\mu,K}$, p_K , знайдемо значення похідних у критичній точці, які повинні дорівнювати нулю

$$-\frac{RT_K}{(V_{\mu,K} - b)^2} + \frac{2a}{V_{\mu,K}^3} = 0, \quad \frac{2RT_K}{(V_{\mu,K} - b)^3} - \frac{6a}{V_{\mu,K}^4} = 0. \quad (78.3)$$

На додаток до цих двох рівнянь напишемо рівняння (78.2) для критичної точки

$$p_K = \frac{RT_K}{V_{\mu,K} - b} - \frac{a}{V_{\mu,K}^2}. \quad (78.4)$$

Розв'язання системи (78.3) і (78.4) дає значення для параметрів у критичній точці

$$V_{\mu,K} = 3b, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}, \quad T_K = \frac{8a}{27bR}. \quad (78.5)$$

Отже, знаючи сталі Ван-дер-Ваальса a й b , можна знайти $V_{\mu,K}$, p_K й T_K , які називаються **критичними величинами**. І, навпаки, за відомим значенням критичних величин можуть бути знайдені значення сталих Ван-дер-Ваальса.

§ 79 Експериментальні ізотерми

1 В ізотермах Ван-дер-Ваальса, що відповідають температурам, нижче за критичну (наприклад, рис. 79.1), є область, у якій речовина поводить ся протиприродно. У цій області, що простирається від «дна» впадини до «вершини» горба, збільшення об'єму супроводжується зростанням тиску (штрихова лінія). Однорідної речовини з такими властивостями бути не може. Тому доводиться думати, що в зазначеній області речовина стає неоднорідною, тобто, розшаровується на дві фази.

У термодинаміці **фазою** називається сукупність однорідних, однакових за своїми властивостями частин системи. Якщо, наприклад, у закритій посудині міститься вода, у якій плавають шматочки льоду, то рідка вода являє собою одну фазу, усі шматочки льоду – другу, а суміш пари води й повітря над рідиною – третю фазу термодинамічної системи.

2 Щоб отримати ізотерму експериментальним шляхом, потрібно помістити газ у з'єднану з манометром термостатовану посудину, яка закрита поршнем, що може переміщуватися (термостатом називається пристрій для підтримки сталої температури). Потім, рухаючи повільно поршень, потрібно робити одночасно вимірювання тиску й об'єму.

На рисунку 79.1 зображені результати подібного дослідження для азоту, а саме ізотерму Ван-дер-Ваальса для азоту за умови 110 К (критична температура 126 К), $p_{н.п}$ – тиск насиченої пари. Спочатку зі зменшенням об'єму тиск газу зростає, причому хід ізотерми досить добре описує рівняння Ван-дер-Ваальса. Однак, починаючи з об'єму V_1 , тиск у посудині перестає змінюватися. Замість завитка 1–4–3–2 на експериментальній ізотермі маємо прямолінійну ділянку 1–2. Речовина тут розшаровується на дві фази: рідку й газоподібну (у цьому можна переконатися, зробивши стінки посудини прозорими). У міру зменшення об'єму конденсується (тобто переходить у

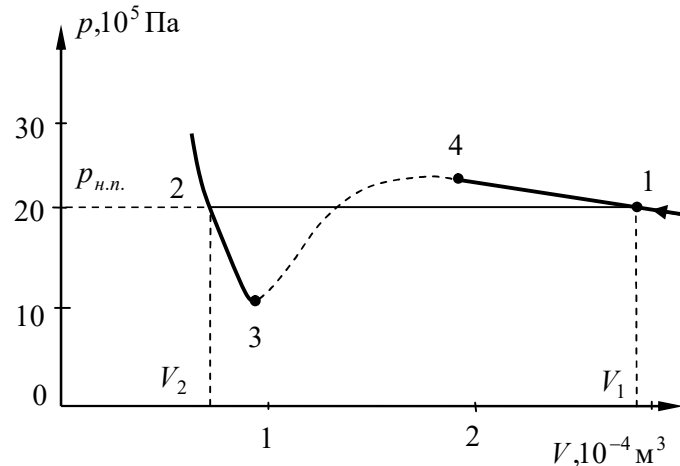


Рисунок 79.1

рідку фазу) усе більша частина речовини, причому процес конденсації відбувається за сталого тиску $p_{н.п.}$.

За умови досягнення об'єму V_2 процес конденсації закінчується й речовина знову стає однорідною (але рідкою). Подальше зменшення об'єму супроводжується швидким зростанням тиску, причому хід ізотерми знову приблизно відповідає рівнянню Ван-дер-Ваальса.

Отже, рівняння Ван-дер-Ваальса описує не тільки газоподібний стан речовини, але охоплює також перехід речовини в рідкий стан і процес стиснення рідини.

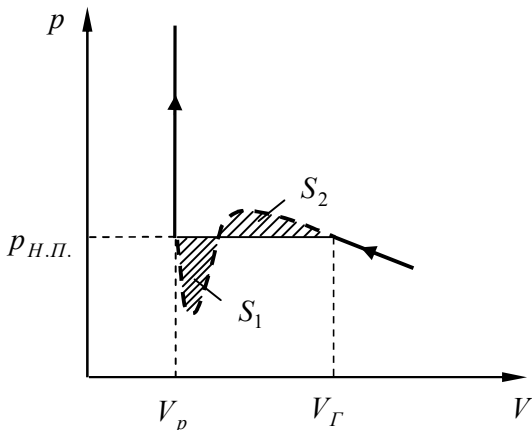


Рисунок 79.2 – Заштриховані площі однакові: $S_1 = S_2$. $V_{Г}$ – мінімальний об'єм газу; V_p – максимальний об'єм рідини

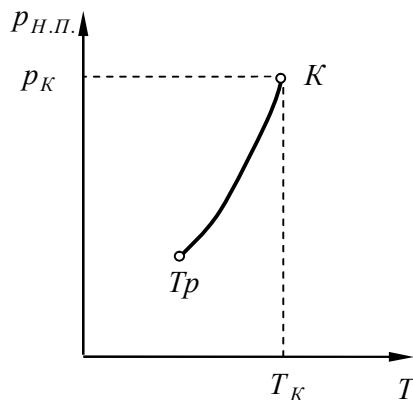


Рисунок 79.3 – Залежність тиску насиченої пари від температури: K – критична точка; T_p – потрійна точка

Із зіставлення експериментальної ізотерми з ізотермою Ван-дер-Ваальса бачимо, що ці ізотерми досить добре збігаються на ділянках, що відповідають однорідним станам речовини, але поведуться зовсім неоднаково в області розшарування на дві фази. Замість S -подібної ділянки ізотерми Ван-дер-Ваальса, в експериментальній ізотермі є в цій області прямолінійна горизонтальна ділянка. Ґрунтуючись на законах термодинаміки, можна довести, що охоплювані впадиною й горбом площі S_1 й S_2 на рисунку 79.2 однакові.

3 У станах, що відповідають горизонтальній ділянці експериментальної ізотерми, спостерігається рівновага між рідкою й газоподібною фазами речовини. Газ, що перебуває в рівновазі зі своєю рідиною, називається **насиченою парою**. Тиск $p_{н.п.}$, за якого здійснюється рівновага за даної температури, називається **тиском насиченої пари**. Цей тиск зростає з температурою (рис. 79.3).

На рисунку 79.4 зображені експериментальні ізотерми для ряду значень температури. З рисунка бачимо, що з підвищенням температури горизонтальна ділянка ізотерми скорочується і стягується в точку K за критичної температури. Відповідно зменшується розходження в густинах рідини й насиченої пари (рис. 79.5). За критичної температури це розходження повністю зникає й речовина стає однорідною. З рисунка 79.4 випливає, що насичена пара може існувати лише за температурах нижче за критичну. Тому графік залежності $p_{н.п.}$ від T на рисунку 79.3 закінчується в критичній точці.

Виділимо подумки частину газу, що міститься у невеликому об'ємі ΔV . Коли газ перебуває у звичайному (некритичному) стані, збільшення ΔV призводить до зменшення в ньому тиску, унаслідок чого навколишній газ підтискає його до первісного значення. Зменшення ΔV супроводжується збільшенням у ньому тиску, унаслідок чого об'єм ΔV , «потіснивши» своє оточення, знову набуває колишнього значення. У такий спосіб усуваються помітні неоднорідності газу.

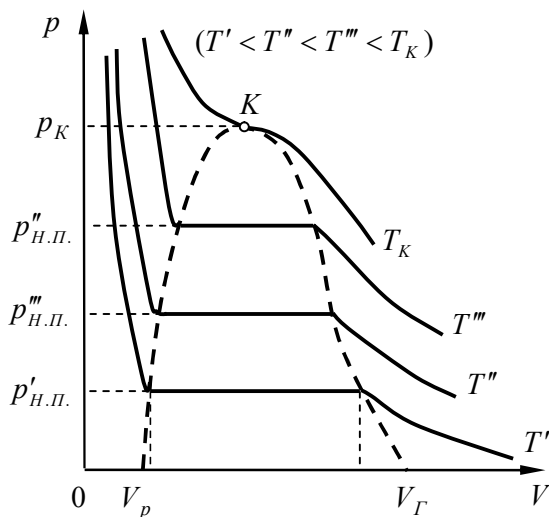


Рисунок 79.4 – Сукупність експериментальних ізотерм, що відповідають різним температурам. Область під дзвоноподібною штриховою кривою є областю двофазних станів речовини

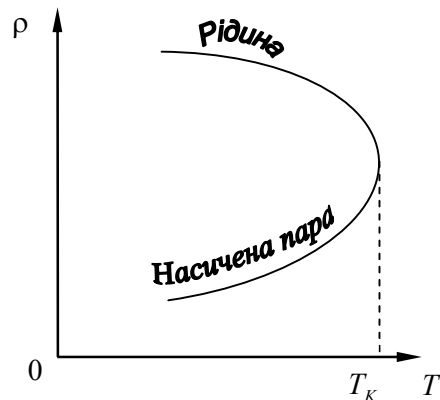


Рисунок 79.5 – Залежність густини рідини й насиченої пари від температури

Інакше відбувається у разі, коли речовина перебуває у критичному стані. Оскільки в критичній точці $dp/dV=0$, випадкове збільшення (або зменшення) об'єму ΔV не супроводжується зменшенням (відповідно зростанням) тиску, тому відхилення значень ΔV від середнього можуть бути досить великими. Цим пояснюється той факт, що речовина в критичному стані виявляється дуже неоднорідною.

Проведена на рисунку 79.4 через крайні точки горизонтальних ділянок дзвоноподібна штрихова крива обмежує область двофазних станів речовини. За температур вище за критичну речовина за будь-якого тиску залишається однорідною. За таких температур жодним стисненням не може бути здійснений перехід речовини в рідкий стан.

4 Дзвоноподібна крива й ділянка критичної ізотерми, що лежить ліворуч від точки K , ділять діаграму p, V на три області (рис. 79.6). Похилим штрихуванням позначена область однорідних рідких станів речовини. Горизонтальним штрихуванням позначена область двофазних станів. Праворуч від дзвоноподібною кривою і верхньої гілки критичної ізотерми розташовується область однорідних газоподібних станів. У ній іноді виділяють позначену буквою «П» частину, яку називають областю пари. Будь-який стан у цій області відрізняється від станів, що лежать в області «Г», тим, що при ізотермічному стисненні речовина, що перебувала спочатку в такому стані, перетерплює процес зрідження. При температурах вищих критичної, як уже відзначалося, речовина не може бути зрідженою ніяким стисненням.

На рисунку 79.7 зображено процес, за допомогою якого можна здійснити перехід із рідкого стану в газоподібний (або назад) без розшарування речовини на дві фази. У ході такого процесу речовина весь час залишається однорідною.

5 На ділянках 1–4 і 2–3 на рисунку 79.1 речовина щодо залежності тиску від об'єму поводить себе нормально. Тому, здавалося б, ці ділянки могли б реалізуватися. Дійсно, за відомих умов стани, що відповідають цим ділянкам, можуть здійснюватися. Однак ці стани не цілком стійкі: досить, наприклад, потрапляння в пару або рідину порошини для того, щоб речовина розпалася на дві фази. Подібні не цілком стійкі стани називаються **метастабільними**. Речовина в станах 1–4 називається **пересиченою парю**, а в станах 2–3 – **перегрітою рідиною**.

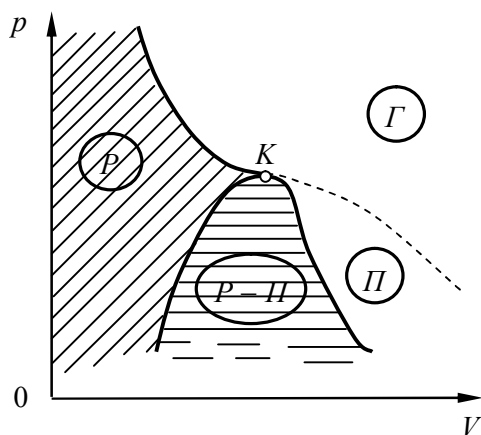


Рисунок 79.6 – Области рівноважних станів речовини на діаграмі p, V

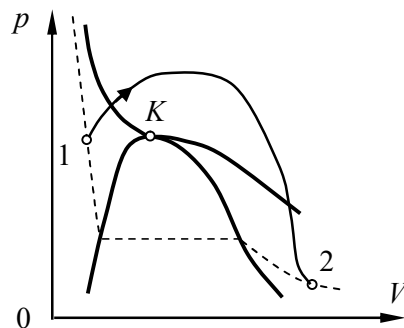


Рисунок 79.7 – Здійснювши процес, що йде в обхід двофазної області, можна перетворити рідину в газ без розшарування на дві фази

За досить низької температури ділянка ізотерми 2–3 (рис. 79.1) «поринає» під вісь V , тобто значення p стають від’ємними. Речовина під від’ємним тиском перебуває в стані не стиснення, а розтягнення. Такі стани також можуть бути реалізовані. Можна, наприклад, отримати розтягнуту ртуть. Для цього потрібно занурити в ртуть запаяну з одного кінця довгу скляну трубку й, повернувши її запаяним кінцем нагору, обережно витягати назовні. У такій трубці можна отримати стовп ртуті, що значно перевищує 760 мм. Ртуть у трубці буде перебувати в стані розтягання, тобто під від’ємним тиском.

§ 80 Фаза в термодинаміці. Фазове перетворення першого і другого роду. Приклади фазових перетворень. Діаграма станів

1 Нагадаємо, що в *термодинаміці фазою називається сукупність однорідних, однакових за своїми властивостями частин системи*. Різні фази однієї й тієї самої речовини можуть перебувати в рівновазі, дотикаючись одна до одної. Така рівновага спостерігається лише в обмеженому інтервалі температур, причому кожному значенню температури T відповідає своє значення тиску p . Сукупність станів рівноваги двох фаз зображується на діаграмі p, T лінією

$$p = f(T). \quad (80.1)$$

Прикладом може служити крива на рисунку 79.3 (попередній параграф).

На діаграмі p, V сукупність рівноважних станів зображується відрізком горизонтальної прямої, причому кожній парі значень p і T відповідає свій відрізок (рис. 79.4). Стани, що відповідають різним точкам такого відрізка, відрізняються розподілом речовини між фазами. Кінцям відрізка відповідають однофазні стани. За умови переходу речовини з однієї фази в іншу, точка, що зображує стан на діаграмі p, V , переміщується уздовж відрізка. Уся сукупність станів, що зображена на діаграмі p, V горизонтальним відрізком прямої, на діаграмі p, T зображується одною точкою, що визначає значення p й T , за яких здійснюється перехід.

Перехід речовини з однієї фази в іншу, зазвичай, супроводжується поглинанням або виділенням деякої кількості теплоти, яка називається *теплотою фазового перетворення*.

Наприклад, у разі танення льоду поглинається теплота плавлення, у разі замерзання води виділяється така ж кількість теплоти.

Переходи, що супроводжуються поглинанням або виділенням теплоти, називаються фазовими перетвореннями першого роду. Існують перетворення однієї кристалічної модифікації (різновиду) речовини в іншу, які не зв'язані поглинанням або виділенням теплоти. Їх називають фазовими перетвореннями другого роду.

За фазових перетворень другого роду густина речовини не змінюється. Існує стрибкоподібна зміна питомої теплоємності і деяких інших характеристик. Прикладом перетворення другого роду може служити перехід заліза з феромагнітного стану в парамагнітний, який відбувається за температури Кюрі.

До фазових перетворень другого роду потрібно віднести перехід у надпровідний стан, виконаний за відсутності магнітного поля, і перехід між двома рідкими фазами гелію, які називають гелієм-I і гелієм-II.

2 Три фази однієї й тієї самої речовини (тверда, рідка й газоподібна, або рідка й дві тверді, або, нарешті, три тверді) можуть перебувати в рівновазі тільки за визначених значень температури й тиску, яким на діаграмі p, T відповідає точка, і яку називають **потрійною**.

У термодинаміці доводиться, що рівновага більш ніж трьох фаз однакової речовини є неможливою. Це твердження підтверджується дослідом.

У потрійній точці сходяться три криві рівноваги фаз, узятих попарно (рис. 80.1). Крива випаровування нам уже відома (рис. 79.3).

Крива плавлення визначає умови рівноваги між твердою й рідкою фазами речовини (наприклад, між рідкою водою й льодом); ця крива йде в нескінченність. **Сублімацією** називається безпосередній (без плавлення) перехід із кристалічного стану в газоподібний. Крива сублімації визначає умови рівноваги між твердою (кристалічною) і газоподібною фазами речовини.

Діаграми, подібні до зображеної на рисунку 80.1, називаються **діаграмами станів** речовини. Вони визначають рівноважні стани, тобто такі стани, у яких речовина за незмінних зовнішніх умов перебуває нескінченно довго. Будують діаграми стану на основі експериментальних даних.

Криві плавлення, випаровування й сублімації розбивають координатну площину p, T на три області. Ліворуч від кривої сублімації і плавлення лежить область твердої фази, між кривими плавлення й випаровування є область рідких станів, і, нарешті, праворуч від кривої випаровування й сублімації є область газоподібних станів. Будь-яка точка в одній із цих областей зображує відповідний однофазний стан речовини. Будь-яка точка, що лежить на одній із кривих, що розмежовує області, визначає умови рівноваги двох відповідних фаз речовини. Потрійна точка зображує стан рівноваги всіх трьох фаз.

Діаграма стану дозволяє визначити, які перетворення матиме речовина за різних процесах. Наприклад, якщо взяти речовину в стані, який зображено точкою 1 на рисунку 80.1, і його ізобарично нагріти, то речовина буде проходити послідовність станів, які зображені штриховою прямою 1–2, – кристалічний, рідкий, газоподібний. Якщо ж взяти речовину у стані, який зображений точкою 3, і також ізобарично нагріти, то послідовність станів 3–4 буде іншою: кристали перетворюються безпосередньо в газ, минаючи рідку фазу.

З рисунку 80.1 випливає, що рідка фаза може перебувати в рівновазі тільки за тиску, не меншому за тиск у потрійній точці p_{TP} . У більшості звичайних речовин тиск у потрійній точці значно менше за атмосферний, унаслідок чого перехід цих речовин із твердого стану в

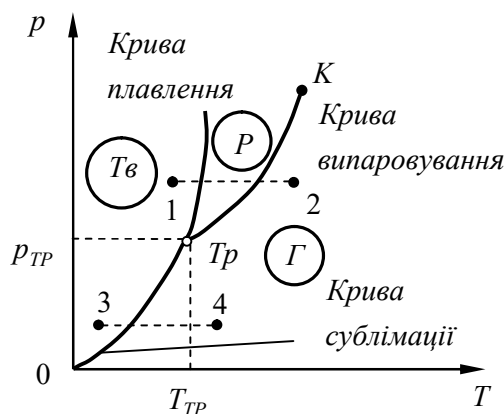


Рисунок 80.1 – Діаграма стану речовини

газоподібний здійснюється через проміжну рідку фазу. Наприклад, у воді $p_{TP} = 6,10 \text{ ГПа}$ (4,58 мм рт. ст.). У разі вуглекислоти (CO_2) $p_{TP} = 5,11 \text{ атм}$. Тому за атмосферного тиску вуглекислота може існувати тільки у твердому й газоподібному станах. Тверда вуглекислота (називають сухим льодом) на повітрі сублімує, а не тане.

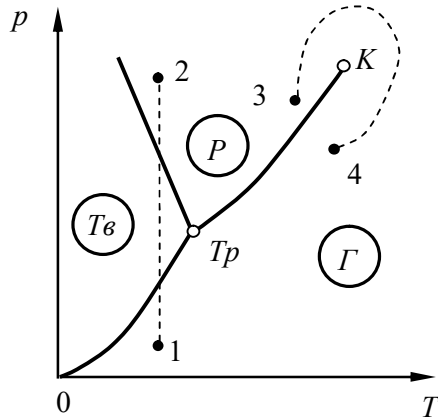


Рисунок 80.2 – Діаграма стану речовини, густина якої під час плавлення зменшується

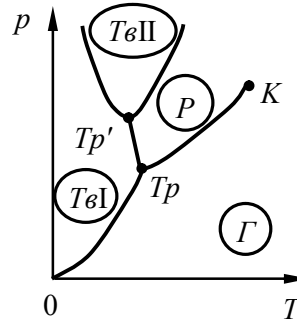


Рисунок 80.3 – Діаграма стану речовини, що має дві кристалічні модифікації

Нахил кривої плавлення залежить від того, як поводить ся під час плавлення густина речовини. Якщо густина рідини більша за густина кристалів, крива плавлення нахилена вправо, як на рисунку 80.1. Якщо під час плавлення густина речовини зменшується (так поводить ся, наприклад, вода), то крива плавлення нахилена вліво (рис. 80.2). В останньому випадку поведінка речовини за деяких процесів може виявитися досить своєрідною. Якщо взяти подібну речовину в стані, що зображений на рисунку 80.2 точкою 1, і її ізотермічно стиснути (штрихова пряма 1–2), то в процесі стиснення газоподібна речовина спочатку затвердіє, а потім стане рідкою. Це відбувається тільки за температур, які нижче за критичну.

Крива випаровування закінчується в критичній точці K . Тому можливим є процес, що відбувається в обхід критичної точки K (штрихову лінію 3–4 на рис. 80.2). У цьому разі перехід із рідкого стану в газоподібний відбувається безперервно через послідовність однорідних станів. На рисунку 79.7 подібний перехід зображений суцільною лінією 1–2.

Для речовини, що має кілька кристалічних модифікацій, діаграма стану має більш складний характер. На рисунку 80.3 зображена діаграма для випадку двох кристалічних модифікацій. У цьому разі є дві потрійні точки. У точці Tp в рівновазі перебуває газ, рідина й перша кристалічна модифікація, у точці Tp' рідина й обидві кристалічні модифікації. У воді є сім різних модифікацій льоду. Відповідно є ряд потрійних точок.

§ 81 Будова рідин. Поверхневий натяг рідин. Коефіцієнт поверхневого натягу. Крайовий кут

1 Будова рідин. Рідини займають проміжне положення між газами і кристалами, і тому вони мають деякі їхні властивості. Зокрема як для рідин, так і для кристалів, характерна наявність певного об'єму. Водночас рідина, подібно до газу, набуває форму тієї посудини, у якій вона міститься. Для кристалів характерно впорядковане розміщення частинок, у газах вони розміщені хаотично. За допомогою рентгенографічних досліджень з'ясовано, що в рідинах характер розміщення молекул також займає проміжне положення: **у рідинах спостерігається ближній порядок.** Це означає, що щодо будь-якої частинки розміщення найближчих до неї сусідів є впорядкованим. Однак у міру віддалення від даної частинки розміщення щодо неї інших частинок стає все менш упорядкованим. На далеких відстанях

упорядковане розміщення частинок повністю зникає. У кристалах спостерігаємо **дальній порядок**: упорядковане розміщення частинок щодо будь-якої частинки спостерігається в межах значного об'єму.

Через відсутність далекого порядку рідини, за деякими винятками, не виявляють анізотропії, яка є характерною для кристалів. У рідинах із видовженими молекулами спостерігається однакова орієнтація молекул у межах значного об'єму, чим обумовлюється анізотропія оптичних і деяких інших властивостей. Такі рідини отримали назву **рідких кристалів**. У них упорядкована тільки орієнтація молекул, взаємне ж розміщення молекул, як і у звичайних рідинах, далекого порядку не виявляє.

Тепловий рух молекул у рідинах має такий характер. Кожна молекула протягом деякого часу коливається біля певного положення рівноваги. Час від часу молекула стрибком переміщується в нове положення рівноваги, яке міститься від попереднього на відстані порядку розмірів самих молекул. Цим пояснюється течія рідин. З підвищенням температури частота таких стрибкоподібних переміщень зростає, унаслідок чого в'язкість рідин зменшується. Відзначимо, що в'язкість газів зростає з підвищенням температури.

2 Поверхневий натяг. Молекули рідини розміщуються так близько одна до одної, що сили притягання між ними є достатньо великими. Через швидке зменшення сил притягання між молекулами в разі збільшення відстані між ними *помітна дія молекул одна на одну існує лише в межах невеликої відстані r , яка називається радіусом молекулярної дії* і яка дорівнює декільком ефективним діаметрам молекули. *Сфера радіусом r називається сферою молекулярної дії*.

Отже, кожна молекула зазнає притягання з боку всіх молекул, що міститься всередині сфери молекулярної дії, центр якої збігається з центром даної молекули. Для молекули, яка міститься від поверхні рідини на відстані, більшій за r , результуюча сила притягання до сусідніх молекул у середньому дорівнює нулю (рис. 81.1). Коли ж молекула міститься від поверхні на відстані, яка менша за r , то ситуація стає іншою. Через те що густина газоподібного середовища над поверхнею рідини в багато разів менше густини рідини, то в тій частині сфери молекулярної дії, яка міститься за межами рідини, молекул практично не буде. Тому на молекулу, яка міститься в поверхневому шарі товщиною, що дорівнює r , діє сила \vec{F} , яка спрямована усередину рідини. Модуль цієї сили збільшується у разі переходу від внутрішньої до зовнішньої границі цього шару.

У разі переходу молекули із глибини рідини в поверхневий шар над нею виконується від'ємна робота силами, що діють в цьому шарі (про які йшла мова вище). Унаслідок цього кінетична енергія молекули зменшується, перетворюючись у потенціальну енергію. Це подібно до випадку, коли над тілом, яке летить угору, сила земного тяжіння виконує від'ємну роботу, що призводить до перетворення кінетичної енергії тіла в потенціальну. Отже, молекули в поверхневому шарі мають додаткову потенціальну енергію. Поверхневий шар загалом має додаткову енергію, яка входить складовою у внутрішню енергію рідини.

Положення рівноваги відповідає мінімуму потенціальної енергії. Тому за умови відсутності зовнішніх сил рідина набуває форми з мінімальною поверхнею, тобто форми кулі. Звичайно ми спостерігаємо рідини, на які діє сила земного тяжіння. У цьому разі рідина набуває форму, що відповідає мінімуму сумарної енергії – потенціальної енергії в полі сил тяжіння й поверхневої енергії.

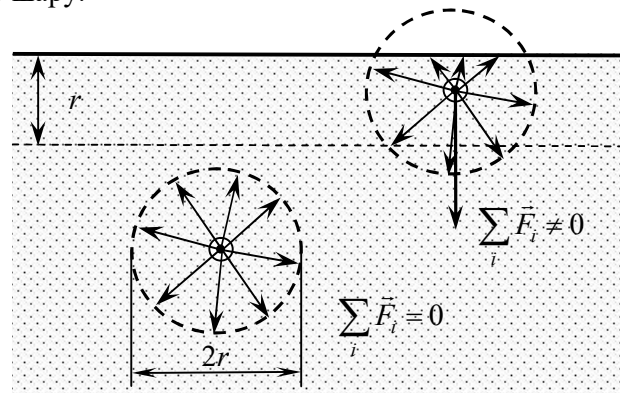


Рисунок 81.1 – Молекула в глибині рідини (ліворуч) і в поверхневому шарі (праворуч), r – радіус молекулярної дії

Наявність поверхневої енергії обумовлює прагнення рідини до скорочення своєї поверхні. Рідина поводить себе так, ніби вона була обмежена пружною плівкою, що прагне стиснутися. Насправді жодної плівки, що обмежує рідину зовні, немає. Поверхневий шар складається з тих же молекул, що й вся рідина, і взаємодія між молекулами в поверхневому шарі описана вище.

3 Коефіцієнт поверхневого натягу. Виділимо уявно ділянку поверхні рідини, що обмежена замкненим контуром. Прагнення цієї ділянки до скорочення призводить до того, що вона діє на іншу частину поверхні з дотичними до поверхні силами, які перпендикулярні в кожному місці до відповідного елемента контуру. Ці сили називають силами поверхневого натягу.

Сила поверхневого натягу будь-якої межі поверхні рідини пропорційна довжині межі

$$F = \sigma l,$$

де l – довжина межі рідини; σ – коефіцієнт поверхневого натягу (вимірюється в Н/м). Отже, поверхневий натяг σ чисельно дорівнює силі, яка діє на одиницю довжини межі рідини.

Розглянемо рамку з рухомою «невагомою» перемичкою довжиною a , що затягнута рідкою плівкою (рис. 81.2). Плівка обмежена із двох боків поверхневим шаром. Тому шар рідини граничить із перемичкою з обох боків по контуру довжиною $2a$ й, отже, діє на перемичку з силою, що дорівнює $2a\sigma$. Для того щоб перемичка не переміщувалася, до неї потрібно прикласти зовнішню силу F так, щоб урівноважити силу поверхневого натягу. Збільшивши зовнішню силу F на дуже малу величину, перемістимо перемичку на відстань dx . У цьому разі перемичка виконає над плівкою рідини роботу

$$d'A = Fdx = 2a\sigma dx = \sigma dS, \quad (81.1)$$

де dS – збільшення площі поверхневого шару плівки.

Результатом виконання роботи (81.1) є збільшення площі поверхневого шару на dS й, отже, зростання поверхневої енергії на $dE_{нов}$:

$$d'A = dE_{нов}. \quad (81.2)$$

З порівняння виразів (81.1) і (81.2) випливає, що

$$dE_{нов} = \sigma dS.$$

Отже, поверхневий натяг σ чисельно дорівнює додатковій енергії, яку має одиниця площі поверхневого шару. Відповідно до цього σ можна вимірювати не тільки в ньютонів на метр, але також і в джоулях на квадратний метр (Дж/м²).

Зазначимо, чим більша сила, яка діє на молекулу в поверхневому шарі, тим більший коефіцієнт поверхневого натягу σ .

Особливі умови, у яких перебувають молекули поверхневого шару, є й у твердих тілах. Отже, тверді тіла також мають поверхневий натяг.

4 Крайовий кут. Коли межують одна з одною відразу три речовини – тверде, рідке й газоподібне, рідке тіло набуває такої форми, за якої сума потенціальної енергії рідини в полі сил тяжіння й поверхневої енергії всіх тіл є мінімальною. На рисунку 81.3 зображено таку ситуацію. Уздовж контуру, що лежить на поверхні твердого тіла, граничать відразу три речовини. Елемент контуру Δl перпендикулярний до площини рисунка. Сума проєкцій трьох сил поверхневого натягу на межу розділу рідини й твердого тіла дорівнює нулю. ϑ – крайовий кут. Звідси випливає, що контур, який є межею всіх трьох речовин, розміщується на поверхні твердого тіла так, щоб сума проєкцій трьох прикладених до кожного елемента

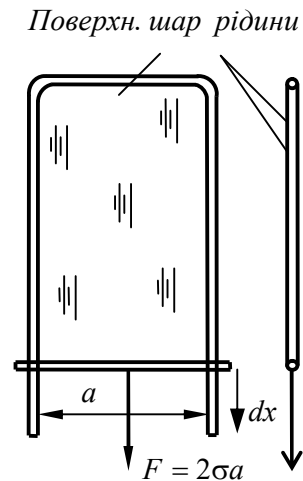


Рисунок 81.2

контуру сил поверхневого натягу на напрямок, у якому елемент контуру може переміщуватися (тобто на напрямок вздовж дотичної до поверхні твердого тіла), дорівнював нулю (в іншому разі рівновага буде відсутня).

Кут ϑ між дотичними до поверхонь твердого тіла й рідини, який відлічується всередині рідини, називається **крайовим кутом**.

Позначимо поверхневий натяг на границі твердого тіла й рідини через $\sigma_{m,p}$, на границі твердого тіла й газу – через $\sigma_{m,g}$ і на границі рідини й газу – через $\sigma_{p,g}$. Залежно

від співвідношення між цими величинами крайовий кут може набувати значення від 0 до π . Якщо $\sigma_{m,g} > \sigma_{m,p}$, кут ϑ виявляється гострим, якщо $\sigma_{m,g} < \sigma_{m,p}$, кут ϑ тупий. У першому випадку говорять про **частинне змочування** (рис. 81.4 а), а в другому – про частинне незмочування рідиною твердого тіла (рис. 81.4 б).

Якщо $\sigma_{m,g} > (\sigma_{m,p} + \sigma_{p,g})$, виявляється енергетично вигідною заміна поверхні тверде тіло–газ двома поверхнями: тверде тіло–рідина й рідина–газ. У цьому разі крайовий кут дорівнює нулю й рідина необмежено розтікається по поверхні твердого тіла – відбувається **повне змочування**.

Якщо $\sigma_{m,p} > (\sigma_{m,g} + \sigma_{p,g})$, енергетично вигідна заміна поверхні тверде тіло–рідина двома поверхнями: тверде тіло–газ і рідина–газ. У цьому разі крайовий кут дорівнює π й рідина повністю відділяється від поверхні твердого тіла, торкаючись її в одній тільки точці – спостерігають **повне незмочування**.

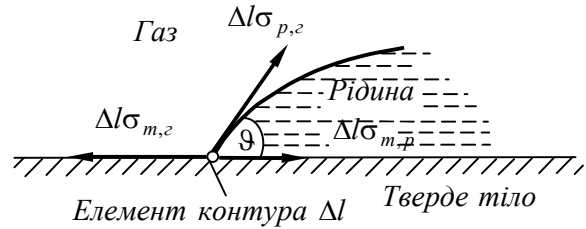


Рисунок 81.3

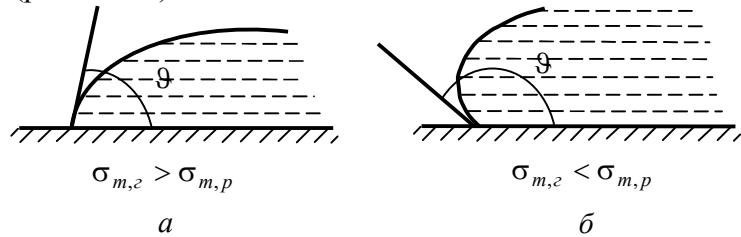


Рисунок 81.4

§ 82 Формула Лапласа. Капілярні явища. Висота піднімання й опускання рідини в капілярах

1 Формула Лапласа.

Прагнення поверхні рідини до скорочення призводить до того, що тиск під викривленою поверхнею рідини виявляється іншим, ніж під плоскою поверхнею. Під опуклою поверхнею тиск більше (рис. 82.1 б), а під увігнутою менше, ніж під плоскою (рис. 82.1 в). У разі увігнутої поверхні поверхневий шар, прагнучи скоротитися, розтягує рідину.

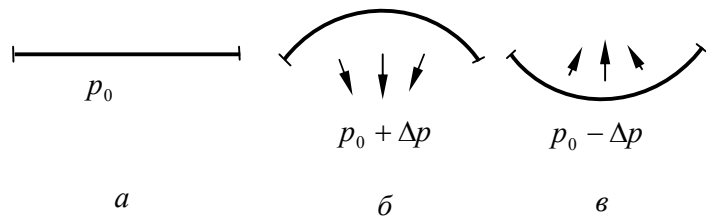


Рисунок 82.1

Додатковий тиск, обумовлений викривленням поверхні, повинен бути пропорційним поверхневому натягу σ і кривизні поверхні. Обчислимо додатковий тиск для сферичної поверхні рідини. Розсічемо уявно сферичну краплю рідини радіусом R площиною на дві півкулі (рис. 82.2). Через поверхневий натяг поверхневі шари півкуль притягуються один до одного із силою

$$F = 2\pi R\sigma$$

($2\pi R$ – довжина границі поверхневих шарів півкулі). Ця сила притискає півкулі одна до одної по поверхні площею $S = \pi R^2$ й, отже, зумовлює додатковий тиск

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (82.1)$$

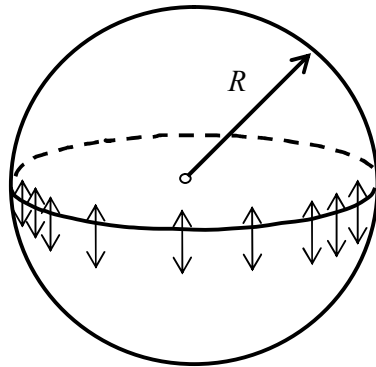


Рисунок 82.2 – Дві півкулі, на які уявно розсічена кругла крапля рідини, притискаються одна до одної силами поверхневого натягу

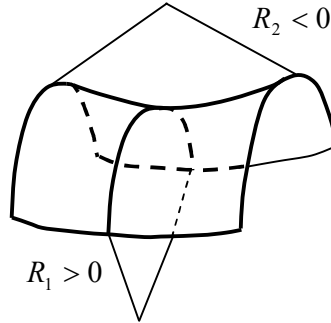


Рисунок 82.3 – Радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних нормальних перетинів сідлоподібної поверхні мають протилежні знаки

Кривизна сферичної поверхні всюди однакова й береться такою, що дорівнює $1/R$. Для характеристики довільної поверхні вводять поняття середньої кривизни, яке визначається через кривизну нормальних перетинів. **Нормальним перетином** поверхні в деякій точці називається лінія перетину цієї поверхні із площиною, що проходить через нормаль до поверхні в розглянутій точці. Для сфери будь-який нормальний перетин є колом. Загалом різні нормальні перетини, що проходять через одну і ту ж саму точку, мають різний радіус кривизни. У геометрії доводиться, що напівсума зворотних радіусів кривизни

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (82.2)$$

для будь-якої пари взаємно перпендикулярних нормальних перетинів має одне і теж значення. Ця величина і є **середньою кривизною** поверхні в даній точці. Легко зрозуміти, що середня кривизна циліндра вдвічі менша за кривизну сфери того ж самого радіуса.

Радіуси R_1 й R_2 у формулі (82.2) є алгебраїчними величинами. Якщо центр кривизни нормального перетину розташований під поверхнею, радіус кривизни вважають додатним. Якщо ж центр кривизни нормального перетину розташований над поверхнею, радіус кривизни вважають від'ємним (рис. 82.3). Отже, неплоска поверхня може мати середню кривизну, яка дорівнює нулю. Для цього потрібно, щоб радіуси кривизни R_1 й R_2 були однакові за модулем й протилежні за знаком.

У сфери $R_1 = R_2 = R$, тому $H = 1/R$. Замінивши у виразі (82.1) $1/R$ через H , прийдемо до формули

$$\Delta p = 2H\sigma. \quad (82.3)$$

Лаплас довів, що формула (82.3) справедлива для поверхні будь-якої форми, якщо за H вважати середню кривизну поверхні в тій точці, під якою визначається тиск. Отже, у загальному випадку

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (82.4)$$

Ця формула називається **формулою Лапласа**.

2 Капілярні явища.

Поверхневий натяг призводить до того, що поблизу стінок посудини поверхня рідини викривляється (дотична до поверхні рідини утворює зі стінкою кут, який дорівнює крайовому куту, що, зазвичай, відмінний від $\pi/2$). У вузькій круглій трубці, яку називають **капіляром**, або у вузькому зазорі між двома стінками викривленою виявляється вся поверхня (рис. 82.4). **Вигнуті поверхні рідини в капілярах називаються менісками**. Якщо рідина змочує стінки капіляра, меніск має **ввігнуту** форму, якщо не змочує – **опуклу** форму.

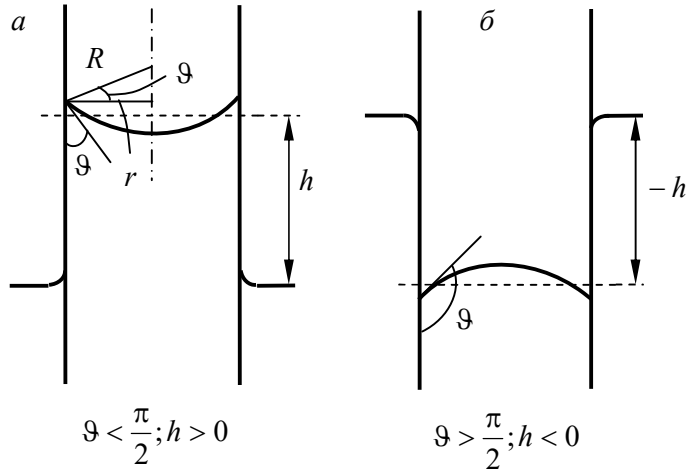


Рисунок 82.4 – Рідина у капілярі у разі змочування (а) незмочування (б)

Коли капіляр занурений одним кінцем у рідину, налиту в широкую посудину, тиск під меніском відрізняється від тиску під плоскою поверхнею в широкій посудині на величину Δp , яка обумовлена формулою (82.1). Унаслідок цього рівень рідини в капілярі у разі змочування буде вище, ніж у посудині, а у разі незмочування – нижче.

Піднімання або опускання рівня рідини у вузьких трубках одержало назву капілярності. У широкому змісті капілярними явищами вважають усі явища, що обумовлені поверхневим натягом. Зокрема обумовлений формулою (82.4) тиск називається **капілярним тиском**.

Між рідиною в капілярі й у широкій посудині встановлюється різниця рівнів h , за якої капілярний тиск Δp урівноважується гідростатичним тиском ρgh

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh, \quad (82.5)$$

де R – радіус кривизни меніска. З рисунка 82.4 бачимо, що радіус кривизни меніска й радіус капіляра пов'язані співвідношенням $R = r / \cos \vartheta$, де ϑ – крайовий кут. Підставивши це значення R у (82.5) і розв'язавши отриману рівність щодо h , прийдемо до формули

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho gr}, \quad (82.6)$$

де σ – поверхневий натяг на границі рідина – газ; ϑ – крайовий кут; ρ – густина рідини; g – прискорення вільного падіння; r – радіус капіляра.

Якщо рідина змочує стінки капіляра, кут ϑ гострий, відповідно $\cos \vartheta$, а отже, і h додатні (рідина піднімається в капілярі). Якщо рідина не змочує стінки капіляра, то кут ϑ тупий, відповідно $\cos \vartheta$, а отже, і h від'ємні (рідина опускається в капілярі).

Капілярність пояснює багато явищ, наприклад усмоктування рідин промокальним папером і тканинами (рушниками), підняття гасу по гніту, підйом ґрунтових вод у ґрунті тощо.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРИЦІ

ТЕМА 14 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 83 Явище електризації. Електричний заряд. Елементарний електричний заряд. Дискретність заряду. Закон збереження електричного заряду

1 З явищем електризації дозволяє ознайомитися такий експеримент. Підвісимо на шовковій нитці легкий вантаж, наприклад, паперову гільзу. Потремо об шовкову матерію скляну паличку й піднесемо її до вантажу. Ми побачимо, що гільза спочатку притягнеться до палички, але потім, після дотику зі склом, від нього відштовхнеться (рис. 83.1).

До дотику з натертою скляною паличкою паперова гільза під дією сили тяжіння й сили натягу нитки перебувала в рівновазі у вертикальному положенні. Тепер її положення рівноваги інше. Отже, крім уже згаданих вище сил, на гільзу діє ще якась сила. Ця сила відмінна від сил тяжіння, від сил, що виникають у разі деформації тіл, від сил тертя й інших сил, що ми вивчали в механіці. У тільки що описаному досліді ми зустрілись із силами, які отримали назву *електричних*.

Тіла, які діють на навколишні предмети електричними силами, називають електризованими або зарядженими і приймаємо, що на цих тілах перебувають електричні заряди. Явище виникнення на тілах електричних зарядів називають електризацією тіл.

В описаних дослідідах ми заряджали скло за допомогою тертя об шовк. Ми могли б замість скла вибрати сургуч, ебоніт, плексиглас, янтар і замінити шовкову матерію шкірою, гумою й іншими предметами. Дослід доводить, що за допомогою тертя можна зарядити будь-яке тіло.

2 Зарядимо за допомогою скляної палички, потертої об шовк, легку гільзу, яка підвішена на шовковій нитці, і піднесемо до неї кусочок сургучу, зарядженого тертям об вовну. Гільза буде притягатися до сургучу (рис. 83.2). Однак ми бачили (рис. 83.1), що ця ж підвішена гільза відштовхується від скла, що зарядила її. Це доводить, що заряди, які виникають на склі й сургучі, є якісно різними.

Якби в цих дослідідах ми використовували інші заряджені тіла, то знайшли б, що частина з них діє як заряджене скло, тобто вони відштовхуються від зарядів скла й притягаються до зарядів сургучу, а частина – як заряджений сургуч, тобто вони притягаються до зарядів скла й відштовхуються від зарядів сургучу. Незважаючи на велику кількість різних речовин у природі, існує тільки два різних види електричних зарядів.

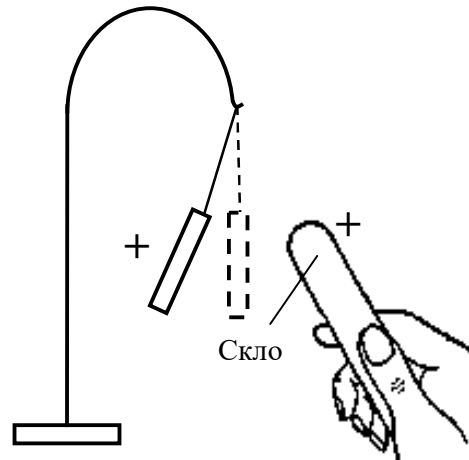


Рисунок 83.1 – Паперова гільза відштовхується від скляної палички, що зарядила її

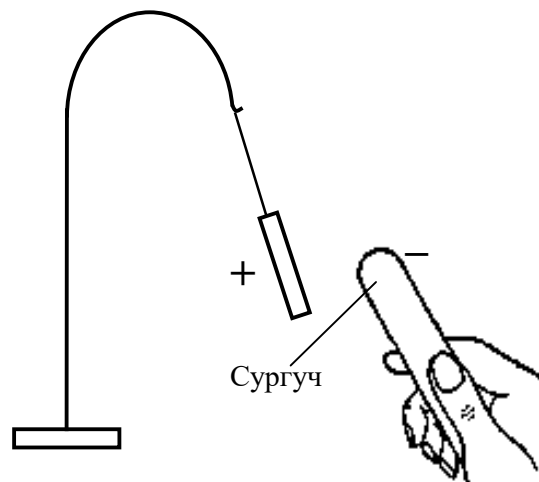


Рисунок 83.2 – Паперова гільза, заряджена від скла, притягається до наелектризованого сургучу

Також із дослідів випливає, що заряди скла й сургучу можуть компенсувати один одного. Величинам, які в разі додавання зменшують одна одну, приписують різні знаки. Тому домовилися приписувати їм електричним зарядам знаки, розділяючи заряди на додатні та від'ємні.

Додатно зарядженими називають тіла, які діють на інші заряджені тіла так само, як скло, що наелектризоване тертям об шовк. *Від'ємно зарядженими* називають тіла, які діють так само, як сургуч, що наелектризований тертям об вовну. З дослідів випливає, що однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягаються.

З погляду будови речовини носіями електричних зарядів є елементарні частинки (елементарними частинками є найменші неподільні частинки матерії). Так елементарними частинками є електрон, протон, нейтрон. Було з'ясовано, що електричний заряд майже усіх елементарних частинок (якщо він не дорівнює нулю) є однаковим за абсолютною величиною і є **найменшим електричним зарядом, що зустрічається в природі. Цей заряд називають елементарним зарядом.** Експериментально знайдено, що він дорівнює

$$e = 1,602176487(40) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (83.1)$$

Зокрема елементарними частинками є електрон (має заряд $-e$), протон (має заряд $+e$) і нейтрон (заряд дорівнює нулю). З цих частинок побудовані атоми будь-якої речовини, тому електричні заряди входять до складу всіх тіл. Зазвичай електрони і протони містяться в речовині в рівних кількостях і розподілені в тілі з однаковою густиною. У цьому разі алгебраїчна сума зарядів у будь-якому елементарному об'ємі тіла дорівнює нулю, унаслідок чого кожний такий об'єм (і тіло загалом) є нейтральним. Якщо створити в тілі надлишок частинок будь-якого знака, тіло виявиться зарядженим. Так електризація речовини пояснюється переходом, зазвичай, електронів від одного тіла до іншого. Можна також створити перерозподіл частинок так, що в одній частині тіла виникне надлишок зарядів одного знака, в іншій – іншого. Це можна здійснити, наприклад, піднесенням до незарядженого тіла іншого, зарядженого тіла.

Усякий заряд q утворюється сукупністю елементарних зарядів, тому він є цілим кратним e

$$q = \pm Ne. \quad (83.2)$$

Якщо фізична величина може мати тільки дискретні (тобто розділені скінченними проміжками) значення, то говорять, що ця величина квантується. Експериментальний факт, що виражається формулою (83.2), означає, що **електричний заряд квантується.**

Похибки, з якою можуть бути виміряні макроскопічні заряди (тобто заряди, утворені величезною сукупністю елементарних зарядів), зазвичай значно перевищують величину елементарного заряду. Тому дискретність макроскопічних зарядів не проявляється й вони сприймаються практично як неперервні.

Експериментально встановлено, що величина заряду не залежить від швидкості, з якою він рухається. Отже, **електричний заряд є релятивістські інваріантним.** Це означає, що величина заряду, що вимірюється в різних інерціальних системах відліку, виявляється однаковою.

Електричні заряди можуть виникати й зникати. Однак завжди виникають або зникають одночасно два елементарних заряди різних знаків. Наприклад, електрон і позитрон (додатній електрон) під час зустрічі анігілюють, тобто перетворюються в нейтральні частинки, що називаються гамма-фотонами. Водночас зникають заряди $-e$ й $+e$.

Отже, у природі виконується **закон збереження електричного заряду**, що стверджує, що **сумарний заряд електрично ізольованої системи не може змінюватися.**

Відзначимо, що закон збереження електричного заряду не міг би виконуватись, якщо б електричні заряди не були релятивістські інваріантними. Дійсно, якби величина заряду залежала від його швидкості, то, надавши руху зарядам одного якогось знака, ми змінили б сумарний заряд електроізольованої системи.

§ 84 Закон Кулона. Принцип суперпозиції електричних сил. Одиниці вимірювання заряду

1 Якщо розмірами зарядженого тіла можна знехтувати порівняно з відстанями до інших тіл, то таке тіло називають **точковим зарядом**. Закон взаємодії точкових зарядів установив експериментально Кулон у 1785 р. за допомогою винайдених ним крутильних ваг (рис. 84.1). До закріпленої одним кінцем у голівці приладу пружної нитки був підвішений за середину горизонтально розміщений ізольований стрижень. На кінці стрижня була встановлена металева кулька, яка була врівноважена противагою на іншому кінці стрижня. За закручуванням нитки вимірювалася сила взаємодії заряду кульки з точно такою нерухомою зарядженою кулькою. Поворотом головки можна було змінювати відстань між кульками. Під час проведення досліду Кулон виходив із того, що у разі дотику зарядженої металевої кульки з точно такою самою незарядженою кулькою заряд розподіляється між кульками порівну.

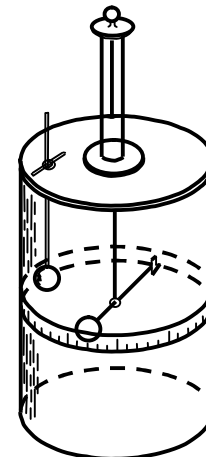


Рисунок 84.1 – Крутильні ваги Кулона

Закон Кулона стверджує, що сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів, які містяться у вакуумі, пропорційна величинам зарядів q_1 і q_2 , і обернено пропорційна квадрату відстані r між ними

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (84.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Сила спрямована уздовж прямої, що з'єднує заряди. Закон Кулона можна подати у векторній формі

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (84.2)$$

Тут \vec{F}_2 – сила, що діє на заряд q_2 , до якого проведено вектор \vec{r}_{12} від заряду q_1 (рис. 84.2). У разі однойменних зарядів сила \vec{F}_2 спрямована уздовж \vec{r}_{12} . Якщо б заряди були різнойменними, вектори \vec{F}_2 й \vec{r}_{12} були б спрямовані в протилежні боки.

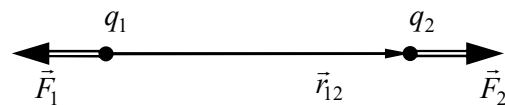


Рисунок 84.2 – Взаємодія двох однойменних зарядів. У випадку різнойменних зарядів сили \vec{F}_1 й \vec{F}_2 мали б зворотні напрямки

2 За вже певних одиниць довжини й сили відповідним вибором одиниці заряду можна було б зробити так, щоб коефіцієнт пропорційності k у формулі закону Кулона дорівнював одиниці. Так встановлено в *гауссовій системі одиниць*.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) *одиниця заряду, яка називається кулоном* (Кл), визначається не із закону Кулона, а із закону взаємодії провідників зі струмом. Оскільки одиниці сили, заряду й довжини встановлюються незалежно від закону Кулона, коефіцієнт k у формулі (84.1) не дорівнює одиниці. Його значення виявилось таким, що дорівнює

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2. \quad (84.3)$$

Якщо писати закон Кулона у вигляді (84.2), у велику кількість формул електродинаміки буде входити множник 4π . Для того щоб позбутися цього множника в практично найбільш важливих формулах, коефіцієнт пропорційності в законі Кулона подають у вигляді $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Тоді формула, що виражає закон Кулона, набуде вигляду

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (84.4)$$

Величину ϵ_0 називають **електричною сталою**. Зрозуміло, що $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$. Звідки

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф} / \text{м} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}, \quad (84.5)$$

де Ф (фарад) – одиниця ємності.

3 Експериментально встановлено, що сила взаємодії двох зарядів не змінюється, якщо поблизу них помістити інші електричні заряди. Нехай крім заряду q , є заряди q_1, q_2, \dots, q_N . Тоді результуюча сила \vec{F} , з якої діють на q усі N зарядів q_i , визначається формулою

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (84.6)$$

де \vec{F}_i сила, з якої діє на q заряд q_i за умови відсутності інших $N-1$ зарядів. Про цю властивість говорять як про **принцип суперпозиції електричних сил**.

Принцип суперпозиції електричних сил дозволяє за допомогою закону Кулона обчислити силу взаємодії між зарядами, які розміщені на тілах скінченних розмірів. Для цього потрібно розбити кожний із скінченних зарядів на такі малі заряди dq , щоб їх можна було вважати точковими. Далі потрібно провести обчислення за формулою (84.2) сили взаємодії між зарядами dq_i одного тіла й зарядами dq_k іншого тіла, узятими попарно, і потім виконати векторне додавання цих сил.

§ 85 Електричне поле. Напруженість електричного поля. Напруженість електричного поля точкового заряду. Принцип суперпозиції електричних полів

1 Як здійснюється взаємодія між електричними зарядами: безпосередньо, чи за допомогою матеріального посередника?

На сьогодні експериментально доведено, що взаємодія між електричними зарядами передається за допомогою особливого матеріального посередника, який називається **електромагнітним полем**.

Усякий електричний заряд збуджує в його навколишньому просторі електричне поле. **Електричне поле** – матеріальний об'єкт, який проявляє себе в тому, що на поміщений у будь-яку його точку електричний заряд діє сила. Тобто, щоб установити наявність електричного поля, потрібно помістити у відповідну точку простору заряд (заряджене тіло) і з'ясувати, чи відчуває він дію сили чи ні. Величина сили, що діє на заряд, буде характеризувати «інтенсивність» електричного поля.

Отже, для виявлення і дослідження електричного поля можна використовувати «пробний» заряд. Для того щоб сила, яка діє на пробний заряд, характеризувала поле «у даній точці», цей заряд повинен бути точковим.

Проведемо дослідження поля нерухомого точкового заряду Q за допомогою точкового пробного заряду q . У точці, положення якої щодо заряду Q визначається радіус-вектором \vec{r} (рис. 85.1), на пробний заряд відповідно до закону Кулона буде діяти сила

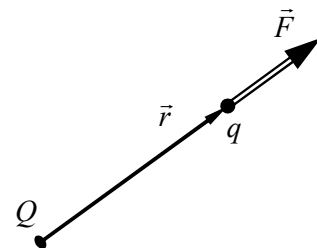


Рисунок 85.1

$$\vec{F} = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \right). \quad (85.1)$$

З формули (85.1) випливає, що відношення \vec{F}/q не залежить від величини пробного заряду. Це відношення залежить тільки від величин Q і \vec{r} , які визначають поле в даній точці. Тому це відношення використовують як величину, що характеризує електричне поле. Позначивши цю величину буквою \vec{E} , напишемо співвідношення

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F}/q}. \quad (85.2)$$

Векторну величину \vec{E} називають **напруженістю електричного поля** в даній точці простору.

Визначення (85.2) поширюється на поля, які створюються будь-якою сукупністю нерухомих зарядів. Однак потрібно зробити таке уточнення. Розміщення зарядів, які збуджують досліджуване поле, може змінитися під впливом пробного заряду. Це відбудеться, наприклад, коли заряди, які визначають електричне поле, розміщені на провіднику й можуть вільно переміщуватись у його межах. Тому, щоб не внести помітних змін у досліджуване поле, пробний заряд потрібно брати досить малим.

За одиницю напруженості електричного поля береться напруженість у такій точці, у якій на заряд в один кулон діє сила в один ньютон. Ця одиниця має назву ньютон на кулон (Н/Кл) або вольт на метр (В/м).

З формули (85.1) та (85.2) випливає, що **напруженість поля точкового заряду Q визначається виразом**

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r}, \quad (85.3)$$

де \vec{e}_r – орт радіус-вектора \vec{r} , проведеного від заряду Q в дану точку поля. Спрямований вектор \vec{E} уздовж радіальної прямої, яка обумовлена ортом \vec{e}_r , від заряду, якщо він додатний, і до заряду, якщо він від'ємний.

Згідно з (85.2) на точковий заряд q у точці поля з напруженістю \vec{E} діє сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (85.4)$$

Як відомо, для електричних сил виконується принцип суперпозиції електричних сил.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

де \vec{F}_i сила, з якою заряд q_i діє на точковий q за умови відсутності інших $N-1$ зарядів. Підставимо це співвідношення в (85.4), проведемо перетворення й отримаємо

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i/q) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

Тобто **напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів окремо**

$$\boxed{\vec{E} = \sum \vec{E}_i}. \quad (85.5)$$

Отже, поля складаються, не збурюючи одне одне. Це твердження називають **принципом суперпозиції електричних полів**.

Принцип суперпозиції дозволяє обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Розбивши скінченні заряди на досить малі dq , їх можна звести до сукупності точкових зарядів. Внесок кожного з таких зарядів у результуюче поле обчислюється за

формулою (85.3). Результируюче поле знаходимо за допомогою принципу суперпозиції електричних полів (85.5).

§ 86 Робота з переміщення заряду в електростатичному полі. Теорема про циркуляцію електростатичного поля. Потенціальна енергія точкового заряду. Потенціал електричного поля. Потенціал системи зарядів

1 Розглянемо нерухомий точковий електричний заряд Q , який створює у вакуумі електричне поле $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^3) \cdot \vec{r}$. Нехай у цьому полі переміщується інший точковий заряд q , який переходить із початкового положення 1 у кінцеве положення 2 вздовж довільної кривої 1-2 (рис. 86.1). *Визначимо роботу, яку виконують сили поля за такого переміщення.*

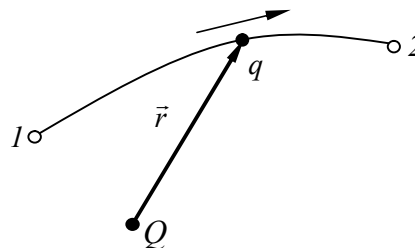


Рисунок 86.1

Відповідно до закону Кулона на точковий заряд q із боку заряду Q діє сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r} = q\vec{E}, \quad (86.1)$$

де \vec{E} – напруженість поля, що створює заряд Q . Згідно з визначенням роботи сили на ділянці 1–2 отримуємо

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = \int_1^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_2}. \quad (86.2)$$

Тут використали, що $\vec{r} d\vec{r} = r dr$ (у цьому легко впевнитися, продиференціювавши тотожність $(\vec{r})^2 = (r)^2$).

Отже, за будь-якого вибору початкової й кінцевої точок 1 і 2 робота A_{12} не залежить від форми шляху, а визначається тільки положеннями цих точок. Силі поля, що задовольняють таку умову, називаються консервативними, або потенціальними. Отже, електростатичне поле точкового заряду є консервативним, або потенціальним.

Доведене справедливо для електричного поля будь-якої системи нерухомих точкових зарядів. Це безпосередньо впливає із принципу суперпозиції електричних полів і з відомої теореми механіки, відповідно до якої робота результируючої сили дорівнює сумі робіт складових сил. Отже, електричне поле будь-якої системи нерухомих зарядів є консервативним, або потенціальним.

2 З механіки відомо, що робота консервативних сил по будь-якому замкненому шляху дорівнює нулю. У разі електростатичного поля ця робота визначається інтегралом $\oint \vec{F} d\vec{l} = \oint q\vec{E} d\vec{l}$ (тут елементарне переміщення позначено через $d\vec{l}$, кружок біля знака інтеграла вказує на те, що інтегрування виконується за замкненим контуром). Прирівнявши цей інтеграл до нуля і скоротивши на q , прийдемо до співвідношення

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (86.3)$$

яке повинно виконуватися для будь-якого замкненого контуру L . Інтеграл виду $\oint \vec{A} d\vec{l}$ називається **циркуляцією вектора \vec{A}** за замкненим контуром. Отже, характерним для електростатичного поля є те, що циркуляція вектора \vec{E} за будь-яким замкненим контуром дорівнює нулю. Це твердження і співвідношення (86.3) називають **теоремою про циркуляцію напруженості електростатичного поля**.

Необхідно пам'ятати, що умова (86.3) є справедливою тільки для електростатичного поля. Далі буде з'ясовано, що для поля, яке змінюється з часом, умова (86.3) не виконується.

3 Знайдемо потенціальну енергію точкового заряду q у полі заряду Q . Відомо, що робота консервативних сил може бути подана як зменшення потенціальної енергії

$$A_{12} = W_{p,1} - W_{p,2}.$$

Порівняння цього співвідношення з формулою (86.2) дає для потенційної енергії, яку має заряд q у полі заряду Q , вираз

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + const.$$

Значення константи у цьому разі вибирається так, щоб у разі віддалення заряду q від заряду Q на нескінченність (тобто для $r = \infty$) потенціальна енергія ставала такою, що дорівнює нулю. За такої умови випливає, що $const = 0$, і *потенціальна енергія заряду q у полі заряду Q має вигляд*

$$\boxed{W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}} \quad (86.4)$$

Зауважимо, що отриманий вираз потрібно розглядати як взаємну потенціальну енергію зарядів q і Q (потенціальну енергію взаємодії двох точкових зарядів).

4 Скалярна величина, що дорівнює відношенню потенціальної енергії до її електричного заряду

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q}} \quad (86.5)$$

*не залежить від величини заряду q й може бути використана для характеристики поля. Ця величина називається **потенціалом поля** в даній точці. Дійсно, у разі точкового заряду Q потенціал його поля матиме вигляд*

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}} \quad (86.6)$$

і не буде залежати від заряду q , а буде визначатися тільки величинами Q і r , які характеризують поле в даній точці.

Відповідно до формули (86.5) заряд q , що міститься в точці поля з потенціалом φ , має потенційну енергію

$$W_p = q\varphi. \quad (86.7)$$

Використовуючи (86.7), виразимо роботу сил поля над зарядом q через різницю потенціалів

$$\boxed{A_{12} = W_{p,1} - W_{p,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (86.8)$$

Отже, *робота, що виконують над зарядом сили поля, дорівнює добутку заряду на зменшення потенціалу.*

5 Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів роботу, яку виконують над зарядом q сили поля, створеного системою зарядів q_i , дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 q (\sum_i \vec{E}_i) d\vec{l} = \sum_i \left(\int_1^2 q \vec{E}_i d\vec{l} \right) = \sum_i (A_{12})_i, \quad (86.9)$$

де $(A_{12})_i$ – робота, яка була б виконана над зарядом q силами поля, що створювалось одним лише зарядом q_i .

Відповідно до формули (86.8) роботу A_{12} можна подати у вигляді $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, де φ – потенціал результуючого поля. Аналогічно можна подати роботу $(A_{12})_i = q(\varphi_{i1} - \varphi_{i2})$, де φ_i – потенціал поля, який створював би заряд q_i . Підставивши ці вирази у формулу (86.9), прийдемо до співвідношення

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = \sum q(\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) = q(\sum \varphi_{i1} - \sum \varphi_{i2}),$$

з якого випливає, що потенціал системи зарядів дорівнює

$$\boxed{\varphi = \sum \varphi_i}. \quad (86.10)$$

Отже, потенціал поля, який створює система зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним зарядом окремо.

6 За одиницю потенціалу в системі СІ беруть вольт (В), який дорівнює, на підставі визначення потенціалу (86.5)

$$1В = \frac{1Дж}{1Кл}. \quad (86.11)$$

У фізиці часто користуються одиницею роботи й енергії, яку називають **електрон-вольтом** (еВ) і яка дорівнює роботі, що виконують сили поля над елементарним зарядом e під час проходження ним різниці потенціалів в один вольт

$$1eВ = 1,60 \cdot 10^{-19} Кл \cdot 1В = 1,60 \cdot 10^{-19} Дж. \quad (86.12)$$

§ 87 Зв'язок між напруженістю електростатичного поля і потенціалом. Силові лінії та еквіпотенціальні поверхні. Перпендикулярність силових ліній і еквіпотенціальних поверхонь

1 Електростатичне поле можна описати або за допомогою векторної величини \vec{E} , або за допомогою скалярної величини φ . Очевидно, що ці величини повинні бути зв'язані один з одним тому, що описують один і той самий матеріальний об'єкт – електричне поле. *Знайдемо зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та потенціалом φ .*

Відповідно до визначень напруженості електричного поля та потенціалу можемо записати

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad W_p = q\varphi, \quad (87.1)$$

де \vec{F} є силою, з якою електричне поле діє на точковий заряд q ; W_p є потенціальною енергією точкового заряду q в електричному полі. Як відомо, між консервативною силою та потенціальною енергією, яка відповідає цій консервативній силі, існує зв'язок

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_p, \quad (87.2)$$

де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ – оператор набла. Підставимо у (87.2) вирази (87.1) і отримаємо після скорочення на q співвідношення

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}, \quad (87.3)$$

відповідно до якого **напруженість електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу, узятому зі зворотним знаком.**

2 За допомогою (87.3) можна за відомою функцією $\varphi(x, y, z)$ знайти напруженість поля в кожній точці поля. Можна виконати й зворотнє завдання – знаючи функцію $\vec{E}(x, y, z)$, знайти різницю потенціалів між двома довільними точками поля. Для цього скористаємося тим, що робота A_{12} , яку виконують сили поля над зарядом q у разі переміщення його по довільній траєкторії з точки 1 у точку 2, визначається інтегралом $A_{12} = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{l}$. Також цю роботу можна подати у вигляді $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Порівнюючи обидва вирази й скоротивши на q , отримаємо

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}}. \quad (87.4)$$

Інтеграл можна брати по будь-якій лінії, що з'єднує точки 1 і 2, через те, що робота сил електростатичного поля не залежить від шляху.

3 Для графічного зображення електричного поля вводять поверхні рівного потенціалу та силові лінії електричного поля.

Силовими лініями електричного поля називають математичну лінію, дотична до якої в довільній точці цієї лінії є паралельною до вектора напруженості електричного поля в цій самій точці.

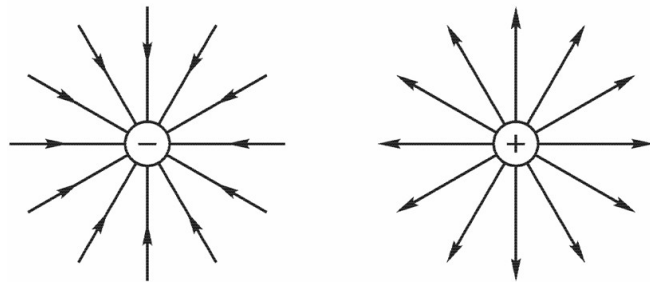


Рисунок 87.1

За додатний напрямок силовій лінії домовилися вважати напрямок вектора \vec{E} . За такої умови можна стверджувати, що електричні силові лінії починаються на додатних зарядах і закінчуються на від'ємних. Можна показати, що в просторі, вільному від електричних зарядів, силові лінії йдуть густіше там, де поле \vec{E} сильніше, і рідше там, де воно слабше. Отже, густина силових ліній свідчить про величину напруженості електричного поля. На рисунку 87.1 зображені силові лінії рівномірно заряджених кульок – додатної і від'ємної, а на рисунку 87.2 а – двох різнойменних і рисунку 87.2 б – однойменних зарядів рівної величини, які розміщені на таких кульках.

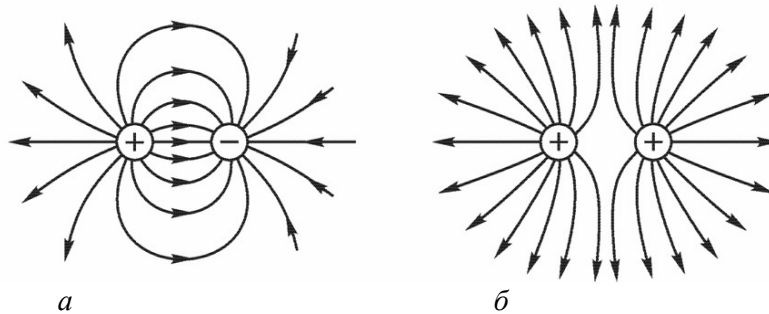


Рисунок 87.2

Уявна поверхня, усі точки якої мають однаковий потенціал, називається **поверхнею рівного потенціалу або екіпотенціальною поверхнею**.

4 З'ясуємо, що силові лінії електричного поля завжди перпендикулярні екіпотенціальним поверхням. Для цього розглянемо елементарне переміщення $d\vec{l}$ електричного заряду q вздовж екіпотенціальної поверхні. Через те, що в цьому разі і

початкова, і кінцева точки будуть розміщені в екіпотенціальній поверхні, елементарна робота у разі переміщення заряду q буде дорівнювати нулю

$$dA = -q \cdot d\varphi = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (87.5)$$

($\varphi_1 = \varphi_2$, точки 1 та 2 належать одній екіпотенціальній поверхні). З іншого боку, використовуючи визначення роботи, знаходимо

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = qE \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad (87.6)$$

де α кут між векторами \vec{E} та $d\vec{l}$.

Порівнюючи (87.5) та (87.6) знаходимо, що для довільної $d\vec{l}$, яка дотична до екіпотенціальної поверхні, виконується умова

$$E \cdot dl \cdot \cos \alpha = 0.$$

Ми розглядаємо випадок, коли $E \neq 0$, $dl \neq 0$. Це означає, що $\cos \alpha = 0$. Звідси випливає, що вектор напруженості електричного поля \vec{E} , отже, і силова лінія завжди перпендикулярні до екіпотенціальної поверхні.

Екіпотенціальну поверхню можна провести через будь-яку точку поля. Однак доцільно проводити поверхні так, щоб різниця потенціалів між сусідніми поверхнями була однаковою (наприклад, 1 В). Тоді за густиною екіпотенціальних поверхонь можна якісно визначити модуль напруженості поля: там, де поверхні густіше, потенціал змінюється уздовж лінії поля швидше й, отже, напруженість поля більша; там, де поверхні рідше, напруженість поля менше.

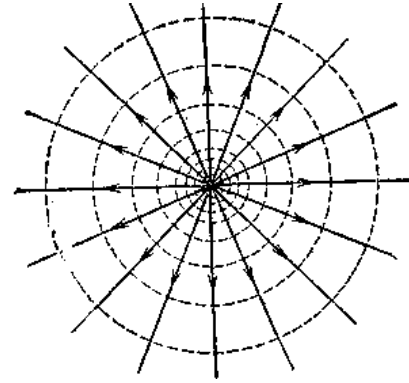


Рисунок 87.3

На рисунку 87.3 зображені силові лінії \vec{E} (суцільні) і лінії перетину екіпотенціальних поверхонь із площиною креслення (штрихові) для поля точкового заряду.

§ 88 Поле електричного диполя

Електричним диполем називається система двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, відстань l між якими мала порівняно з відстанями до тих точок, у яких розглядається поле системи. Орієнтацію диполя в просторі можна задати за допомогою вектора \vec{l} , який проведено від заряду $-q$ до заряду $+q$. Диполь характеризується **дипольним моментом**, який за визначенням дорівнює $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ ($q = |q|$). Прикладом диполя може служити молекула. Дипольний момент являє собою важливу характеристику молекули.

1 Знайдемо потенціал електричного поля диполя φ . Обчислимо потенціал поля в точці A , положення якої щодо центра диполя O визначається полярними координатами r й θ (рис. 88.1). Використовуючи теорему косинусів, нескладно знайти відстані від точки A до додатного заряду r_+ та до від'ємного заряду r_-

$$r_+ = \left(r^2 + (l/2)^2 - 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} \approx \left(r^2 + (l/2)^2 \cos^2\theta - 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} = r - (l/2)\cos\theta,$$

$$r_- = \left(r^2 + (l/2)^2 - 2r(l/2)\cos(\pi - \theta) \right)^{1/2} \approx \left(r^2 + (l/2)^2 \cos^2\theta + 2r(l/2)\cos\theta \right)^{1/2} = r + (l/2)\cos\theta.$$

Тут використано, що оскільки $l \ll r$, то $r^2 \pm (l/2)^2 \approx r^2 \pm (l/2)^2 \cos^2\theta$. Тоді для потенціалу в точці A отримуємо

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r - (l/2)\cos\theta} + \frac{(-q)}{r + (l/2)\cos\theta} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2 - (l/2)^2 \cos^2\theta} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2}. \quad (88.1)$$

У виразі (88.1) ми знехтували у знаменнику другим доданком через те, що $l \ll r$.

За умови $\theta = \pi/2$ вираз (88.1) дорівнює нулю. Отже, площина, яка перпендикулярна до осі диполя й проходить через його центр, є екіпотенціальною поверхнею. Це впливає також із того, що точки цієї площини розміщені на однаковій відстані від протилежних за знаком зарядів, модуль яких однаковий.

З виразу (88.1) випливає, що потенціал поля диполя визначається модулем векторної величини

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}, \quad (88.2)$$

яка є дипольним моментом. Для обчислення поля диполя немає необхідності знати q й l окремо; достатньо знати їхній добуток, тобто дипольний момент.

З рисунка 88.1 випливає, що θ є кутом між вектором \vec{l} , тобто моментом диполя \vec{p} , і радіус-вектором \vec{r} , який визначає положення точки A щодо центра диполя. Тому формулі (88.1) можна надати вигляду

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}. \quad (88.3)$$

2 Знайдемо напруженість електричного поля \vec{E} диполя. Для цього подамо потенціал диполя (формула (88.3)) у вигляді

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (88.4)$$

і використаємо зв'язок електричного поля з потенціалом

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (88.5)$$

Як відомо з математики, оператор набла для полярних координат r, θ має вигляд

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial}{r\partial\theta} \vec{e}_\theta. \quad (88.6)$$

Далі підставляємо (88.4) у (88.5) з урахуванням (88.6) і отримуємо

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta,$$

де

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

Орти $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ та відповідні компоненти вектора напруженості електричного поля зображені на рисунку 88.2. Модуль вектора напруженості електричного поля знайдемо, використовуючи, що $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$,

$$E^2 = E_r^2 + E_\theta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (4\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (1 + 3\cos^2 \theta). \quad (88.7)$$

Звідси,

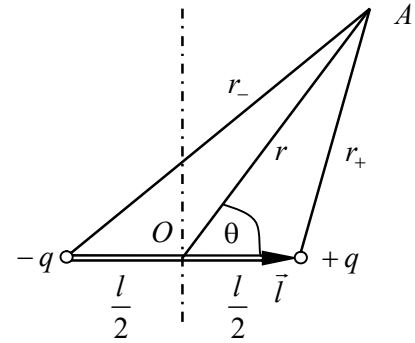


Рисунок 88.1

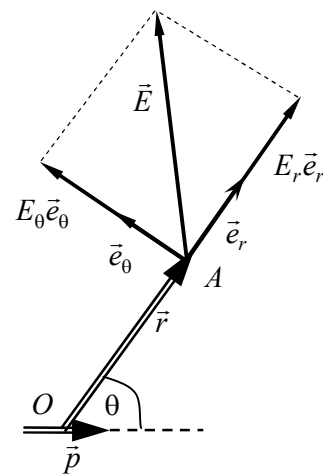


Рисунок 88.2

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1+3\cos^2\theta}. \quad (88.8)$$

§ 89 Потік вектора. Теорема Гаусса для вектора напруженості електричного поля

1 *Поняття потоку вектора* є одним із найважливіших понять векторного аналізу. Воно використовується для формулювання властивостей електричного, магнітного й інших векторних полів.

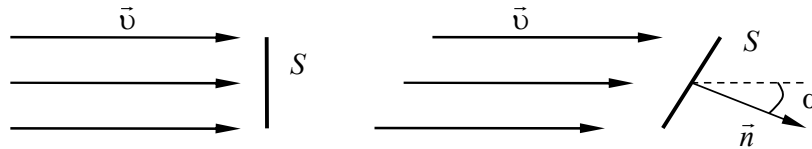


Рисунок 89.1

Спочатку це поняття було введено в гідродинаміці. Розглянемо в полі швидкостей рідини малу площу S , яка перпендикулярна до вектора швидкості рідини \vec{v} (рис. 89.1). Об'єм рідини, що протікає через цю площину за час dt , дорівнює $vS \cdot dt$. Якщо площина нахилена до потоку, то відповідний об'єм буде $vS \cdot \cos\alpha \cdot dt$, де α – кут між вектором швидкості \vec{v} й нормаллю \vec{n} до площини S (рис. 89.1). Об'єм рідини, що протікає через площину S за одиницю часу, отримаємо діленням цього виразу на dt . Він дорівнює $vS \cdot \cos\alpha$, тобто скалярному добутку $\vec{v} \cdot \vec{S}$ вектора швидкості \vec{v} на вектор площі $\vec{S} = S\vec{n}$. Одиничний вектор \vec{n} нормалі до площі S можна провести у двох прямо протилежних напрямках. Один із них умовно беруть за додатний. У цьому напрямку й проводиться нормаль \vec{n} . Та сторона площини, з якої виходить нормаль \vec{n} , називається *зовнішньою*, а протилежна до зовнішньої – *внутрішньою*. Якщо поверхня S не є нескінченно малою, то під час обчислення об'єму рідини, що протікає за одиницю часу, цю поверхню потрібно розбити на нескінченно малі dS площі, а потім обчислити інтеграл $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ по всій поверхні S .

Вирази типу $\vec{A} \cdot d\vec{S}$ або $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ зустрічаються в найрізноманітніших питаннях фізики

й математики. Ці вирази мають сенс незалежно від конкретної фізичної природи вектора \vec{A} . Співвідношення $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ називають **поток вектора \vec{A} через поверхню S** .

На підставі цього визначення інтеграл $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ є потоком вектора швидкості через площу S і він визначає об'єм рідини, що протікає через площу за одиницю часу. Аналогічно можемо стверджувати, що інтеграл $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ є **поток вектора напруженості електричного поля \vec{E}** .

2 Перейдемо до доведення найважливішої теореми електростатики – *теореми Гаусса*. Вона визначає потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену

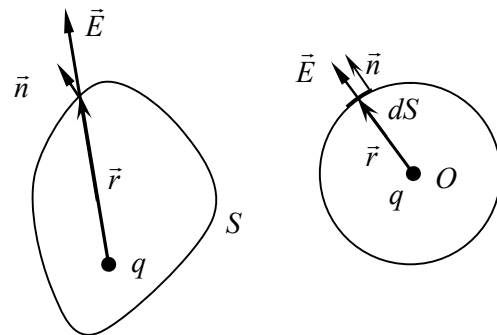


Рисунок 89.2

поверхню S . За додатну нормаль до поверхні S візьмемо *зовнішню нормаль*, тобто нормаль, яка спрямована назовні (рис. 89.2). Припустимо спочатку, що електричне поле створюється одним точковим зарядом q . На поверхні S це поле визначається виразом

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (89.1)$$

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли поверхня S є сферою, а точковий заряд q розміщено в її центрі. Потік вектора \vec{E} через елементарну площину цієї сфери дорівнює

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot dS$$

(тут $\vec{n} \parallel \vec{r}$ рис. 89.2), а потік через всю сферу

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \int dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot S$$

(тут $r = const$). Поверхня сфери S дорівнює $4\pi r^2$, тому *потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню дорівнює*

$$\boxed{\Phi \equiv \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}}. \quad (89.2)$$

Покажемо тепер, що результат (89.2) не залежить від форми поверхні S , що оточує заряд q . Візьмемо довільну елементарну площину dS із встановленим на ній додатним напрямком нормалі \vec{n} (рис. 89.3). Потік вектора \vec{E} через цю площу буде дорівнювати

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E \cdot dS_r,$$

де dS_r – проекція площі $d\vec{S}$ на площину, яка перпендикулярна до радіуса \vec{r} . Використовуючи вираз для напруженості електричного поля точкового заряду (89.1), отримаємо $d\Phi = (q/4\pi\epsilon_0) \cdot (dS_r/r^2)$. Величина dS_r/r^2 є тілесний кут $d\Omega$, під яким із точки знаходження заряду q видно площу dS_r , а отже, і площу dS . Домовимося вважати його додатним, якщо площа dS повернена до q внутрішньою стороною, і від'ємною в іншому разі. Тоді

$$d\Phi = (q/4\pi\epsilon_0) \cdot d\Omega. \quad (89.3)$$

Потік Φ через довільну скінченну поверхню S знайдемо інтегруванням цього виразу за $d\Omega$. Заряд q не залежить від положення площини dS , тому $\Phi = (q/4\pi\epsilon_0) \cdot \int d\Omega$, або

$$\Phi \equiv \oint \vec{E} d\vec{S} = (q/4\pi\epsilon_0) \cdot \Omega, \quad (89.4)$$

де Ω – тілесний кут, під яким із точки знаходження заряду q видно поверхню S .

Якщо поверхня S замкнена, то потрібно розрізнати два випадки.

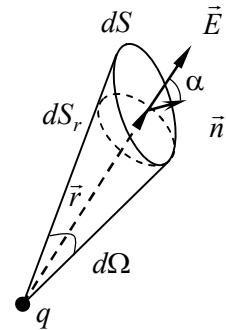


Рисунок 89.3

Випадок 1 Заряд q лежить усередині простору, який оточено поверхнею S (рис. 89.4). У цьому разі тілесний кут Ω охоплює всі напрямки в просторі, тобто дорівнює 4π ($\Omega = S_{\text{сфери}} / r^2 = 4\pi r^2 / r^2 = 4\pi$), а тому формула (89.4) переходить у (89.2).

Випадок 2 Заряд q лежить поза простором, який оточено поверхнею S (рис. 89.5). У цьому разі потік $d\Phi$ завжди можна подати як (рис. 89.5)

$$d\Phi = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = d\Phi_1 + d\Phi_2.$$

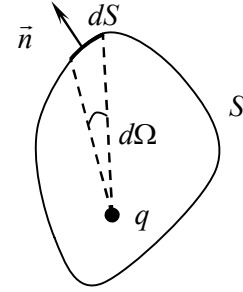


Рисунок 89.4

Потоки $d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = (q/4\pi\epsilon_0)d\Omega$ та $d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -(q/4\pi\epsilon_0)d\Omega$, як випливає з (89.3) та рисунка 89.5, рівні за модулем та протилежні за знаком. Тому

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = (q/4\pi\epsilon_0)d\Omega - (q/4\pi\epsilon_0)d\Omega = 0.$$

Зрозуміло, що в цьому разі і повний потік напруженості електричного поля заряду q , який лежить поза простором, який оточено поверхнею S , дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли поле \vec{E} створюється системою точкових зарядів q_1, q_2, \dots . Тоді вектор \vec{E} можна подати геометричною сумою

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i,$$

де \vec{E}_i – напруженість електричного поля, що створюється одним із зарядів системи q_i . Помноживши це співвідношення скалярно на $d\vec{S}$ й проінтегрувавши по поверхні S , отримаємо

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\sum \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum \left(\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \right) = \sum \Phi_i, \quad (89.5)$$

де Φ_1, Φ_2, \dots – потоки векторів $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$ через ту ж саму поверхню S . Якщо заряд q_i оточений замкненою поверхнею S , то його потік через цю поверхню буде дорівнювати $\Phi_i = q_i / \epsilon_0$ ((89.4), (89.2)). Якщо ж заряд лежить поза простором, який оточено поверхнею S , то його потік дорівнює нулю. Унаслідок цього отримуємо дуже важливе співвідношення

$$\boxed{\Phi \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_k}, \quad (89.6)$$

яке називають **електростатичною теоремою Гаусса**. Ця теорема стверджує, що *потік вектора напруженості електростатичного поля через замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів q , які оточені цією поверхнею, поділену на ϵ_0* . Заряди, які розміщені в зовнішньому просторі щодо цієї поверхні, на величину потоку не впливають.

Під час доведення вважали, що всі заряди точкові. Але це обмеження легко зняти, тому що будь-який заряд можна подати як сукупність точкових зарядів.

§ 90 Напруженість електричного поля нескінченної однорідно зарядженої пластини

1 У разі симетричного розподілу зарядів, а отже, і симетричних полів теорема Гаусса дозволяє знайти напруженість поля достатньо простим способом.

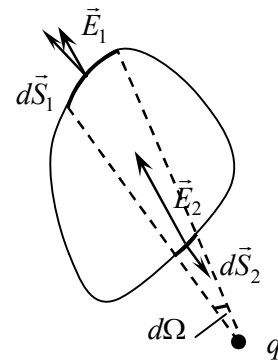


Рисунок 89.5

Коли заряд зосереджений у тонкому поверхневому шарі тіла, розподіл заряду характеризується за допомогою **поверхневої густини** σ , яка визначається виразом

$$\sigma = dq / dS, \quad (90.1)$$

де dS – площа малої ділянки поверхні; dq – заряд, що розміщено на цій площі.

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної рівномірно зарядженої площини, яка має поверхневу густину електричного заряду σ . Для визначеності будемо вважати заряд додатним. З міркувань симетрії випливає, що напруженість поля в будь-якій точці спрямована вздовж перпендикуляра до площини. Дійсно, оскільки площина нескінченна й заряджена однорідно, немає жодних підстав до того, щоб вектор \vec{E} відхилився в будь-який бік від нормалі до площини. Також очевидно, що в симетричних щодо площини точках напруженість поля однакова за величиною й протилежна за напрямком.

На підставі вище описаної симетрії поля, виберемо поверхню інтегрування у вигляді циліндра з твірними, які перпендикулярні до площини, і основами величиною ΔS , які розміщені щодо площини симетрично (рис. 90.1). Знайдемо потік вектора \vec{E} через цю поверхню інтегрування. Завдяки симетрії напруженість електричного поля на кожній основі за модулем є однаковою $E' = E'' = E$. Крім того, для основ

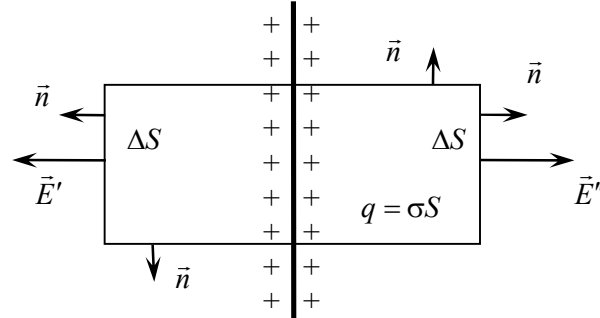


Рисунок 90.1

нормальна складова напруженості електричного поля E_n збігається з E . Тоді потік вектора \vec{E} через одну основу буде $E \cdot \Delta S$, а через обидві основи $2 \cdot E \cdot \Delta S$. Потік через бічну частину поверхні буде відсутній, оскільки E_n у кожній її точці дорівнює нулю (вектор напруженості електричного поля і нормаль до бічної поверхні взаємно перпендикулярні). Тому потік вектора \vec{E} через поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн.поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + 2E \cdot \Delta S = 2E \cdot \Delta S. \quad (90.2)$$

Заряд, що міститься всередині поверхні інтегрування (обмежено поверхню інтегрування) нескладно знайти (рис. 90.1)

$$q = \sigma \Delta S. \quad (90.2)$$

Далі використаємо теорему Гаусса, згідно якої

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0, \quad (90.3)$$

де q – заряд, який міститься всередині поверхні інтегрування.

Підставляємо (90.1) й (90.2) в (90.3) і отримуємо шукану **напруженість електричного поля однорідно зарядженої нескінченної пластини**

$$E = \sigma / (2\epsilon_0). \quad (90.4)$$

Отже, напруженість електричного поля нескінченно зарядженої площини не залежить від відстані до неї. Відзначимо також, що по різні боки від площини вектори \vec{E} однакові за модулем, але протилежні за напрямком. Тому у разі переходу через заряджену площину напруженість електричного поля змінюється стрибком.

§ 91 Напруженість електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні

1 Якщо заряд розміщений на дуже тонкому «ниткоподібному» провіднику, розподіл заряду вздовж нитки характеризують за допомогою *лінійної густини* λ , що визначається виразом

$$\lambda = dq / dl, \quad (91.1)$$

де dl – фізично нескінченно малий відрізок нитки; dq – заряд, що розташований на цьому відрізку.

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної циліндричної поверхні радіусом R , яка заряджена однорідно з лінійною густиною λ (рис. 91.1). З міркувань симетрії випливає, що напруженість поля в будь-якій точці повинна бути спрямована уздовж радіальної прямої, яка перпендикулярна до осі циліндра, а величина напруженості може залежати тільки від відстані r до осі циліндра.

На підставі вище описаної симетрії поля виберемо поверхню інтегрування у вигляді коаксіального із зарядженою поверхнею циліндра радіусом r й висотою h (рис. 91.1). Знайдемо потік вектора \vec{E} через цю поверхню. Нормальні складові вектора напруженості на бічній поверхні будуть дорівнювати $E_n = E(r)$ (заряд вважаємо додатним), на основі циліндра $E_n = 0$ (вектор напруженості електричного поля і нормаль до основи взаємно перпендикулярні). Тому потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

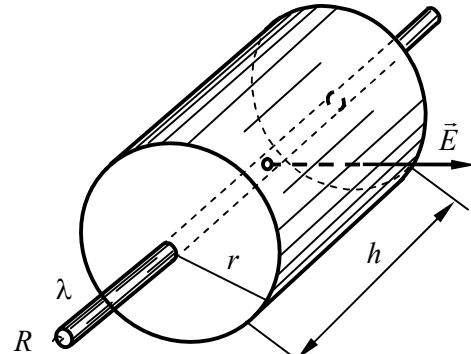


Рисунок 91.1

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн.поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot S_{\text{бічн.}} + 0 = E(r) \cdot 2\pi r h. \quad (91.2)$$

Тепер знайдемо заряд усередині поверхні інтегрування. Тут потрібно розглянути два випадки. У разі, коли радіус поверхні інтегрування більше або дорівнює радіусу циліндра $r \geq R$, заряд усередині поверхні інтегрування дорівнює, як це випливає з рисунка,

$$q = \lambda \cdot h, \quad \text{коли } r \geq R. \quad (91.3)$$

Коли ж $r < R$, то поверхня інтегрування розташована всередині циліндричної поверхні, на якій розміщено електричний заряд. Тому в цьому разі всередині поверхні інтегрування заряд буде дорівнювати нулю

$$q = 0, \quad \text{коли } r < R. \quad (91.4)$$

Тепер використаємо теорему Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (91.5)$$

Підставивши в (91.5) формули (91.2) й (91.3) для першого випадку отримаємо

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \text{або} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{коли } r \geq R. \quad (91.6)$$

Для другого випадку підставляємо в (91.5) формули (91.2) й (91.4). Звідси,

$$E(r) = 0, \quad \text{коли } r < R. \quad (91.7)$$

Отже, отримали формули (91.6) та (91.7), які визначають напруженість електричного поля від нескінченної циліндричної поверхні радіусом R , яка заряджена однорідно з лінійною густиною λ .

§ 92 Напруженість електричного поля об'ємно зарядженої кулі

1 *Об'ємна густина електричного заряду* ρ визначається як відношення заряду dq до фізично нескінченно малого об'єму dV , у якому міститься цей заряд:

$$\rho = dq / dV . \quad (92.1)$$

Знайдемо напруженість електричного поля нескінченної об'ємно зарядженої кулі радіусом R , яка має густину електричного заряду ρ (рис. 92.1). З міркувань симетрії випливає, що поле, яке створює електричний заряд кулі, буде центральносиметричним. Це означає, що напрямок вектора \vec{E} в будь-якій точці проходить через центр кулі, а величина напруженості є функцією відстані r від центра кулі.

На підставі вище описаної симетрії поля виберемо поверхню інтегрування у вигляді концентричної із зарядженою кулею сферичну поверхню радіусом r (на рисунку 92.1 зображена пунктирною лінією). Для всіх точок цієї поверхні $E_n = E(r)$ (заряд кулі вважаємо додатним, вектор напруженості електричного поля і нормаль до поверхні інтегрування є паралельними). Тому потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

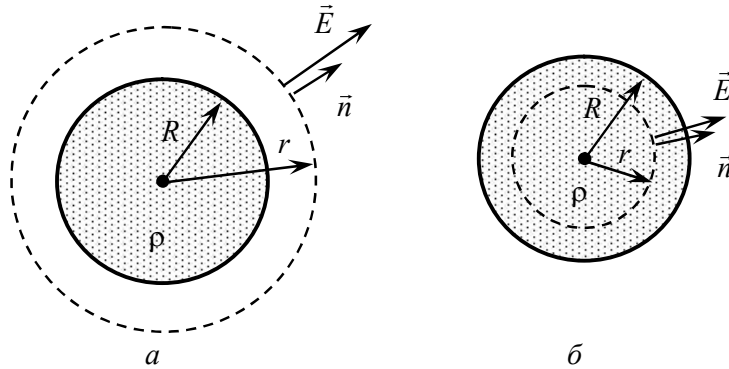


Рисунок 92.1

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 4\pi r^2 . \quad (92.2)$$

Тепер знайдемо заряд усередині поверхні інтегрування. Тут потрібно розглянути два випадки: *a* і *б*, рисунок 92.1. У випадку *a*, коли радіус поверхні інтегрування більше або дорівнює радіусу кулі $r \geq R$, заряд всередині поверхні інтегрування дорівнює, як це випливає з рисунка, заряду всієї кулі

$$q_{\text{кулі}} = \rho \cdot V_{\text{кулі}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 , \text{ коли } r \geq R . \quad (92.3)$$

Коли ж $r < R$ (випадок *б*, рис. 92.1), то поверхня інтегрування міститься всередині кулі. Тому всередині поверхні інтегрування буде міститися тільки частина заряду кулі, яка дорівнює

$$q = \rho \cdot V_{\text{пов. інтегрування}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 , \text{ коли } r < R . \quad (92.4)$$

Тепер використаємо теорему Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (92.5)$$

Підставивши у (92.5) формули (92.2) й (92.3), для випадку *a* отримаємо

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{кулі}}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi \cdot R^3 \cdot \rho}{3 \cdot \epsilon_0} \text{ або } \boxed{E(r) = \frac{q_{\text{кулі}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}} , \text{ коли } r \geq R . \quad (92.6)$$

Для випадку *б* підставляємо в (92.5) формули (92.2) й (92.4). Звідси,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \cdot r^3 \cdot \rho}{3 \cdot \epsilon_0} \text{ або } \boxed{E(r) = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}} , \text{ коли } r < R . \quad (92.7)$$

Отже, отримали формули (92.6) та (92.7), які визначають напруженість електричного поля однорідно зарядженої кулі радіусом R з густиною електричного заряду ρ . Як бачимо, за межами кулі поле збігається з полем точкового заряду тієї самої величини, що й куля, який поміщено в центр кулі. Усередині ж кулі напруженість поля росте лінійно з відстанню r від центра кулі.

§ 93 Диференціальна форма електростатичної теореми Гаусса. Значення теореми Гаусса в теорії електрики

1 Співвідношення

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (93.1)$$

виражає теорему Гаусса в інтегральній формі. Сформулюємо тепер цю теорему в диференціальній формі.

Як відомо, об'ємна густина електричного заряду ρ визначається як відношення заряду dq до фізично малого об'єму dV , у якому міститься цей заряд

$$\rho = dq / dV. \quad (93.2)$$

Формулюючи визначення густини електричного заряду ρ у формі (93.2), ми розуміємо, що електричний заряд у просторі розподілений неперервно. Уявлення про неперервний розподіл електричного заряду у просторі є такою ж самою ідеалізацією, як і уявлення про неперервний розподіл речовини. Такими уявленнями широко користуються в макроскопічній фізиці.

Знаючи об'ємну густина заряду ρ у кожній точці простору, можна знайти сумарний заряд, який міститься усередині замкненої поверхні S . Для цього потрібно обчислити інтеграл від ρ по об'єму V , який обмежений цією поверхнею

$$q = \int_V \rho dV.$$

Використовуючи цю формулу, співвідношенню (93.1) можна надати вигляду

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (93.3)$$

У математиці відома **теорема Остроградського – Гаусса**, згідно з якою для векторного поля $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ виконується рівність

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV. \quad (93.4)$$

Тут проводиться інтегрування по об'єму V , який обмежений поверхнею S ; через $\text{div} \vec{A}$ позначено дивергенцію вектора \vec{A} , яка в декартових координатах має вигляд

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса (93.4), для потоку напруженості електричного поля можемо записати

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV. \quad (93.5)$$

Порівнюючи (93.3) та (93.5), можемо записати

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV. \quad (93.6)$$

Рівність (93.6) може виконуватися для довільного об'єму тільки тоді, коли відповідні підінтегральні вирази (93.6) будуть рівними між собою. Звідси отримуємо

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0}. \quad (93.7)$$

Співвідношення (93.7) виражає **теорему Гаусса в диференціальній формі**: дивергенція вектора \vec{E} в деякій точці електростатичного поля дорівнює об'ємній густині заряду в тій самій точці, яка поділена на ϵ_0 .

2 В електростатиці теорема Гаусса є не більше як одним із наслідків закону Кулона. Але ми не можемо обмежитися електростатикою. Наше завдання значно ширше. Ми повинні шляхом узагальнення дослідних фактів відшукати загальні рівняння й закони, які можна застосувати не тільки в електростатиці, але й у всій електродинаміці. Як керівний принцип під час відшукування таких законів можна виставити вимогу, щоб вони були законами теорії поля, які виключають миттєву дію на відстані. Закон Кулона цю вимогу не задовольняє. Він може бути справедливий тільки в електростатиці. Однак наслідки, що отримані з нього, можуть мати й більш широку область застосування. До таких наслідків і належить теорема Гаусса. Вона не суперечить теорії поля з її уявленням про скінченну швидкість поширення взаємодій. Записана в диференціальній формі, теорема Гаусса не містить жодних натяків на дальнодійний характер сил. Вона є локальною теоремою, тобто зв'язує різні фізичні величини (ρ і $\operatorname{div} \vec{E}$) в одній і тій же самій точці простору. Закони теорії поля не обов'язково повинні бути локальними. Однак усі локальні закони сумісні з основним уявленням цієї теорії про передавання взаємодій за допомогою полів. З іншого боку, закон Кулона є тільки достатнім, але не є необхідним для доведення теореми Гаусса. Тому природно ввести гіпотезу, що *теорема Гаусса є правильною не тільки в електростатиці, але й в електродинаміці, яка має справу зі змінними в часі електромагнітними полями*. Правильна ця гіпотеза, чи ні – на це питання може дати відповідь тільки дослід. Уся сукупність дослідних фактів свідчить на користь цієї гіпотези. Тому ця гіпотеза і була прийнята у фізиці. Тим самим **рівняння теорему Гаусса (93.7) і математично еквівалентне йому рівняння (93.1) перестають бути скромними наслідками закону Кулона, а вводяться в ранг основних постулатів теорії електрики**. Вони входять у систему основних рівнянь Максвелла.

ТЕМА 15 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

§ 94 Поляризація діелектриків. Зв'язані заряди. Механізми поляризації

1 Усі речовини складаються з атомів і молекул. Зі свого боку, атоми складаються з від'ємно заряджених електронів і додатно заряджених ядер. За умови внесення речовини в електричне поле легкі електрони зміщуються у протилежному напрямку щодо напруженості поля. Зміщення атомних ядер порівняно з ними дуже малі. Відбувається частковий поділ додатних і від'ємних зарядів. Завдяки цьому в окремих місцях тіла з'являються макроскопічні заряди різних знаків. **Макроскопічні заряди, що з'явилися внаслідок дії електричного поля, називають індукованими зарядами**. До виникнення індукованих зарядів і зводиться вплив речовини на електричне поле.

Індуковані заряди створюють додаткове електричне поле, що накладається на поле первинних зарядів. *Якщо відомі всі первинні й індуковані заряди, то під час обчислення повного електричного поля можна «забути» про наявність речовини. Повне поле знайдеться*

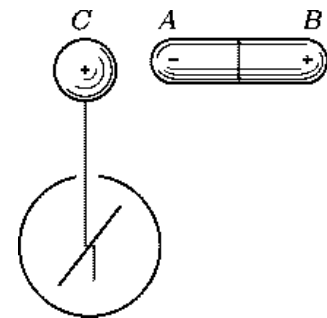


Рисунок 94.1

суперпозицією кулонівських полів, які збуджуються у вакуумі всіма первинними й індукованими зарядами.

2 Діелектрики є непровідниками електричного заряду. У них можуть збуджуватися індукційні заряди. Піднесемо, наприклад, до кульки зарядженого електроскопа C електрично нейтральне тіло з діелектрика AB (рис. 94.1). Кут відхилення стрілки електроскопа зменшується. Можна пояснити це тим, що заряд кульки C збуджує на кінці діелектрика B індукційні заряди того ж самого, а на кінці A – протилежного знака. Ці заряди відтягують частину зарядів зі стрілки й стрижня електроскопа на кульку, з чим і пов'язане зменшення кута відхилення стрілки.

Спробуємо розділити індукційні заряди, що виникли на діелектрику. Нехай діелектрик складається із двох половин A і B , що торкаються одна одну. Якщо в присутності зарядженого електроскопа ці частини роз'єднати, а потім забрати або розрядити електроскоп, то обидві частини виявляться незарядженими (металеві частини в аналогічному досліді виявляються зарядженими). Це показує, що заряди в діелектрику позбавлені можливості пересуватися, на відміну від електронів у металах.

3 Поляризацією діелектриків називають зміщення додатних і від'ємних електричних зарядів у діелектриках у протилежні боки. Поляризація діелектриків відбувається під дією електричного поля або деяких інших зовнішніх чинників, наприклад механічних напруг у п'єзоелектриках. Розглянемо більш детально поляризацію діелектриків під дією електричного поля.

Заряди в діелектрику можуть зміщуватися зі своїх положень рівноваги лише на малі відстані, порядку атомних розмірів. Припустимо, наприклад, що діелектрик складається з молекул, дипольний момент яких дорівнює нулю. Під дією прикладеного електричного поля центр ваги електронів (від'ємний заряд) у молекулі ненабагато зміщується щодо центра ваги атомних ядер (додатний заряд). Молекули стають електричними диполями, орієнтованими додатно зарядженими кінцями в напрямку електричного поля \vec{E} . У цьому разі говорять, що **діелектрик є поляризованим**, а саме зміщення додатних і від'ємних зарядів діелектрика в різні боки називають **електричною поляризацією**. На схематичному рисунку 94.2 діелектрик зображений у вигляді прямокутного паралелепіпеда, а молекули – у вигляді кульок. Додатно заряджена половина молекули зафарбована в чорний колір, від'ємно заряджена залишена світлою. Ми бачимо, що на кінці AB паралелепіпеда $ABCD$ виступають некомпенсовані від'ємні, а на кінці CD – додатні поверхневі заряди. Це і є **індукційні заряди**, що з'являються внаслідок поляризації діелектрика. Їх називають **поляризаційними, або зв'язаними зарядами**. Останнім терміном хочуть підкреслити, що можливість переміщення зв'язаних зарядів обмежена рамками електрично нейтральних молекул. Ці заряди **зв'язані з молекулами**. В об'ємі діелектрика відбувається компенсація додатних і від'ємних зарядів молекул і жодних макроскопічних поляризаційних зарядів тут не з'являється. Однак це справедливо тільки тоді, коли **поляризація діелектрика однорідна, тобто коли всі молекули діелектрика поляризовані й орієнтовані однаково**. Якщо ж поляризація неоднорідна, то компенсація відсутня, і в діелектрику можуть з'явитися об'ємні зв'язані заряди.

Крім електрично нейтральних молекул, у діелектрику можуть існувати додатно або від'ємно заряджені іони. Надлишок іонів одного або іншого знака в будь-якій частині діелектрика означає наявність у цій частині некомпенсованих макроскопічних зарядів. Такі заряди називаються **вільними**. Вони виникають у діелектрику, наприклад, під час електризації тертям. До вільних зарядів належать також усі заряди, що містяться на провідниках. Відмінність вільних зарядів від зв'язаних полягає в тому, що вони не зв'язані з конкретною молекулою і можуть переміщуватися у речовині.

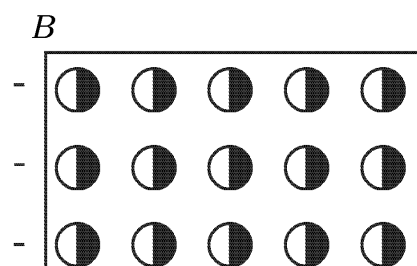


Рисунок 94.2

4 Вище ми розглянули **електронний механізм поляризації**. Механізм поляризації діелектрика може бути й іншим. Розглянемо, наприклад, діелектрики, молекули яких мають дипольні моменти і за умови відсутності електричного поля. Такі молекули називаються **полярними**. Якщо поле відсутнє, то полярні молекули хаотично рухаються й орієнтовані абсолютно невпорядковано. У разі накладення електричного поля дипольні моменти молекул орієнтуються переважно в напрямку поля. А це означає, що діелектрик стає поляризованим. Про такий механізм поляризації говорять як про **орієнтаційний**. Існують і інші механізми поляризації.

§ 95 Вектор поляризації. Поверхнева густина зв'язаних зарядів. Зв'язаний заряд усередині діелектрика

1 Для кількісного опису поляризації діелектрика користуються поняттям вектор поляризації. **Вектором поляризації** в деякій точці простору називають відношення дипольного моменту у фізично малому об'ємі ΔV , який міститься у цій точці, до величини цього об'єму

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}. \quad (95.1)$$

Нагадаємо, що диполем називають систему двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, відстань l між якими мала порівняно з відстанями до тих точок, у яких розглядається поле системи. Орієнтацію диполя в просторі задають за допомогою вектора \vec{l} , який проведено від заряду $-q$ до заряду $+q$. Диполь характеризується дипольним моментом, який за визначенням дорівнює $\vec{p} = |q| \cdot \vec{l}$. Прикладом диполя є поляризована молекула. Дипольний момент являє собою важливу характеристику молекули.

2 Знайдемо зв'язок між вектором поляризації та густиною зв'язаних зарядів. Розглянемо частину однорідного ізотропного діелектрика, який має форму косоного паралелепіпеда (рис. 95.1). Розмістимо його в однорідному електричному полі, яке спрямовано паралельно бічним ребрам. На основах паралелепіпеда з'являться поляризаційні заряди з поверхневою густиною σ' (тут і далі величини, які пов'язані зі зв'язаним зарядом, будемо позначати штрихом біля відповідного символу). На бічних гранях поляризаційних зарядів не виникне, тому що зміщення зарядів усередині діелектрика відбувається паралельно електричному полю \vec{E} , а отже, і цим граням. Якщо S – площа основи паралелепіпеда, то на основах з'явиться електричний заряд $q = S \cdot \sigma'$. Загальний дипольний момент косоного паралелепіпеда з діелектрика буде дорівнювати

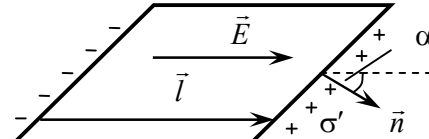


Рисунок 95.1

з'являться поляризаційні заряди з поверхневою густиною σ' (тут і далі величини, які пов'язані зі зв'язаним зарядом, будемо позначати штрихом біля відповідного символу). На бічних гранях поляризаційних зарядів не виникне, тому що зміщення зарядів усередині діелектрика відбувається паралельно електричному полю \vec{E} , а отже, і цим граням. Якщо S – площа основи паралелепіпеда, то на основах з'явиться електричний заряд $q = S \cdot \sigma'$. Загальний дипольний момент косоного паралелепіпеда з діелектрика буде дорівнювати

$$q \cdot \vec{l} = S \cdot \sigma' \cdot \vec{l},$$

де \vec{l} – вектор, який проведено від від'ємної основи паралелепіпеда до додатної паралельно бічним ребрам. Згідно з означенням (95.1) можемо записати вектор поляризації цього паралелепіпеда у вигляді

$$\vec{P} = \frac{q \cdot \vec{l}}{V} = \frac{S \cdot \sigma' \cdot \vec{l}}{V}, \quad (95.2)$$

де V – об'єм паралелепіпеда. Нехай \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до основи паралелепіпеда, яка заряджена додатно. Тоді $V = S \cdot l \cdot \cos \alpha = S \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n})$. У цій формулі α – кут між векторами \vec{l} та \vec{n} . Підставивши це значення у формулу (95.2) і помноживши її скалярно на \vec{n} , знайдемо

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{S \cdot \sigma'}{S \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n})} \vec{l} \cdot \vec{n} = \sigma',$$

або

$$\boxed{\sigma' = P_n}. \quad (95.3)$$

Формула (95.3) була доведена для додатно зарядженої основи. Але вона правильна й для від'ємно зарядженої основи, тому що на ній зовнішня нормаль \vec{n} спрямована у протилежний бік, і тому проєкція P_n – від'ємна. Формула справедлива й на бічній поверхні паралелепіпеда, тому що на ній, як ми бачили, $\sigma' = 0$, що узгоджується з формулою (95.3). Отже, формула (95.3) є справедлива і загалом.

Формула (95.3) доводить, що нормальна складова P_n чисельно дорівнює електричному заряду, що зміщується під час поляризації через одиничну площу в напрямку нормалі \vec{n} до неї. Ця інтерпретація є правильною й у разі неоднорідної поляризації. Тобто для такої, коли вектор \vec{P} змінюється від точки до точки. Щоб переконатися в цьому, досить уявно розділити діелектрик на малі об'єми, у межах кожного з яких поляризація може вважатися однорідною.

3 Як зазначено вище, за неоднорідної поляризації поляризаційні заряди можуть з'являтися не тільки на поверхні, але й в об'ємі діелектрика. Обчислимо тепер величину поляризаційних зарядів усередині діелектрика. Виділимо уявно в діелектрику довільний об'єм V , який обмежений замкненою поверхнею S (рис. 95.2). Заряд, який зміщується під час поляризації через площину dS у напрямку нормалі \vec{n} , відповідно до формули (95.3) дорівнює $P_n \cdot dS$. Щоб знайти, який заряд

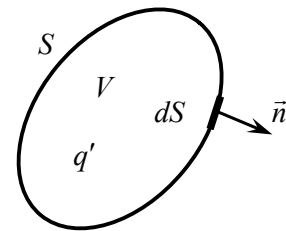


Рисунок 95.2

вийде на всю поверхню S , потрібно просумувати (проінтегрувати) заряди на кожній елементарній площі dS цієї поверхні: $\oint_S P_n dS$. Діелектрик до поляризації був електрично нейтральним. Тому згідно з законом збереження електричного заряду всередині діелектрика повинен міститися заряд, який рівний за модулем та протилежний за знаком до заряду, що вийшов на поверхню. Отже, всередині діелектрика за неоднорідної поляризації буде міститися електричний заряд

$$\boxed{q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}}. \quad (95.4)$$

Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса для вектора поляризації $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{P} \cdot dV$ та зв'язок заряду з об'ємною густиною електричного заряду $q' = \int_V \rho' \cdot dV$ з (95.4) нескладно знайти густину зв'язаних зарядів у діелектрику

$$\boxed{\text{div} \vec{P} = -\rho'}. \quad (95.5)$$

Із співвідношення (95.5) випливає, що коли поляризація діелектрика є однорідною ($\vec{P} = \text{const}$), то $\rho' = 0$, а отже, і $q' = \int_V \rho' \cdot dV = 0$. Тобто, коли поляризація діелектрика є однорідною, то всередині діелектрика зв'язані заряди відсутні.

§ 96 Вектор електричної індукції. Теорема Гаусса для діелектриків

1 Джерелом електричного поля в електростатиці є електричні заряди і не важливо, чи вони є сторонніми, чи зв'язаними. Тому для обчислення електричного поля в діелектриках необхідно враховувати як вільні, так і сторонні електричні заряди. Це є відображенням того,

що коли відомі всі первинні (сторонні) й індуковані (поляризаційні) заряди, то під час обчислення повного електричного поля можна «забути» про наявність речовини. Повне поле знайдеться суперпозицією полів, які збуджуються у вакуумі всіма первинними й індукованими зарядами. Тому теорему Гаусса для електричного поля в діелектрику потрібно записати у вигляді

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (96.1)$$

де q та q' є відповідно вільні та сторонні заряди, які розміщені всередині поверхні S . Візьмемо до уваги, що

$$q' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

Тоді отримаємо

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q, \quad (96.2)$$

Введемо новий вектор

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}, \quad (96.3)$$

який називається вектором *електричної індукції* або *електричного зміщення*. Тоді

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q}. \quad (96.4)$$

Вираз (96.4) і є *теоремою Гаусса для електричного поля в діелектрику в інтегральній формі*. Бачимо, що потік вектора \vec{D} через замкнену поверхню визначається тільки вільними зарядами всередині цієї поверхні. Саме цим і виправдовується введення вектора \vec{D} .

2 Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса для вектора електричної індукції $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} \cdot dV$ та зв'язок заряду з об'ємною густиною електричного заряду

$q = \int_V \rho \cdot dV$ з (96.4) нескладно знайти *теорему Гаусса для електричного поля в діелектрику в диференціальному вигляді*

$$\boxed{\text{div} \vec{D} = \rho}. \quad (96.5)$$

Нагадаємо, що теорема Гаусса є правильною не тільки в електростатиці, але й в електродинаміці.

§ 97 Поляризованість і діелектрична проникність

1 Яким можна знайти напруженість електричного поля в діелектрику \vec{E} ? Зрозуміло, що електричне поле в речовині буде відрізнятися від зовнішнього через те, що в речовині індукуються поляризаційні заряди. Ці індуковані заряди створюють власне електричне поле \vec{E}' , яке накладається на зовнішнє \vec{E}_0 . Результуюче поле буде дорівнювати

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (97.1)$$

І водночас потрібно врахувати, що поле поляризаційних зарядів \vec{E}' визначається поляризаційними зарядами, які зі свого боку, залежать від результуючого поля \vec{E} .

Принципово знайти напруженість електричного поля в діелектрику \vec{E} можна так: 1) завдяки теоремі Гаусса для діелектрика ($\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$) можна знайти вектор індукції

електричного поля \vec{D} , на підставі інформації про сторонні заряди q ; 2) використовуючи отриману індукцію електричного поля \vec{D} та зв'язок між \vec{E} та \vec{D} , можемо знайти шукану напруженість електричного поля \vec{E} .

Отже, для розв'язання вище сформованої задачі потрібно знати зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та індукцією \vec{D} (або вектором поляризації \vec{P}).

2 З'ясуємо зв'язок між напруженістю електричного поля \vec{E} та індукцією \vec{D} у діелектрику. Дослід показує, що для великого класу діелектриків і широкого кола явищ зв'язок між векторами \vec{P} і напруженістю поля \vec{E} є лінійним та однорідним. Якщо середовище ізотропне, то вектори \vec{P} й \vec{E} колінеарні й можна записати

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (97.2)$$

де χ – безрозмірний коефіцієнт, який називається **діелектричною сприйнятливістю або поляризованістю** діелектрика. Цей коефіцієнт залежить від густини й температури діелектрика.

Щоб знайти зв'язок між \vec{D} та \vec{E} , використаємо визначення індукції електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (97.3)$$

Далі підставляємо в (97.3) формулу (97.2) й отримуємо

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (97.4)$$

де нова безрозмірна величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (97.5)$$

називається **діелектричною проникністю діелектрика**. Цією величиною звичайно й характеризуються індивідуальні властивості діелектриків. Для вакууму $\chi = 0$ й $\varepsilon = 1$. Формула (97.4) розв'язує вищесформоване завдання.

§ 98 Умови на межі поділу двох діелектриків

1 Знайдемо умови, яким повинні задовольняти вектори \vec{E} й \vec{D} на межі розділу двох однорідних і ізотропних діелектричних середовищ. Розглянемо достатньо малу ділянку межі, через це її можна вважати плоскою, а поля поблизу неї однорідними. Величини, що характеризують поле в першому середовищі, будемо позначати індексом 1, у другому середовищі – індексом 2 (рис. 98.1).

Помістимо діелектрики в зовнішнє електричне поле \vec{E}_0 . У кожному з діелектриків поблизу поверхні розділу з'являться поляризаційні заряди з густиною σ'_1 та σ'_2 , які матимуть протилежні знаки. Границя розділу виявиться зарядженою з поверхневою густиною заряду $(\sigma'_1 - \sigma'_2)$, унаслідок чого з'явиться додаткове електричне поле

$$E' = (\sigma'_1 - \sigma'_2) / (2\varepsilon_0), \quad (98.1)$$

яке є перпендикулярним до межі розділу й спрямоване в кожному з діелектриків у протилежні боки (рис. 98.1). Співвідношення (98.1) отримали, використовуючи формулу для

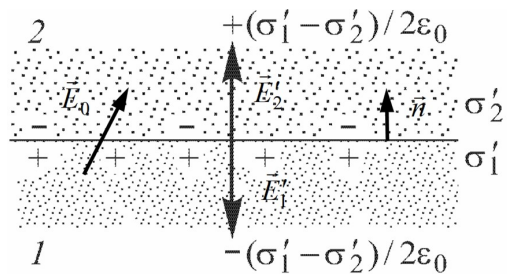


Рисунок 98.1 – Поляризаційні заряди на межі двох діелектриків і створюване ними електричне поле (напрямок поля \vec{E}' в кожному з діелектриків показаний стрілками)

електричного поля зарядженої площини. Поле індукованих зарядів \vec{E}' накладається на зовнішнє \vec{E}_0 . Унаслідок цього загальне поле дорівнює

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0. \quad (98.2)$$

Позначимо напруженість повного (результуючого) поля в кожному з діелектриків через \vec{E}_1 й \vec{E}_2 , розкладемо кожне із цих полів на дві складові: тангенціальну (дотичну) до межі розділу ($E_{\tau 1}$ і $E_{\tau 2}$) і нормальну (перпендикулярну) до границі (E_{n1} і E_{n2}). Будемо вважати, що нормаль спрямована від діелектрика 1 до діелектрика 2. Тоді на підставі (98.2) та того, що \vec{E}' є перпендикулярним до межі, знаходимо

$$E_{\tau 1} = 0 + E_{\tau 0}, \quad E_{n1} = -\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} + E_{n0}, \quad (98.3 \text{ а})$$

$$E_{\tau 2} = 0 + E_{\tau 0}, \quad E_{n2} = +\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} + E_{n0}. \quad (98.3 \text{ б})$$

З (98.3) легко отримати, що *тангенціальні (дотичні) складові електричного поля не змінюються і їхнє значення в обох діелектриках буде однаковим*

$$\boxed{E_{\tau 1} = E_{\tau 2}}. \quad (98.4)$$

Це пов'язано з тим, що електричне поле зарядів поверхні розділу є перпендикулярним до цієї поверхні. Із системи (98.3) легко також отримати, що нормальні складові поля будуть різними; їхня різниця дорівнює

$$E_{n2} - E_{n1} = +2 \cdot \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} = \frac{P_{n1} - P_{n2}}{\varepsilon_0}, \quad (98.5)$$

де P_{n1} і P_{n2} – нормальні складові вектора поляризації в кожному з діелектриків. Нагадаємо, нормальна складова вектора поляризації дорівнює густині зв'язаних або поляризаційних зарядів ($P_n = \sigma'$). Далі співвідношення (98.5) подамо у вигляді

$$\varepsilon_0 E_{n2} + P_{n2} = \varepsilon_0 E_{n1} + P_{n1}$$

або

$$\boxed{D_{n2} = D_{n1}}. \quad (98.6)$$

Тут використали визначення індукції електричного поля. Отже, *нормальні складові індукції електричного поля не змінюються і їхнє значення в обох діелектриках буде однаковим.*

Якщо використати те, що напруженість та індукція електричного поля пов'язані між собою співвідношенням $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, то з нормальних складових напруженості електричного поля та тангенціальних складових індукції електричного поля можна отримати зв'язок

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}}, \quad \boxed{D_{\tau 1} / \varepsilon_1 = D_{\tau 2} / \varepsilon_2}. \quad (98.7)$$

Отже, нормальна складова напруженості електричного поля у разі переходу через межу розділу двох діелектриків стрибком змінює своє значення. Причиною цього є наявність індукованого електричного заряду на межі поділу двох діелектриків. Також стрибком змінює значення і тангенціальна складова індукції електричного поля.

§ 99 Електричне поле всередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля. Електричне поле всередині діелектричного сферичного шару. Фізичний зміст діелектричної проникності

1 Розглянемо електричне поле всередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля. Припустимо, що однорідне електричне поле за умови

відсутності діелектрика дорівнює \vec{E}_0 . Внесемо в це поле пластину з діелектрика з проникністю ϵ , розмістивши її перпендикулярно до напрямку поля \vec{E}_0 (рис. 99.1). Під дією поля діелектрик поляризується й на поверхнях пластини з'являться зв'язані заряди густиною $+\sigma'$ та $-\sigma'$. Ці заряди створюють поле зв'язаних зарядів \vec{E}' , яке накладається на зовнішнє \vec{E}_0 . Отже, результуюче поле буде дорівнювати $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0$. Для того, щоб знайти результуюче поле \vec{E} , використаємо умову на границі двох діелектриків

$$D_n = D_{n0}, \quad (99.1)$$

де $D_n = \epsilon\epsilon_0 E_n = \epsilon\epsilon_0 E$ – нормальна складова вектора індукції електричного поля в діелектрику, $D_{n0} = \epsilon_0 E_{n0} = \epsilon_0 E_0$ – нормальна складова вектора індукції електричного поля у вакуумі. Також тут використали, що діелектрична пластинка розміщена перпендикулярно до напрямку поля і тому $E_n = E$, $E_{n0} = E_0$. Тобто напрямки нормалі до поверхні межі діелектрик-вакуум та вектора напруженості електричного поля збігаються між собою. Отже, співвідношення (99.1) можемо подати у вигляді

$$\epsilon\epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 \quad \text{або} \quad \boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon}. \quad (99.2)$$

Через те, що як зовнішнє поле, так і поле в діелектрику є однорідним, то формула (99.2) визначає електричне поле не тільки на межі розділу діелектрик-вакуум, а й у всьому діелектрику. Отже, отримали формулу (99.2), яка визначає напруженість електричного поля всередині діелектричної пластини, яка розміщена перпендикулярно до напрямку поля.

2 Розглянемо електричне поле всередині сферичного шару з діелектрика, у центрі якого розміщено сторонній точковий заряд. Помістимо в центр сферичного шару з діелектрика з проникністю ϵ сторонній точковий заряд $+Q$ (рис. 99.2). На внутрішній поверхні шару з'явиться від'ємний, а на зовнішній поверхні – додатний зв'язані заряди. Ці заряди будуть розподілені сферично симетрично і тому сферичну симетрію результуючого електричного поля не змінять. Силкові лінії результуючого електричного поля будуть спрямовані вздовж радіальних ліній.

Для знаходження електричного поля всередині шару з діелектрика використаємо теорему Гаусса для діелектрика

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, \quad (99.3)$$

де q – сторонній заряд усередині поверхні інтегрування S .

На підставі вищеописаної симетрії поля виберемо поверхню інтегрування у вигляді концентричної із сферичним шаром з діелектрика сферичну поверхню радіусом r . Для всіх точок цієї поверхні через сферичний розподіл сторонніх і зв'язаних зарядів можемо записати $D_n = D(r)$. Тому потік вектора \vec{D} через замкнену поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \cdot S = D(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (99.4)$$

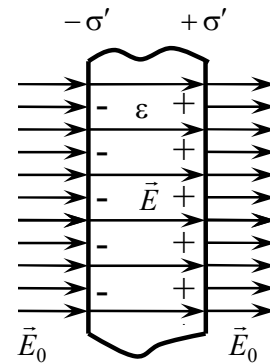


Рисунок 99.1 – Поле усередині діелектричної пластини, яка розміщена в однорідному зовнішньому полі

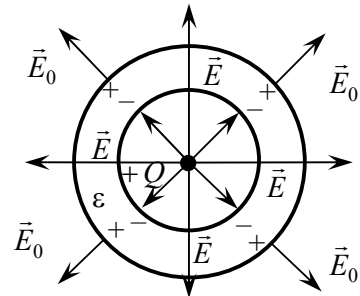


Рисунок 99.2 – Кульовий шар із діелектрика в центрально-симетричному електричному полі

Тепер знайдемо сторонній заряд усередині поверхні інтегрування. Зрозуміло, що він дорівнює Q ($q=Q$). Далі підставляємо (99.4) в (99.3) і з урахуванням того, що $q=Q$, отримуємо

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (99.5)$$

Далі використаємо зв'язок між індукцією і напруженістю електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (99.6)$$

де ε діелектрична проникність середовища на поверхні інтегрування радіусом r , і знайдемо

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{або} \quad \boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon}. \quad (99.7)$$

Тут $E_0 = Q/(4\pi \varepsilon_0 r^2)$ – напруженість електричного поля за умови відсутності діелектрика. Отже, отримали формули (99.7), які визначають електричне поле як усередині сферичного шару з діелектрика, у центрі якого розміщено сторонній точковий заряд, так і за його межами, де діелектричну проникність потрібно покласти такою, що дорівнює одиниці ($\varepsilon=1$).

3 Для обох розглянутих вище прикладів є характерним те, що діелектрик був однорідним й ізотропним, а його поверхні збігалися з екіпотенціальними поверхнями поля сторонніх зарядів. Отриманий нами в цих випадках результат є загальним: якщо однорідний і ізотропний діелектрик з діелектричною проникністю ε повністю заповнює об'єм, що обмежений екіпотенціальними поверхнями поля сторонніх зарядів, то напруженість електричного поля визначається співвідношенням $E = E_0 / \varepsilon$, де E_0 напруженість електричного поля за умови відсутності діелектрика.

Отже, у вище описаних випадках діелектрична проникність ε визначає, у скільки разів зменшується поле в діелектрику. У цьому полягає **фізичний зміст діелектричної проникності**.

ТЕМА 16 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

§ 100 Умови рівноваги зарядів на провіднику. Електричне поле всередині провідника. Напруженість електричного поля біля поверхні провідника

1 Зміщення електричних зарядів у металах і діелектриках під дією зовнішнього електричного поля (виникнення індукованих зарядів) мають зовсім різний характер. У металах є вільні електрони, які в межах провідника можуть вільно переміщуватися на будь-якій відстані під впливом будь-якої малої сили. Тому індукційні заряди, які виникають в електричному полі на протилежних кінцях металевого тіла, можуть бути механічно відділені один від одного. Візьмемо два металевих циліндри A і B , встановлених на ізолювальних підставках і з'єднаних з електроскопами (рис. 100.1). Зблизимо їх так, щоб вони торкалися один одного. Якщо до них піднести заряджену кулю C , то стрілки обох електроскопів відхиляться. У разі віддалення кулі C відхилення пропадає. Розсуємо тепер циліндри A і B у присутності зарядженого тіла C , а потім тіло C віддаляємо. Електричні заряди на A і B , а також на стержнях і стрілках електроскопів збережуться. Якщо куля C була заряджена додатно, то на A виявиться від'ємний, а на B – додатний заряди.

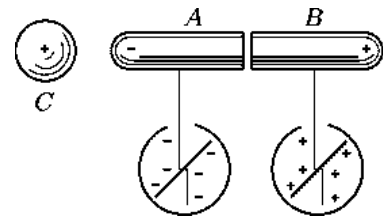


Рисунок 100.1

2 Доведемо, що напруженість електричного поля у провіднику, який перебуває у рівноважному стані, дорівнює нулю. Якщо б усередині однорідного провідника існувало макроскопічне електричне поле, то воно викликало б рух вільних електронів. У провіднику

виник би електричний струм. Цей електричний струм призводить до перерозподілу електричних зарядів, унаслідок якого загальне електричне поле зменшується (в іншому разі на базі цього явища можна б було створити вічний двигун першого роду). Рух електронів припиняється, коли напруженість електричного поля в металі зменшиться до нуля. Отже, для рівноваги електричних зарядів необхідно, щоб макроскопічне поле \vec{E} дорівнювало нулю в усіх точках усередині однорідного провідника.

Для того щоб визначити густину електричного заряду всередині провідника, використаємо теорему Гаусса в диференціальній формі

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (100.1)$$

Звідси випливає, що коли у всіх точках провідника $\vec{E} = 0$, то і $\rho = 0$. Отже, за рівноваги об'ємна густина електричного заряду всередині однорідного провідника дорівнює нулю. Електричний заряд може розміщуватися тільки на поверхні, а не всередині провідника.

Електричні заряди розміщуються на поверхні провідника тому, що між ними діють кулонівські сили притягання й відштовхування. Припустимо, що всередині провідника виникли електричні заряди. Притягання між різнойменними зарядами приведе до їхнього зближення й нейтралізації, а відштовхування однойменних зарядів – до того, що вони розійдуться якнайдалі й розмістяться на поверхні тіла.

3 Знайдемо напруженість електричного поля біля поверхні провідника, який перебуває в рівноважному стані. Для розв'язання цієї задачі використаємо теорему Гаусса. Візьмемо до уваги, що в рівноважному стані напруженість електричного поля біля поверхні провідника має відмінну від нуля лише нормальну (перпендикулярну) до поверхні провідника складову ($E_n \neq 0$), тангенціальна ж складова дорівнює нулю ($E_t = 0$). Якщо б була відмінною від нуля тангенціальна складова, то вздовж поверхні провідника протікав би електричний струм, і цей стан не був би рівноважним. Крім того також використаємо, що електричне поле всередині провідника відсутнє.

На підставі вищеописаної симетрії поля виберемо поверхню інтегрування у вигляді циліндра з твірними, які перпендикулярні до поверхні провідника, і основами величиною ΔS , одна з яких розміщена всередині, а інша – поза провідником (рис. 100.2). Потік вектора напруженості електричного поля через частину поверхні інтегрування, що розміщена всередині провідника, дорівнює нулю, тому що там напруженість електричного поля дорівнює нулю. Поза провідником у безпосередній близькості до нього напруженість поля \vec{E} спрямована вздовж нормалі до поверхні. Тому для бічної поверхні циліндра, що виступає ззовні, потік буде теж дорівнювати нулю, оскільки в кожній її точці вектор напруженості електричного поля \vec{E} і нормаль до бічної поверхні \vec{n} взаємно перпендикулярні ($d\Phi_{\text{бічн. пов.}} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{бічн. пов.}} = E \cdot dS_{\text{бічн. пов.}} \cdot \cos(\pi/2) = 0$). Зовнішня основа розміщена дуже близько до поверхні провідника і є малою за площею. Тому в кожній її точці можна вважати напруженість електричного поля однаковою і такою, що дорівнює $E_n = E$. Отже, потік через цю основу буде дорівнювати $E\Delta S$. Унаслідок можемо записати, що потік через всю замкнену поверхню інтегрування дорівнює

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{бічн. поверхн.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{основи}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + E \cdot \Delta S = E \cdot \Delta S. \quad (100.2)$$

Заряд, що міститься всередині поверхні інтегрування (обмеженою цією поверхнею) нескладно знайти (рис. 100.1)

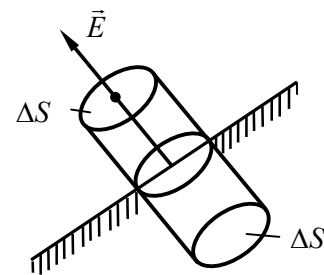


Рисунок 100.2

$$q = \sigma \Delta S, \quad (100.3)$$

де σ – поверхнева густина електричного заряду в точці провідника, де розміщена поверхня інтегрування. Далі використаємо теорему Гаусса, згідно з якою

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0, \quad (100.4)$$

де q – заряд, який міститься всередині поверхні інтегрування. Підставляємо (100.2) й (100.3) у (100.4) і отримуємо шукану *напруженість електричного поля біля поверхні провідника*

$$\boxed{E = \sigma / \varepsilon_0}. \quad (100.5)$$

Зазначимо, що вектор \vec{E} спрямований перпендикулярно до поверхні провідника.

4 Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом, нескладно з'ясувати, що потенціал усіх точок провідника в рівноважному стані є однаковим. Як відомо, різницю потенціалів двох довільних точок можна знайти за допомогою співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{L_{12}} \vec{E} d\vec{l}. \quad (100.6)$$

Лінію L_{12} , вздовж якої проводиться інтегрування, можна вибрати довільно, тому що електричне поле є потенціальним (відповідна сила є консервативною), і інтеграл (100.6) для електростатичного поля не залежить від лінії інтегрування. Виберемо цю лінію так, щоб вона повністю містилася всередині провідника і з'єднувала дві довільні точки провідника. Як відомо, напруженість електричного поля всередині провідника дорівнює нулю, і тому інтеграл в правій частині (100.6) теж буде дорівнювати нулю. Це означає, що для довільних точок провідника $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, тобто

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = const}. \quad (100.7)$$

Отже, *потенціал всередині і на поверхні провідника є сталою величиною.*

§ 101 Електроємність відокремленого провідника. Ємність кулі

1 Розглянемо відокремлений провідник, який розміщено в однорідному середовищі. Передамо цьому провіднику електричний заряд q . Провідник (усі точки провідника) набудуть деякого потенціалу φ . Якщо заряд на провіднику збільшити в n разів, то, як установлено дослідами, і його потенціал збільшиться у стільки ж разів. Дослідами з'ясовано, що відношення величини заряду q провідника до значення його потенціалу φ є сталим: $q / \varphi = const$. Це відношення називають *електроємністю відокремленого провідника (або просто ємністю)*

$$\boxed{C = q / \varphi}. \quad (101.1)$$

Електроємність залежить від геометричних розмірів і форми провідника, розміщення навколо нього інших провідників, діелектричних властивостей середовища. Електроємність не залежить від матеріалу провідника, наявності в ньому порожнин та від величини заряду.

За одиницю в СІ взято електроємність такого відокремленого провідника, потенціал якого змінюється на 1 В під час передавання йому заряду в 1 Кл. Ця одиниця дістала назву *фарада* (Ф): 1 Ф = 1 Кл/В. Ємність в 1 фараду є дуже великою величиною. Тому на практиці переважно користуються частками цієї одиниці ємності: міліфарад (1 мФ = 10^{-3} Ф), мікрофарад (1 мкФ = 10^{-6} Ф), нанофарад (1 нФ = 10^{-9} Ф) і пікофарад (1 пФ = 10^{-12} Ф).

2 *Визначимо електроємність провідної зарядженої кулі радіусом R , яка міститься в однорідному середовищі з відносною проникністю ε .*

Електричне поле зарядженої кулі за її межами подібне до поля точкового заряду, який розміщено в центрі кулі,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \vec{r}. \quad (101.2)$$

Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом, можемо знайти різницю потенціалів між поверхнею кулі ($r = R$) та нескінченністю ($r = \infty$)

$$\varphi - \varphi_\infty = \int_R^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}.$$

Поклавши потенціал на нескінченності φ_∞ таким, що дорівнює нулю (вважаємо, що на нескінченній відстані від заряду поле відсутнє і, отже, його потенціал дорівнює нулю), отримуємо для потенціалу кулі вираз

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (101.3)$$

Використовуємо визначення (101.1) і знаходимо шукану *ємність кулі*

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (101.4)$$

Отже, *ємність відокремленої кулі пропорційна його радіусу і діелектричній проникності навколишнього до кулі середовища.*

§ 102 Конденсатор. Ємність конденсатора. Ємність плоского і циліндричного конденсатора. Ємність системи, що складається з послідовно та паралельно з'єднаних конденсаторів

1 Ємність відокремлених провідників невелика. Наприклад, куля таких розмірів, як Земля, має ємність усього лише 700 мкФ. Водночас бувають потрібні пристрої, які за невеликого потенціалу нагромаджували б на собі («конденсували») великі заряди.

Конденсатором називається система, що складається з двох провідників-обкладок, відокремлених прошарком діелектрика. Наближаючи обкладки і розміщуючи між ними ізоляційний прошарок із високою діелектричною проникністю, можна створити конденсатори великої ємності. Такий конденсатор дає можливість нагромаджувати на обкладках великі заряди за невисоких напруг і малих розмірів приладу. Зазначимо, що електричне поле конденсатора майже повністю локалізоване у вузькому зазорі між його обкладками і тому на нього не впливають навколишні тіла (через це навколишні тіла на ємність конденсатора не впливають). Його обкладки мають заряди однакової величини, але протилежні за знаком.

Умові, щоб електричне поле було зосереджено всередині конденсатора, задовольняють дві пластинки, розташовані близько одна до одної, два коаксіальних циліндри й дві концентричні сфери. Відповідно бувають *плоскі, циліндричні й сферичні конденсатори.*

*Як показують досліди, відношення абсолютної величини заряду до модуля різниці потенціалів обкладок залишається сталим: $q/(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const}$. Це відношення називається **взаємною ємністю або просто ємністю конденсатора**, тобто*

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (102.1)$$

*Різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ називають **напругою** U між відповідними точками.* Вимірюють напругу в СІ у вольтах. Тому формулу (102.1) можна подати у вигляді

$$C = q/U, \quad (102.2)$$

де U – напруга між обкладками.

Ємність конденсаторів вимірюється в тих самих одиницях, що і ємність відокремлених провідників, тобто у фарадах (1 Ф = 1 Кл/В).

На електричних схемах конденсатори позначають так: ||- .

2 Знайдемо ємність плоского конденсатора (рис. 102.1). Нехай площа обкладки дорівнює S , а відстань між обкладками d . Зазор між обкладками вважаємо заповненим діелектриком із проникністю ϵ . Якщо d багато за менше лінійні розміри обкладок, то між обкладками поле буде таким, як поле двох нескінченних різнойменно однорідно заряджених площин. Тільки поблизу країв обкладок поле буде поступово послаблюватися (розсіюватися). Тому ми не внесемо істотної похибки, коли будемо напруженість електричного результуючого поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ від різнойменно заряджених обкладок в об'ємі конденсатора обчислювати з використанням формули для нескінченно зарядженої площини

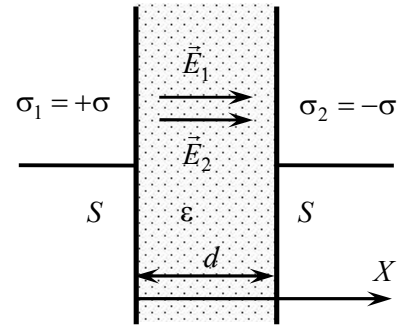


Рисунок 102.1

$$E = E_{1x} + E_{2x} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} - \frac{(-\sigma)}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}. \quad (102.3)$$

Тут використали, що поверхнева густина електричного заряду σ дорівнює відношенню заряду q , що міститься на обкладці, до площі обкладки S ; також взяли до уваги, що діелектрик послабляє поле в ϵ разів. Використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та різницею потенціалів, знаходимо напругу між обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} \int_0^d dx = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}$$

(напрямок осі X вказано на рисунку 102.1). Далі, використовуючи визначення електроємності (102.1), знаходимо ємність плоского конденсатора

$$C = q/U = \epsilon_0 \epsilon S/d. \quad (102.4)$$

3 Знайдемо ємність циліндричного конденсатора (рис. 102.2). Нехай радіуси циліндричних поверхонь дорівнюють відповідно R_1 та R_2 . Зазор між обкладками вважаємо заповненим діелектриком із проникністю ϵ . Якщо довжина l обкладок циліндричного конденсатора набагато більша за відстань між коаксіальними циліндричними обкладками $d = R_2 - R_1$, то розсіюванням поля поблизу країв обкладок можна знехтувати й обчислювати поле в зазорі за формулою напруженості електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні

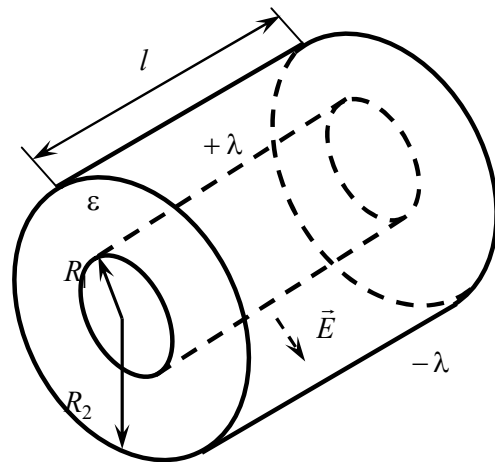


Рисунок 102.2

$$E = E_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\epsilon r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r l}.$$

Тут використали, що лінійна густина електричного заряду $\lambda = q/l$. Також зазначимо, що результуюче поле між обкладками циліндричного конденсатора створює лише внутрішня циліндрична поверхня радіусом R_1 ($E = E_1$). Зовнішня ж поверхня електричного поля у внутрішній області електричного поля не створює (як відомо, усередині провідника електричне поле від заряду на цьому провіднику дорівнює нулю). Напругу між обкладками

знаходимо, використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та різницею потенціалів

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Далі з визначення електроємності (102.2) знаходимо *ємність циліндричного конденсатора*

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln(R_2 / R_1)}. \quad (102.5)$$

4 Маючи деякий набір конденсаторів, можна одержати багато різних значень ємності, якщо застосувати з'єднання конденсаторів у батареї. *Знайдемо ємність батареї конденсаторів, які з'єднані паралельно.*

За умови паралельного з'єднання всі додатні та усі від'ємні обкладки конденсаторів з'єднуються між собою (рис. 102.3). Тому одна з обкладок кожного конденсатора має потенціал φ_1 , а інша φ_2 . На кожному k -му конденсаторі з'являється заряд q_k , який дорівнює згідно з визначенням ємності $q_k = C_k(\varphi_1 - \varphi_2)$. Загальний заряд батареї тоді буде дорівнювати сумі зарядів на кожному окремому конденсаторі

$$q = \sum q_k = \sum C_k(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k.$$

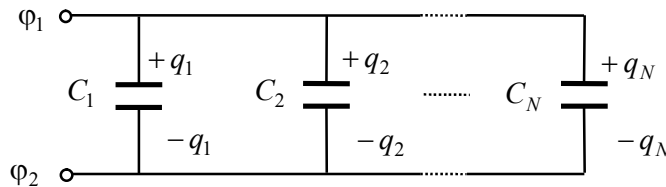


Рисунок 102.3 – Паралельне з'єднання конденсаторів

Розділивши цей загальний заряд на прикладену до батареї напругу $U = \varphi_1 - \varphi_2$, знайдемо *ємність батареї, у якій конденсатори з'єднані паралельно:*

$$C = \frac{q}{U} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k}{\varphi_1 - \varphi_2} = \sum C_k \quad \text{або} \quad \boxed{C = \sum C_k}. \quad (102.6)$$

Отже, за умови паралельного з'єднання конденсаторів їхні ємності складаються.

5 Знайдемо ємність батареї конденсаторів, які з'єднані послідовно.

За умови послідовного з'єднання (рис. 102.4) від'ємно заряджена обкладка першого конденсатора з'єднується з додатно зарядженою обкладкою другого, від'ємно заряджена обкладка другого – з додатно зарядженою обкладкою третього тощо. Провідник, що розміщений між обкладками сусідніх конденсаторів, виявляється електрично ізольованим. Тому для цього провідника виконується закон збереження електричного заряду. Отже, сумарний електричний заряд на цьому провіднику, який дорівнює сумі заряду додатно зарядженої обкладки одного конденсатора та заряду від'ємно зарядженої обкладки другого конденсатора, дорівнює нулю. Тобто *заряди, які виникають на конденсаторах, що з'єднані послідовно, за модулем однакові та протилежні за знаком.* Позначимо заряд конденсатора через q . Напругу на кожному k -му конденсаторі можна обчислити, на підставі визначення ємності, $U_k = q / C_k$. Сума цих напруг дорівнює напрузі $U = \varphi_1 - \varphi_2$, яка прикладена до батареї

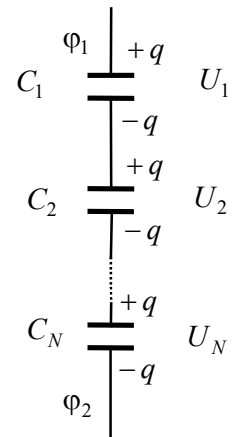


Рисунок 102.4. – Послідовне з'єднання конденсаторів

$$U = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k}. \quad (102.7)$$

На підставі визначення (102.2), знаходимо ємність батареї

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{q \sum \frac{1}{C_k}}{q} = \sum \frac{1}{C_k} \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}}. \quad (102.8)$$

Отже, обернена ємність батареї, у якій конденсатори з'єднані послідовно, дорівнює сумі обернених ємностей конденсаторів, з яких складається ця батарея.

ТЕМА 17 ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

§ 103 Енергія системи точкових зарядів

1 Як відомо, кулонівські сили консервативні. Консервативним силам завжди у відповідність можна поставити потенціальну енергію. Отже, система точкових зарядів q_1, q_2, \dots, q_N має взаємну потенціальну енергію. Щоб знайти вираз для цієї енергії, припустимо, що заряди послідовно переміщуються з нескінченності у відповідні точки поля (рис. 103.1). Почнемо із заряду q_1 . Його перенесення з нескінченності в точку 1 не вимагає виконання роботи, оскільки інші заряди віддалені від нього на нескінченність і з ним не взаємодіють ($A_1 = 0$).

Для перенесення заряду q_2 із нескінченності в точку 2 потрібно виконати роботу проти сил електричного поля, яке створює заряд q_1 . Зрозуміло, що ця робота дорівнює добутку q_2 на потенціал ϕ_2 поля, яке створюється зарядом q_1 у точці 2

$$A_2 = q_2 \phi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}.$$

Для перенесення заряду q_3 із нескінченності в точку 3 потрібно виконати роботу, яка дорівнює добутку q_3 на потенціал ϕ_3 поля, яке створюється зарядами q_1 й q_2 у точці 3

$$A_3 = q_3 \phi_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right).$$

Сума робіт чисельно буде дорівнювати енергії системи трьох зарядів:

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Урахувавши, що, наприклад, $q_1 q_2 / r_{12} = q_2 q_1 / r_{21}$ отриманій формулі можна надати симетричного вигляду:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i \neq k)}}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Під час підсумовування індекси i й k приймають незалежно один від одного значення 1, 2, 3; доданки, у яких $i = k$, виключаються.

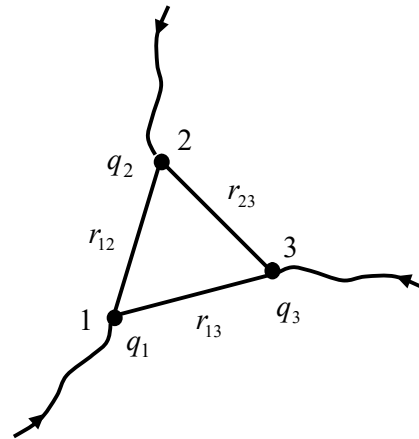


Рисунок 103.1 – Послідовне перенесення зарядів із нескінченності у відповідні точки простору

Відзначимо, що отриманий нами вираз для енергії W не залежить від того, у якій послідовності переносяться заряди з нескінченності у відповідні точки простору.

Можна перекоонатися в тому, що аналогічна формула є правильною для системи будь-якого числа N точкових зарядів із тією лише відмінністю, що індекси i й k приймають під час підсумовування значення $1, 2, \dots, N$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i \neq k)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (103.1)$$

Підкреслимо, що вираз (103.1) визначає роботу, яку потрібно виконати, щоб заряди, які спочатку були на нескінченно великих відстанях один від одного, розмістити в заданих точках простору. Ця робота залежить від відстаней r_{ik} між зарядами, тобто від конфігурації системи зарядів.

Формулі (103.1) можна надати вигляду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i \quad \text{або} \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i}, \quad (103.2)$$

де

$$\boxed{\Phi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}} \quad (103.3)$$

є потенціал електричного поля в точці, де міститься заряд q_i , і який створюється усіма зарядами, крім заряду q_i .

Отже, енергія взаємодії N точкових зарядів визначається формулою (103.2), де потенціал Φ_i визначається формулою (103.3).

§ 104 Енергія зарядженого провідника. Енергія зарядженого конденсатора

1 Знайдемо енергію зарядженого провідника. Заряд q , який розміщено на деякому провіднику, можна розглядати як систему точкових зарядів q_i . Тому для знаходження енергії зарядженого провідника використаємо формулу для потенціалу системи точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i, \quad (104.1)$$

де Φ_i є потенціалом електричного поля в точці, де міститься заряд q_i , і який створюється усіма зарядами, крім заряду q_i .

Точкові заряди виберемо так $q_i = \Delta q_i$, щоб вклад окремого заряду Δq_i у загальний потенціал провідника був дуже малим. Тому за потенціал у точці, де міститься заряд $q_i = \Delta q_i$ можна взяти загальний потенціал провідника $\Phi_i = \Phi$. Як відомо, поверхня провідника є екіпотенціальною. Тобто потенціал точок, у яких розміщені точкові заряди $q_i = \Delta q_i$, є однаковим і дорівнює потенціалу Φ провідника.

Використовуючи вищесказане, знаходимо з (104.1) для енергії зарядженого провідника вираз

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta q_i \Phi = \frac{1}{2} \Phi \sum_{i=1}^N \Delta q_i = \frac{1}{2} \Phi q.$$

Далі використаємо визначення для електроємності відокремленого провідника $C = q/\phi$ і отримаємо

$$W = \frac{\phi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\phi^2}{2}. \quad (104.2)$$

Кожний із цих виразів у (104.2) визначає енергію зарядженого провідника.

2 Знайдемо енергію зарядженого конденсатора. Припустимо, що потенціал обкладки, на якій міститься додатний заряд $(+q)$, дорівнює ϕ_1 , а потенціал обкладки, на якій розміщений від'ємний заряд $(-q)$, дорівнює ϕ_2 . Тоді кожний з елементарних зарядів $(+\Delta q_i)$, на які можна розділити додатний заряд $(+q)$, міститься в точці з потенціалом ϕ_1 , а кожний із зарядів $(-\Delta q_i)$, на які можна розділити від'ємний заряд $(-q)$, – у точці з потенціалом ϕ_2 . Відповідно до формули (104.1) енергія такої системи зарядів дорівнює

$$W = \frac{1}{2} \left[\sum_i (+\Delta q_i)\phi_1 + \sum_i (-\Delta q_i)\phi_2 \right] = \frac{1}{2} [(+q)\phi_1 + (-q)\phi_2] = \frac{1}{2} q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} qU.$$

Тут $U = \phi_1 - \phi_2$ – напруга на конденсаторі. Узявши до уваги визначення для електроємності конденсатора $C = q/U$, можна отримати вирази для енергії зарядженого конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (104.3)$$

Формули (104.3) відрізняються від формул (104.2) тільки заміною ϕ на U .

§ 105 Енергія електричного поля

1 Знайдемо густину енергії електричного поля. Для цього виразимо енергію зарядженого плоского конденсатора через характеристики поля в зазорі між обкладками.

Якщо у вираз для енергії конденсатора

$$W = CU^2 / 2$$

підставити формулу для ємності конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / d,$$

то отримаємо співвідношення

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 S d.$$

У цій формулі U – напруга на обкладках, S і d , відповідно площа та відстань між обкладками; ϵ – діелектрична проникність середовища між обкладками.

Для однорідного поля конденсатора $U = \phi_1 - \phi_2 = \int \vec{E} d\vec{l} = E \cdot d$, звідси напруженість електричного поля між обкладками конденсатора $E = U/d$. Добуток $S \cdot d$ дорівнює об'єму V конденсатора, тобто об'єму, у якому зосереджене поле. Отже,

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (105.1)$$

У плоскому конденсаторі поле є однорідним. Тому енергія розподілена в об'ємі конденсатора рівномірно. Отже, густина енергії електричного поля (енергія в одиниці об'єму) буде дорівнювати

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}.$$

Якщо врахувати зв'язок між електричним зміщенням і напруженістю електричного поля $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$, то отриману формулу можна подати у вигляді

$$w = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0\epsilon}. \quad (105.2)$$

Вирази (105.2) визначають *густину енергії* електричного поля.

Ми отримали формули (105.2) для випадку, коли поле є однорідним. Однак ці формули є також справедливими для будь-якого електричного поля. Якщо поле є неоднорідним, то густина енергії в деякій точці P визначається за формулами (105.2) підстановкою значень E (або D) і ϵ в точці P .

2 Формула $W = q^2/2C$ зв'язує енергію конденсатора із зарядами на його обкладках, формула $W = \epsilon_0\epsilon E^2V/2$ – з напруженістю електричного поля, яке створили заряди. *Виникає питання, де ж локалізована (тобто зосереджена) енергія? Що є носієм енергії – заряди чи поле? У межах електростатики, що вивчає сталі в часі поля нерухомих зарядів, дати відповідь на це питання неможливо. Постійні електричні поля і заряди, що їх створили, не можуть існувати відокремлено один від одного. Однак поля, що змінюються в часі, можуть існувати незалежно від зарядів, що їх створили, і поширюються у просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Дослід показує, що електромагнітні хвилі переносять енергію. Так, енергію переносять на Землю від Сонця електромагнітні хвилями. **Отже, носієм енергії є не заряди, а поля.***

Знаючи густину енергії електричного поля в кожній точці, можна знайти енергію поля в будь-якому об'ємі V . Для цього потрібно обчислити інтеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} dV. \quad (105.3)$$

Отже, за допомогою формули (105.3) можна обчислити енергію електричного поля в будь-якому об'ємі.

ТЕМА 18 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

§ 106 Електричний струм. Густина електричного струму з мікроскопічного погляду. Рівняння неперервності для електричного заряду

1 Електричним струмом називається впорядкований рух електричних зарядів. Носіями струму можуть бути електрони, а також додатні й від'ємні іони, тобто атоми або молекули, що втратили або приєднали до себе один або кілька електронів.

Носії струму у звичайному стані перебувають у хаотичному тепловому русі. Через уявну площу переноситься в обох напрямках однаковий заряд і тому електричний струм відсутній. За наявності електричного поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух носіїв – виникає електричний струм.

*Кількісною характеристикою електричного струму служить величина заряду, яка переноситься через розглянуту поверхню за одиницю часу. Її називають **силою електричного струму**.* Відзначимо, що сила струму є фактично потоком електричного заряду через поверхню. *Якщо за час dt через поверхню переноситься заряд dq , то сила струму дорівнює*

$$I = dq/dt. \quad (106.1)$$

Струм, що не змінюється з часом, називається постійним. Одиницею сили струму є *ампер* (А). Його визначення буде дано пізніше. У міжнародній системі одиниць СІ ампер є основною одиницею.

2 Електричний струм може бути розподілений у просторі, де він тече, нерівномірно. Більш детально можна охарактеризувати струм за допомогою векторної величини \vec{j} , яку називають густиною електричного струму. Щоб визначити **густину електричного струму** в деякій точці простору, потрібно взяти в цій точці елементарну площину dS_{\perp} , яка є перпендикулярною до напрямку впорядкованого руху носіїв струму. Розділивши силу струму dI , що тече через цю площину, на dS_{\perp} , отримуємо модуль густини струму

$$\boxed{j = dI / dS_{\perp}}. \quad (106.2)$$

За напрямком вектора \vec{j} береться напрямком швидкості \vec{u} впорядкованого руху додатних носіїв.

Якщо вектор густини струму відомий, то можна обчислити силу струму, що протікає через будь-яку уявну поверхню S . Для цього потрібно розбити S на елементарні площини $d\vec{S}$. Згідно (106.2) струм dI через площину dS_{\perp} дорівнює

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = \vec{j} d\vec{S},$$

де α – кут між перпендикуляром до площі $d\vec{S}$ та напрямком вектора \vec{j} . Підсумувавши струми через всі елементарні площі, отримуємо силу струму, що тече через поверхню S

$$\boxed{I = \int_S \vec{j} d\vec{S}}. \quad (106.3)$$

Отже, сила струму дорівнює потоку вектора густини струму через задану поверхню.

3 Знайдемо зв'язок густини електричного струму із швидкістю носіїв електричного струму (густина електричного струму з мікроскопічного погляду).

Виділимо подумки в середовищі, у якому тече струм, довільний фізично нескінченно малий об'єм і позначимо через \vec{u} середній вектор швидкості носіїв у цьому об'ємі. Його називають середньою, дрейфовою або впорядкованою швидкістю руху носіїв струму. Позначимо далі через n концентрацію носіїв струму, тобто число їх в одиниці об'єму. Проведемо нескінченно малу площину dS_{\perp} , що перпендикулярна до швидкості \vec{u} . Побудуємо на ній нескінченно короткий прямий циліндр із висотою $u dt$, як зазначено на рисунку 106.1. Через площу dS_{\perp} пройдуть за час dt усі носії струму, що містяться в циліндрі висотою $u dt$. Вони перенесуть через dS_{\perp} в напрямку швидкості \vec{u} електричний заряд $dq = e \cdot n \cdot u \cdot dt \cdot dS_{\perp}$, де e – електричний заряд носіїв струму. Далі використаємо визначення сили електричного струму і густини електричного струму й отримуємо

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = \frac{n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot dS_{\perp}}{dt dS_{\perp}} = n \cdot e \cdot u.$$

Тобто **густина електричного струму дорівнює**

$$\boxed{\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u}}. \quad (106.4)$$

У разі кількох типів зарядів, які створюють електричний струм, густина електричного струму визначається виразом

$$\boxed{\vec{j} = \sum_i n_i e_i \vec{u}_i}, \quad (106.5)$$

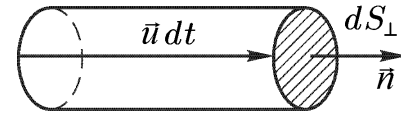


Рисунок 106.1

де підсумовування ведеться за усіма типами носіїв електричного струму (n_i, e_i, \vec{u}_i означають концентрацію, заряд та впорядковану швидкість i -го носія).

4 Одним із фундаментальних фізичних законів є закон збереження електричного заряду. Виразимо його математично через макроскопічні величини: густину електричного заряду ρ і густину електричного струму \vec{j} . Візьмемо в середовищі довільну замкнену поверхню S , що обмежує об'єм V (рис. 106.2). Кількість електричного заряду, що за одиницю часу витікає з об'єму V через поверхню S (сила електричного струму), можна подати інтегралом (106.3) $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$. Цю ж саму величину можна подати у вигляді

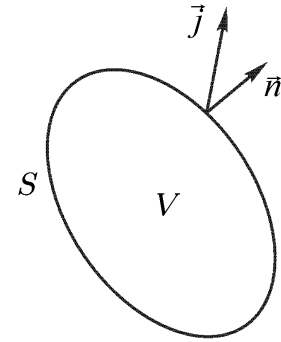


Рисунок 106.2

$(-\partial q / \partial t)$, де q – заряд, що міститься в об'ємі V (знак мінус пов'язаний із тим, що коли густина електричного струму є додатною, то заряд усередині об'єму V зменшується). Прирівнюючи обидва вирази, отримуємо математичне формулювання закону збереження електричного заряду в інтегральному вигляді

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S \vec{j} d\vec{S}}. \quad (106.6)$$

Тут ми використовуємо символ частинної похідної $\partial / \partial t$, щоб підкреслити, що поверхня S повинна залишатися нерухомою.

Знайдемо диференціальний вигляд співвідношення (106.6). Подавши q у вигляді $q = \int \rho dV$ і перетворивши поверхневий інтеграл в об'ємний за допомогою теореми Остроградського – Гаусса $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} \cdot dV$, прийдемо до співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\int \text{div} \vec{j} \cdot dV.$$

Це співвідношення повинне виконуватися для довільного об'єму V , а тому

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0}. \quad (106.7)$$

Формули (106.6) і (106.7) виражають закон збереження електричного заряду в макроскопічній електродинаміці. Остання формула називається також **рівнянням неперервності**.

Якщо струми є стаціонарними, тобто не залежать від часу, то формули (106.6), (106.7) переходять у

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \text{ або } \text{div} \vec{j} = 0. \quad (106.9)$$

§ 107 Сторонні сили. Електрорушійна сила. Робота над електричним зарядом на ділянці кола


1 Припустимо, що єдиними джерелами електричного поля \vec{E} у провідниках, якими течуть струми, є електричні заряди, що збуджують поля за законом Кулона. Під час проходження струму безперервно відбувається зменшення зарядів, точніше, нейтралізація додатного і від'ємного зарядів. Для того щоб напруженість поля \vec{E} , а з нею й густина електричного струму \vec{j} залишалися незмінними, необхідні якісь додаткові сили або процеси, які неперервно поповнювали б електричні заряди.

Отже, для підтримки постійного струму, крім електростатичних сил, у електричному колі повинні діяти *сили неелектростатичного походження, які називають сторонніми силами*. Ці сили можуть бути обумовлені хімічними процесами, дифузією носіїв струму в неоднорідному середовищі або через границю двох різнорідних речовин, вихровими електричними (але не електростатичними, кулонівськими) полями, що створюються змінними в часі магнітними полями тощо. Сторонні сили можуть діяти або на всьому колі, або на окремих його ділянках.

Сторонні сили характеризують роботою, яку вони виконують над носіями струму. Величина, що дорівнює роботі сторонніх сил над одиничним додатним зарядом, називається *електрорушійною силою (ЕРС) \mathcal{E}* , що діє в замкненому колі або на його ділянці. Отже, якщо робота сторонніх сил над зарядом q дорівнює A_{cm} , то електрорушійна сила буде визначатися виразом

$$\boxed{\mathcal{E} = A_{cm} / q}. \quad (107.1)$$

Аналізуючи формулу (107.1), легко з'ясувати, що виміряється ЕРС у Дж/Кл = В, тобто у вольтах.

На електричних схемах джерела електричного струму позначають так: . Потенціал обкладки джерела, яку позначають короткою товстою лінією, беруть від'ємним. Потенціал обкладки джерела, яку позначають довгою тонкою лінією, беруть додатним.

Сторонню силу, що діє на заряд q , можна характеризувати *напруженістю поля сторонніх сил E_{cm}* , що дорівнює відношенню сторонньої сили \vec{F}_{cm} , яка діє на заряд q , до величини цього заряду

$$\boxed{\vec{E}_{cm} = \vec{F}_{cm} / q}.$$

Тоді роботу сторонніх сил на ділянці 1–2 електричного кола над зарядом q можна записати у вигляді

$$A_{12cm} = \int_1^2 \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Розділивши цю роботу на q , отримаємо ЕРС, що діє на цій ділянці кола

$$\boxed{\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}}. \quad (107.2)$$

Крім сторонніх сил, на заряд q в провіднику діють сили електростатичного поля $q\vec{E}$. Отже, результуюча сила, що діє в кожній точці кола на заряд q дорівнює

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{cm}).$$

Повна робота, що виконує ця сила над зарядом q на ділянці 1–2 кола, визначається виразом

$$\boxed{A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}}. \quad (107.3)$$

Як бачимо, повна робота над електричним зарядом на ділянці кола 1–2 визначається різницею потенціалів і електрорушійною силою на цій ділянці.

Ділянка кола, на якому не діють сторонні сили, називається *однорідною*. Ділянка кола, на якому діють також і сторонні сили, називається *неоднорідною*.

§ 108 Закон Ома для однорідної ділянки кола. Залежність опору від геометричних розмірів провідника. Закон Ома в диференціальній формі. Провідність

1 Георг Ом експериментально встановив закон (**закон Ома** в інтегральній формі для однорідної ділянки кола), відповідно до якого *сила струму, що проходить по однорідному (сторонні сили відсутні) металевому провіднику, пропорційна паданню напруги U на провіднику*

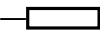
$$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{R}U. \quad (108.1)$$

Величина R у формулі (108.1) називається **електричним опором провідника**. Одиницею опору служить ом (Ом), який дорівнює опору такого провідника, у якому за напруги в 1 В проходить струм силою 1 А (1 Ом = 1 В/1 А).

2 Електричний опір залежить від форми й розмірів провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він зроблений. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (108.2)$$

де l – довжина провідника; S – площа його поперечного перерізу; ρ – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу, і який називається **питомим електричним опором речовини**. Вимірюється ρ в ом·метрах (Ом·м).

На електричних схемах електричний опір позначають так: .

3 Отримаємо закон Ома в диференціальному вигляді. Виділимо уявно у провіднику елементарний циліндричний об'єм з твірними, які паралельні векторам \vec{j} і \vec{E} (рис. 108.1). Відповідно до формули (108.2) опір циліндра дорівнює $\rho dl / dS$. Через поперечний переріз циліндра проходить струм силою $j dS$. Напруга, що прикладена до циліндра, дорівнює $dU = -d\varphi = Edl$. Підстановка цих значень у формулу (108.1) дає, що

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} Edl, \text{ звідки } j = \frac{1}{\rho} E.$$

Вектори \vec{j} й \vec{E} мають однаковий напрямок. Тому можна написати

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (108.3)$$

Ця формула виражає закон Ома в диференціальній формі для однорідної ділянки кола.

Зворотна до ρ величина $\sigma = 1/\rho$ називається **питомою електричною провідністю (або електропровідністю) речовини**. Одиниця, зворотна ому, називається **сименсом** (См). Отже, одиницею σ є сименс розділити на метр (См/м).

4 Для більшості металів за не занадто низьких температур питомий опір ρ змінюється пропорційно термодинамічній температурі

$$\rho \sim T. \quad (108.4)$$

У великої групи металів і сплавів, а також керамічних матеріалів за досить низької температури опір стрибком обертається в нуль. Це явище називають **надпровідністю**.

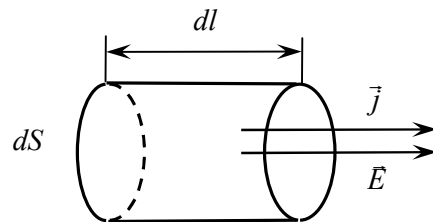


Рисунок 108.1 – В ізотропному провіднику напрямки векторів \vec{j} і \vec{E} збігаються

§ 109 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола в диференціальній і інтегральній формі. Закон Ома для замкненого кола

1 У неоднорідній ділянці на носії електричного струму діють як сили з боку електростатичного поля, так і сторонні сили. Зрозуміло, що рух носіїв струму буде визначати результуюча сила або результуюча напруженість, що відповідає цим силам $\vec{E} + \vec{E}_{cm}$. На підставі вищесказаного можемо записати закон Ома в диференціальному вигляді для неоднорідної ділянки, використовуючи закон Ома для однорідної ділянки кола ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$), у якому замінимо напруженість електричного поля \vec{E} на результуючу напруженість $\vec{E} + \vec{E}_{cm}$. Унаслідок отримаємо

$$\boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{cm})}. \quad (109.1)$$

Формула (109.1) виражає закон Ома в диференціальній формі для неоднорідної ділянки кола.

2 Запишемо закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральному вигляді. Для цього розглянемо циліндричний провідник із площею поперечного перерізу S і довжиною l . Припустимо, що напруженості \vec{E} й \vec{E}_{cm} у всіх точках провідника однакові. Помножимо обидві частини рівності (109.1) на переміщення $d\vec{l}$ уздовж осі провідника і проінтегруємо отримане співвідношення по довжині провідника від 0 до l . Унаслідок цього отримаємо

$$\int_0^l \vec{j} d\vec{l} = \sigma \left(\int_0^l \vec{E} d\vec{l} + \int_0^l \vec{E}_{cm} d\vec{l} \right). \quad (109.2)$$

Інтеграл, що стоїть ліворуч від знака рівності, дорівнює $j l$. Інтеграли праворуч дорівнюють відповідно різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між кінцями провідника й ЕРС \mathcal{E}_{12} , що діє в провіднику. Урахувавши це й замінивши j на I/S , а σ на $1/\rho$, можна написати (109.2) у вигляді

$$I \frac{\rho l}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Зрозуміло, що множник $\rho l/S$ біля I дорівнює опору R провідника. Отже,

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}}. \quad (109.3)$$

Отже, отримали закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральній формі. У (109.3) сила струму й ЕРС є алгебраїчними величинами. Сила струму додатна, коли струм проходить у напрямку від кінця провідника 1 до кінця 2. ЕРС вважається додатною, коли вона сприяє руху додатних носіїв у напрямку 1–2.

3 Для замкненого кола $\varphi_1 = \varphi_2$ (у замкненому колі точки 1 і 2 збігаються) й формула (109.3) отримує вигляд

$$\boxed{I = \mathcal{E} / R}, \quad (109.4)$$

де \mathcal{E} – ЕРС, що діє в замкненому електричному колі; R – сумарний опір усього кола. Формула (109.4) виражає закон Ома для замкненого кола.

§ 110 Правила Кірхгофа

1 В основі розрахунку розгалужених електричних кіл лежать два правила Кірхгофа. Перше правило належить до вузлів кола. Вузлами називаються точки, у яких сходяться більш ніж два провідники (рис. 110.1).

Перше правило Кірхгофа зазначає, що алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю

$$\boxed{\sum I_k = 0} \quad (110.1)$$

У цій формулі струму, що проходить до вузла, приписується один знак (плюс або мінус), струму, що проходить від вузла, – інший знак.

Перше правило Кірхгофа випливає з таких міркувань. У колі постійного струму потенціали у всіх точках повинні залишатися постійними. Якщо б алгебраїчна сума струмів була відмінна від нуля, то у вузлі відбувалося б нагромадження або зменшення зарядів, що, зі свого боку, призводило б до зміни потенціалу вузла.

Рівняння (110.1) можна написати для всіх N вузлів. Однак незалежними будуть тільки $N-1$ рівняння, N -те рівняння буде наслідком інших.

2 Друге правило стосується будь-якого замкненого контура, який виділено уявно в розгалуженому колі (рис. 110.2). Виберемо напрямок обходу (наприклад, за годинниковою стрілкою, як подано на рисунку) і застосуємо до кожної з ділянок контура закон Ома

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, \quad I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2, \\ I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3, \quad I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \mathcal{E}_4.$$

Якщо скласти ці рівності, потенціали скоротяться й отримаємо рівняння

$$\boxed{\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k}, \quad (110.2)$$

яке виражає **друге правило Кірхгофа**.

Рівняння (110.2) можна скласти для всіх замкнених контурів, які можна виділити в цьому електричному колі. Однак незалежними будуть тільки рівняння для тих контурів, які не можна отримати накладенням на них інших контурів. Наприклад, контур 1–2–3–4–1 на рисунку 110.2 отримуємо накладенням контурів 1–2–4–1 і 2–3–4–2. Тому незалежними будуть рівняння для будь-яких двох контурів із цих трьох.

Під час складання рівнянь напрямки струмів і напрямки обходу можна вибирати довільно. Струмам і ЕРС потрібно приписувати знаки відповідно до обраного напрямку обходу. Наприклад, струм I_3 на рисунку 110.2 потрібно вважати від'ємним (і підставляти в рівняння $-I_3$), тому що він зображений як такий, що проходить назустріч напрямку обходу. ЕРС \mathcal{E}_1 і \mathcal{E}_2 також потрібно вважати від'ємними, оскільки вони діють у напрямку, протилежному напрямку обходу (викликають струм, напрямком якого протилежний до напрямку обходу контура). Якщо для деякого струму буде отримане від'ємне значення, це буде означати, що насправді він проходить у напрямку, який є протилежним до зазначеного на рисунку.

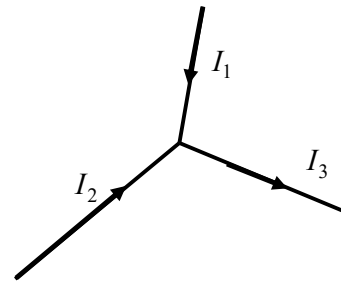


Рисунок 110.1 – Вузол електричного кола. Сума струмів I_1 і I_2 дорівнює струму I_3

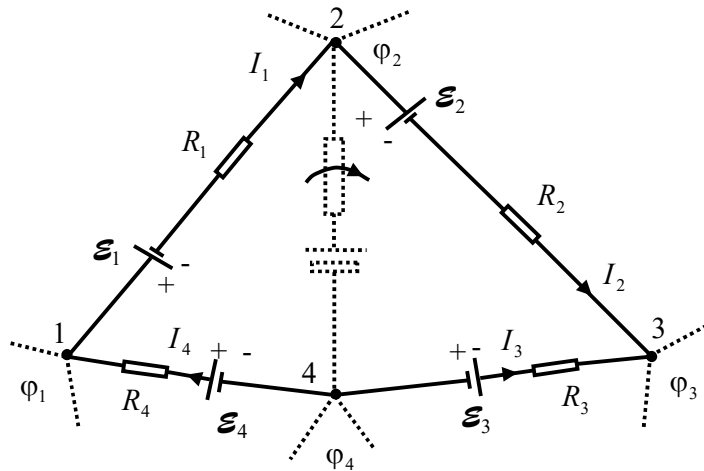


Рисунок 110.2 – Суцільними лініями подано замкнений контур 1–2–3–4–1, який виділено у складному розгалуженому колі. З інших ланок кола зображена штриховою лінією лише ділянка 2–4

Число незалежних рівнянь, складених за першим і другим правилами Кірхгофа, дорівнює кількості струмів, що проходять у різних ланках кола. Тому, якщо задані ЕРС і опори, то можна обчислити всі струми. Можна виконати й завдання іншого роду, наприклад, знайти ЕРС (або опори), які потрібно включити в кожну ланку кола, щоб отримати за заданих опорів (або ЕРС) потрібні струми.

§ 111 Потужність струму. Закон Джоуля – Ленца в інтегральній і диференціальній формі

1 Розглянемо довільну ділянку кола постійного струму, до кінців якого прикладена різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, у якій діють сторонні сили, що характеризуються ЕРС \mathcal{E} . За час dt через кожний перетин провідника проходить заряд $dq = I \cdot dt$. Це рівносильно тому, що заряд $dq = I \cdot dt$ переноситься за час dt із одного кінця провідника в інший. У цьому разі сили електростатичного поля й сторонні сили, що діють на цій ділянці, виконують роботу

$$dA_{12} = dq \cdot U_{12} = I \cdot dt \cdot ((\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}). \quad (111.1)$$

Розділивши роботу dA_{12} на час dt , за яке вона виконується, отримаємо *потужність, що розвивається струмом на розглянутій ділянці кола*:

$$P = dA / dt = I \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}). \quad (111.2)$$

Ця потужність може витрачатися на здійснення розглянутою ділянкою кола роботи над зовнішніми тілами (для цього ділянка повинна переміщуватись у просторі), на протікання хімічних реакцій і, нарешті, на нагрівання цієї ділянки кола.

2 У разі, коли провідник нерухомий і хімічні перетворення в ньому не виконуються, робота струму витрачається на збільшення внутрішньої енергії провідника, унаслідок чого провідник нагрівається. У цьому разі за умови проходження струму в провіднику виділяється тепло. Тоді, розглядаючи однорідну ділянку кола, отримаємо

$$dQ = dA_{12} = I \cdot dt \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = RI^2 dt \text{ або } dQ = RI^2 dt. \quad (111.3)$$

Коли сила струму змінюється з часом, то кількість тепла, що виділяється за час t , обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^t RI^2 dt. \quad (111.4)$$

Співвідношення (111.4) було встановлено експериментально Джоулем і, незалежно від нього, Ленцем і має назву закону Джоуля – Ленца (**закон Джоуля – Ленца в інтегральній формі**).

3 Від формули (111.4), що визначає тепло, яке виділяється в усьому провіднику, можна перейти до виразу, що характеризує виділення тепла в малому об'ємі провідника. Виділимо в провіднику елементарний об'єм у вигляді циліндра (рис. 111.1). Відповідно до закону Джоуля – Ленца за час dt у цьому об'ємі виділиться тепло

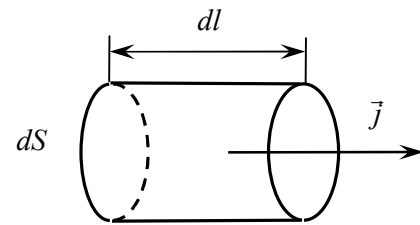


Рисунок 111.1

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho \cdot dl}{dS} (j \cdot dS)^2 dt = \rho j^2 \cdot dV \cdot dt \quad (111.5)$$

($dV = dS \cdot dl$ – величина елементарного об'єму, $R = \rho \cdot dl / dS$ – опір провідника, $j \cdot dS = I$ – сила струму). Розділивши вираз (111.5) на dV і dt , знайдемо кількість тепла, що виділяється в одиниці об'єму в одиницю часу:

$$Q_{num} = \rho j^2. \quad (111.6)$$

Величину $Q_{\text{ном}}$ називають питомою тепловою потужністю струму. Формула (111.6) являє собою диференціальну форму закону Джоуля–Ленца.

§ 112 Процеси встановлення струму під час заряду і розряду конденсатора

1 Припустимо, що миттєве значення струму однакове у всіх поперечних перерізах провідника, що з'єднує обкладки конденсатора, а миттєве електричне поле таке саме, як в електростатиці за тих самих зарядів на обкладках конденсатора. Струми й поля, що задовольняють цим умовам, називають квазістаціонарними.

Знайдемо закон зміни заряду на конденсаторі та сили електричного струму від часу у разі розрядження конденсатора.

Якщо обкладки конденсатора з зарядом q_0 у початковий момент часу з'єднати провідником з опором R , то по провіднику пройде струм (рис. 112.1). Розглянемо ділянку кола 1–A–2 (рис. 112.1). Згідно із законом Ома електричний струм, що проходить по цій ділянці, дорівнює

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (112.1)$$

Тут ураховано, що на цій ділянці $\mathcal{E}_{12} = 0$; φ_1 та φ_2 – потенціали, відповідно, пластин 1 та 2 (рис. 112.1). З іншого боку, згідно з означенням ємності конденсатора

$$C = q_1 / (\varphi_1 - \varphi_2), \text{ або } \varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C, \quad (112.2)$$

де q_1 – заряд на пластині 1 конденсатора. Також зазначимо, що на підставі означення сили електричного струму

$$I_{12} = dq / dt = -dq_1 / dt, \quad (112.3)$$

де dq – кількість заряду, що пройшла через поперечний переріз провідника за час dt . Із закону збереження електричного заряду випливає, що $dq = -dq_1$. Тобто коли сила струму $I_{12} = dq / dt$ буде додатною, то заряд на пластині 1 конденсатора q_1 буде зменшуватися (тобто dq_1 буде від'ємним), саме цим міркуванням обумовлений знак «–» у формулі (112.3).

Далі підставляємо (112.2) та (112.3) в (112.1) і отримуємо

$$-dq_1 / dt = q_1 / (RC).$$

Звідси

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq_1}{q_1} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}, \text{ або } \ln \frac{q_1}{q_0} = -\frac{t}{RC}.$$

З отриманих формул знаходимо, що заряд на конденсаторі змінюється з часом за законом

$$q_1 = q_0 \exp(-t / \tau), \quad (112.4)$$

де q_0 – початкове значення заряду конденсатора, а τ – стала

$$\tau = RC, \quad (112.5)$$

що має розмірність часу. Вона називається часом релаксації. Через час τ заряд конденсатора зменшується в e разів. Тому τ за порядком величини дорівнює часу, протягом якого конденсатор розрядиться.

Використовуючи формулу (112.3) та (112.4), знаходимо закон зміни струму з часом

$$I_{12} = -dq_1 / dt = (q_0 / \tau) \exp(-t / \tau) = I_0 \exp(-t / \tau), \quad (112.6)$$

де $I_0 = q_0 / \tau = q_0 / (RC)$ – початкове значення струму, тобто струм за умови $t = 0$.

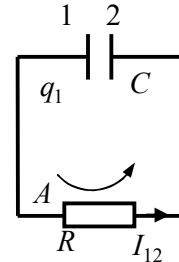


Рисунок 112.1

2 Знайдемо закон зміни заряду на конденсаторі та сили електричного струму від часу під час зарядження конденсатора.

Це завдання виконують аналогічно до вищевикладеного. Нехай у коло конденсатора з опором R включено джерело струму з постійною електрорушійною силою \mathcal{E} (рис. 112.2). Після замикання ключа K джерело збуджує струм, що заряджає конденсатор. Електричні заряди, що з'являються на обкладках конденсатора перешкоджають проходженню струму і зменшують його.

Розглянемо ділянку кола $1-А-2$ (рис. 112.2). Згідно із законом Ома електричний струм, що проходить по цій ділянці, дорівнює

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (112.7)$$

Тут φ_1 та φ_2 – потенціали відповідно пластин 1 та 2 (рис. 112.2). Різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ знаходимо аналогічно як і в (112.2) $\varphi_1 - \varphi_2 = q_1 / C$, де q_1 – заряд на пластині 1 конденсатора. Струм на опорі I_{12} і заряд на пластині 1 конденсатора q_1 пов'язані співвідношенням (112.3) $I_{12} = dq_1 / dt = -dq_1 / dt$. Також тут потрібно звернути увагу не те, що джерело струму в разі

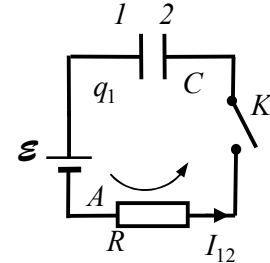


Рисунок 112.2

рисунок 112.2 включено так, що діє в напрямку, протилежному напрямку обходу контура (напрямок обходу тут вибрано проти годинникової стрілки, напрямок сили струму збігається з напрямком обходу). Тому у співвідношення (112.7) потрібно підставити ЕРС із знаком «-»: $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}$. Також у (112.7) підставляємо різницю потенціалів і силу струму й отримуємо

$$-Rdq_1 / dt = q_1 / C - \mathcal{E}.$$

Це рівняння можемо перетворити

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (112.8)$$

Співвідношення (112.8) є неоднорідним диференціальним рівнянням. Воно зводиться до однорідного, якщо його записати у вигляді

$$\frac{d(q_1 - \mathcal{E}C)}{dt} + \frac{(q_1 - \mathcal{E}C)}{RC} = 0.$$

Розділяючи змінні, отримаємо

$$\int_0^{q_1} \frac{d(q_1' - \mathcal{E}C)}{(q_1' - \mathcal{E}C)} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \text{ або } \ln \frac{\mathcal{E}C - q_1}{\mathcal{E}C} = -\frac{t}{RC}.$$

Тут використали, що в момент часу $t=0$ заряд на конденсаторі дорівнював нулю. Далі отримуємо шукану залежність заряду конденсатора від часу

$$\boxed{q_1 = \mathcal{E}C(1 - \exp(-t/\tau))}. \quad (112.9)$$

За умови $t \rightarrow \infty$ заряд q_1 прямує до граничного значення $q_1(\infty) = \mathcal{E}C$.

Для електричного струму залежність від часу отримуємо, на підставі (112.3),

$$\boxed{I_{12} = -dq_1 / dt = -(\mathcal{E}C/\tau) \exp(-t/\tau) = -(\mathcal{E}/R) \exp(-t/\tau)}. \quad (112.10)$$

Знак «-» свідчить про те, що струм у контурі (рис. 112.2) проходить у зворотному напрямку до обходу контура. Струм максимальний у початковий момент і дорівнює \mathcal{E}/R . Далі він зменшується за експонентним законом.

§ 113 Природа носіїв струму в металах. Дослід Рікке. Ідея Лоренца визначення відношення заряду до маси носія електричного струму в металах. Дослід Толмена і Стюарта

1 Дослід Рікке. Для з'ясування природи носіїв струму в металах було поставлено низку дослідів. Насамперед відзначимо дослід Рікке, здійснений у 1901 р. Рікке взяв три циліндри – два мідних і один алюмінієвий із ретельно відшліфованими торцями. Після зважування циліндри були складені разом у такій послідовності: мідь – алюміній – мідь (рис. 113.1). Через такий складений провідник пропускався безупинно струм одного напрямку протягом року. За увесь час через циліндри пройшов заряд, що дорівнював $3,5 \cdot 10^6$ Кл. Зважування довело, що вага циліндрів не змінилася. Під час дослідження торців циліндрів під мікроскопом не було виявлено проникнення одного металу в інший. Результати досліді свідчили про те, що носіями струму в металах є не атоми, а якісь частинки, що входять до складу всіх металів. Такими частинками могли бути відкриті в 1897 р. Томсоном електрони.



Рисунок 113.1 – Схема досліді Рікке

2 Ідея Лоренца визначення e/m . Щоб ототожити носії струму в металах з електронами, потрібно було визначити знак і числове значення питомого заряду носіїв. Досліди, що були виконані з цією метою, ґрунтувалися на таких міркуваннях. Якщо в металах є заряджені частинки, що здатні переміщуватися, то під час гальмування металевого провідника ці частинки повинні якийсь час продовжувати рухатися за інерцією, унаслідок чого у провіднику виникне імпульс струму й буде перенесений деякий заряд.

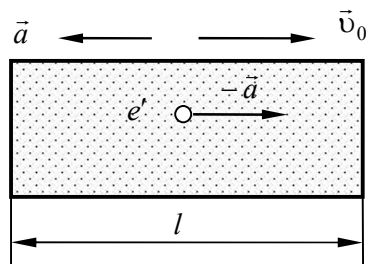


Рисунок 113.2

Нехай провідник рухається з початковою швидкістю v_0 (рис. 113.2). Почнемо гальмувати його з прискоренням \vec{a} . Рухаючись за інерцією, носії струму отримують щодо провідника прискорення $(-\vec{a})$. У системі відліку, що пов'язана з провідником, на електрон діє сила інерції $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$, де m – маса носія струму. \vec{F}_{in} є сторонньою силою. Напруженість поля сторонніх сил дорівнює

$$\vec{E}_{cm} = \vec{F}_{in} / e' = -m\vec{a} / e',$$

де e' – заряд носія струму. Отже, у колі виникає ЕРС

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} = - \int_1^2 \frac{m\vec{a}}{e'} d\vec{l} = - \frac{mal}{e'},$$

де l – довжина провідника. У цьому разі по провіднику пройде струм силою $I = \mathcal{E} / R$, де R – опір провідника (струм I вважаємо додатним, коли струм проходить у напрямку руху провідника). Отже, за час dt через кожний перетин провідника пройде заряд

$$dq = Idt = - \frac{mal}{e'R} dt = - \frac{ml}{e'R} dv.$$

Тут врахували, що $a \cdot dt = dv$. Заряд, що пройшов за увесь час гальмування, дорівнює

$$q = \int dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{mv_0}{e'R}. \tag{113.1}$$

Заряд є додатним, коли він переноситься в напрямку руху провідника.

Отже, вимірявши l , v_0 і R , а також заряд q , що проходить по колу під час гальмування провідника, можна знайти питомий заряд носіїв. Напрямок імпульсу струму дасть інформацію про знак носіїв.

3 Дослід Толмена і Стюарта. Кількісний результат був отриманий Толменом і Стюартом у 1916 р. Котушка із провідника довжиною 500 м приводилася в обертання, за якого лінійна швидкість витків становила 300 м/с. Потім котушка різко гальмувалася й за допомогою балістичного гальванометра вимірювався заряд, що проходив у колі за час гальмування. Обчислене за формулою (113.1) значення питомого заряду носіїв, було дуже близьким до e/m для електронів. Отже, було експериментально доведено, що носіями струму в металах є електрони.

4 Дослід доводить, що струм у металах можна викликати вкрай малою різницею потенціалів. Це дає підставу вважати, що носії струму – електрони, переміщуються в металі практично вільно. До того самого висновку призводять і результати дослідів Толмена й Стюарта.

Існування в металах вільних електронів можна пояснити тим, що під час утворення кристалічної ґратки від атомів металу від'єднуються слабкіше всього зв'язані (валентні) електрони, які стають «колективною» власністю усього металу. Якщо від кожного атома від'єднати по одному електрону, то концентрація вільних електронів (тобто їхня кількість в одиниці об'єму) буде дорівнює кількості атомів в одиниці об'єму. Число атомів в одиниці об'єму дорівнює $\rho/m_0 = \rho/(\mu/N_A) = \rho N_A/\mu$, де m_0 – маса одного атому; ρ – густина металу; μ – маса моля; N_A – число Авогадро. Звідси знаходимо, що концентрації вільних електронів у металах набувають таких значень

$$n = 10^{28} - 10^{29} \text{ м}^{-3}. \quad (113.2)$$

§ 114 Якісні уявлення про електропровідність металів із погляду класичної теорії. Закон Ома та Джоуля – Ленца з погляду класичної теорії електропровідності. Недоліки класичної теорії електропровідності

1 Якісні уявлення про електропровідність металів. На підставі уявлення про вільні електрони, Друде створив класичну теорію електропровідності металів у 1900 р., яка потім була вдосконалена Лоренцем. *Друде припустив, що носії струму в металах – електрони, поводяться подібно до молекул ідеального газу. У проміжках між зіткненнями вони рухаються під час відсутності поля вільно, пробігаючи в середньому деякий шлях λ . На відміну від молекул газу, пробіг яких визначається зіткненнями молекул одна з одною, електрони зіштовхуються переважно не між собою, а з іонами, що утворюють кристалічну ґратку металу. Ці зіткнення призводять до встановлення теплової рівноваги між електронним газом і кристалічною ґраткою.*

Для оцінювання середньої швидкості теплового руху електронів провідності в металах скористаємося формулою для середньої швидкості теплового руху молекули, поклавши температуру такою, що дорівнює 300 К

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/с}.$$

У цій формулі m – маса електрона; k – стала Больцмана.

Після включення електричного поля на хаотичний рух, який відбувається зі швидкістю $\langle v \rangle$, накладається впорядкований рух електронів з деякою середньою швидкістю $\langle u \rangle$. Величину цієї швидкості легко оцінити, на підставі формули

$$j = ne \langle u \rangle, \quad (114.1)$$

де n та e є, відповідно, концентрація та заряд електрона. Найбільша можлива густина електричного струму, коли провідник ще не перетворюється на рідину через виділення

великої кількості тепла, для міді дорівнює близько 10^7 А/м². Якщо взяти для n значення 10^{29} м⁻³, то отримаємо

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Отже, навіть за дуже великих густин електричного струму середня швидкість впорядкованого руху електронів $\langle u \rangle$ приблизно в 10^8 разів менше за середню швидкість теплового руху $\langle v \rangle$. Тому в обчисленнях модуль результуючої швидкості $|\vec{v} + \vec{u}|$ можна замінити модулем теплового руху $|\vec{v}|$.

2 Закон Ома. Друде припускав, що електричне поле збільшує швидкість електрона і надає йому деяку додаткову енергію. Під час зіткнення електрона з іоном ґратки набута ним за час пробігу додаткова енергія повністю передається іону. Далі електричне поле знову прискорює електрон, знову відбувається зіткнення і т.д. Отримаємо закон Ома, на підставі вищеписаної моделі руху електрона в металі.

Якщо поле в металі є однорідним, то електрон рухається деякий час τ (час пробігу) з постійним прискоренням $a = eE/m$ (e та m є відповідно зарядом і масою електрона, E є напруженістю електричного поля) і за час пробігу τ швидкість упорядкованого руху досягає значення

$$u_{\max} = a \cdot \tau = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (114.2)$$

де λ – довжина вільного пробігу; $\langle v \rangle$ – його результуюча швидкість, яка, як ми з'ясували вище, практично збігається з тепловою $\langle v \rangle$.

Швидкість u змінюється за час пробігу лінійно. Тому її середнє значення дорівнює половині максимального

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE\lambda}{2m\langle v \rangle}.$$

Підставивши це значення середньої швидкості впорядкованого руху носіїв струму у формулу для густини електричного струму, отримаємо

$$j = ne\langle u \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle} E = \sigma E, \quad (114.3)$$

де n є концентрацією носіїв струму (вільних електронів у металі). Отже, ми дійшли до закону Ома в диференціальному вигляді. Крім того, на підставі класичної теорії електропровідності металів ми отримали вираз для провідності

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\langle v \rangle}. \quad (114.4)$$

Звідси випливає, якщо б електрони не мали зіткнень, довжина вільного пробігу, а отже, і провідність були б нескінченно великі. Отже, відповідно до класичних уявлень опір металів обумовлений зіткненнями електронів провідності з іонами кристалічної ґратки.

3 Закон Джоуля – Ленца. Розглядаємо попередню модель руху електронів у провіднику. Знайдемо середнє значення додаткової кінетичної енергії електронів, що обумовлена дією електричного поля. Швидкість електронів дорівнює сумі швидкості теплового руху \vec{v} і швидкості впорядкованого руху \vec{u} . Середнє значення квадрата результуючої швидкості дорівнює

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 + 2\vec{v}\vec{u} + u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + 2\langle vu \cos \alpha \rangle + \langle u^2 \rangle,$$

де α – кут між векторами \vec{v} й \vec{u} (усереднення виконується за усіма електронами). Швидкість \vec{v} хаотичного руху має з рівною ймовірністю найрізноманітніші напрямки. Тому

всі значення $\cos\alpha$ від -1 до $+1$ мають однакову ймовірність. Через цю причину середнє значення $\langle u \cos\alpha \rangle$ дорівнює нулю. Отже,

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

Звідси випливає, що середня кінетична енергія електронів складається з постійного доданка $m \langle v^2 \rangle / 2$ й додаткового доданка

$$\langle \Delta\varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle,$$

який обумовлений полем.

У момент перед зіткненням u має значення u_{\max} (формулу (114.2)) і додаткова кінетична енергія дорівнює

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{2m \langle v \rangle^2} E^2. \quad (114.5)$$

Зіштовхнувшись з іоном, електрон, за припущенням, віддає йому (тобто гратці) всю отриману ним додаткову енергію. Кожний електрон має за секунду $\langle v \rangle / \lambda$ зіткнень, передає щоразу гратці енергію (114.5). Тому в одиниці об'єму за одиницю часу буде виділятися кількість теплоти

$$Q_{num} = n \frac{\langle v \rangle}{\lambda} \Delta\varepsilon_k = \frac{ne^2 \lambda}{2m \langle v \rangle} E^2 = \sigma E^2, \quad (114.6)$$

де σ є провідністю, формула для якої збігається з (114.3). Зазначимо, що закон Джоуля – Ленца в диференціальній формі має вигляд

$$Q_{num} = \rho j^2 = \frac{1}{\sigma} (\sigma E)^2 = \sigma E^2. \quad (114.7)$$

Порівнюючи (114.7) та (114.6) бачимо, що отримане співвідношення (114.6) є законом Джоуля – Ленца в диференціальному вигляді. Співвідношення для провідності σ , які отримані з закону Ома (114.3) та закону Джоуля – Ленца, збігаються між собою.

4 Недоліки класичної теорії електропровідності металів. Підбиваючи підсумок, можна відзначити, що класична теорія електропровідності змогла пояснити закони Ома і Джоуля – Ленца, а також дала якісне пояснення деяким іншим законам. Водночас ця теорія мала досить істотні недоліки.

З формули (114.4) випливає, що опір металів $\rho = 1/\sigma$ (тобто величина, зворотна до σ) повинний зростати

$$\rho = 1/\sigma = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \lambda} \sim \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \sqrt{T}$$

як корінь квадратний із температури. Дійсно, для припущення про залежність величин n і λ від температури немає жодних підстав. Швидкість же теплового руху пропорційна кореню з температури \sqrt{T} . Цей висновок теорії суперечить дослідним даним, згідно з якими електричний опір металів зростає пропорційно першому ступеню температури T , тобто швидше, ніж \sqrt{T} .

Як відомо, за низьких температур у металах спостерігається відсутність опору (явище надпровідності). Класична теорія електропровідності явище надпровідності не змогла пояснити.

Нарешті, класична теорія не змогла пояснити найголовнішого – чому електрони в металах виявляються вільними.

Недоліки класичної теорії електропровідності пов'язані з тим, що об'єкти мікросвіту, якими є електрони в металах, описує квантова, а не класична механіка.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Young H. D. University physics with modern physics in SI units, global edition / H. D. Young, R. A. Freedman, A. L. Ford. – Pearson Education, Limited, 2019.
- 2 Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – Київ : Либідь, 2001.
- 3 Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – Київ : Либідь, 2001.
- 4 Лисенко О. В. Розв'язування задач із фізики: електрика та магнетизм: навчальний посібник / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко. – Суми : Сумський державний університет, 2017.
- 5 Лисенко О. В. Розв'язування задач із фізики: механіка, молекулярна фізика, термодинаміка: навчальний посібник / О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський. – Суми : Сумський державний університет, 2017.
- 6 Introduction to Mechanics Specialization. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.coursera.org/specializations/introduction-to-mechanics>.
- 7 Understanding Einstein: The Special Theory of Relativity. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.coursera.org/learn/einstein-relativity>.
- 8 Introduction to Thermodynamics: Transferring Energy from Here to There. – [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.coursera.org/learn/thermodynamics-intro>.
- 9 Introduction to Electricity and Magnetism Specialization. [Електронний ресурс]. Режим доступу : <https://www.coursera.org/specializations/introduction-to-electricity-magnetism>.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- А**
Абсолютно тверде тіло 16
Ампер 172
- Б**
Броунівський рух 81
- В**
В'язкість 59
Вага 24
Ват 30
Вектор поляризації 157
Вісь обертання миттєва 41, 42
Вічний двигун
 другого роду 104
 першого роду 93
Власна довжина 70
Власний час 71
Вольт 144
В'язкість
 динамічна 62
 кінематична 62
- Г**
Газ
 ідеальний 83
 реальний 122
Гradient 35
Густина енергії електричного поля 172
Густина ймовірності 110
- Д**
Деформація 26
 пластична 26
 пружна 26
Динаміка 18
Дипольний момент 146
Дифузія 119
Діаграма станів 130
Діелектрик 156
Діелектрична
 проникність 160
 сприйнятливність 160
Ділянка кола
 неоднорідна 175
 однорідна 175
Довжина вільного пробігу 117
Дослід
 Рікке 182
 Толмена і Стюарта 183
- Е**
Еквіпотенціальна поверхня 145
Електризація 137
Електрична індукція 159
Електричне зміщення 159
Електричний диполь 146
Електрон-вольт 144
Електрорушійна сила 175
Енергія
 внутрішня 90
 кінетична 31, 75
 повна 36, 75
 потенціальна 33, 34
 спокою 75
Ентропія 107
Ефективний перетин молекули 118
- Є**
Ємність електрична
 відокремленого провідника 165
 конденсатора 166
 плоского 167
 циліндричного 167
- З**
Закон
 Авогадро 83
 взаємозв'язку маси й енергії спокою 76
 внутрішнього тертя Ньютона 121
 всесвітнього тяжіння 23
 Гаука 26, 27
 Джоуля-Ленца
 в інтегральній формі 179
 у диференціальній формі 180
 додавання швидкостей 65, 69
 збереження
 електричного заряду 138
 імпульсу 28
 моменту імпульсу 40
 повної механічної енергії 36
 зростання ентропії 108
 Кулона 139
 Ньютона
 другий 20
 перший 19
 третій 21
 Ома
 для неоднорідної ділянки кола 177
 для однорідної ділянки кола 176
 термодинаміки
 другий 104
 перший 93
 Фіка 120
 Фур'є 120
Заряд електричний 137
 від'ємний 138
 вільний 156

додатний 138
елементарний 138
зв'язаний 156
індукований 155
точковий 139
Змочування
повне 134
частинне 134

I

Імовірність 109
Імпульс
матеріальної точки 27
релятивістський 73
системи 27
Інваріантні
величини 65
рівняння 65
Інертність 19
Інтеграл визначений 11
Інтервал 71
простороподібний 72
часоподібний 72

K

Капіляр 136
Капілярність 136
Кельвін 81
Кілограм 22
Кінематика 9
Коефіцієнт
в'язкості 60
корисної дії теплової машини 103
Карно 105
поверхневого натягу 133
Конденсатор 166
Крайовий кут 134
Критичні величини 125
Кутове зміщення 16

L

Лінія
напруженості електричного поля 145
течії 56
Лоренцеве скорочення довжини 70

M

Макроскопічне тіло 78
Маса 19
Матеріальна точка 9
Межа пружності 26
Меніск 136
Метод вивчення рідин і газів
Ейлера 56
Лагранжа 56
Метр 22
Механізм поляризації
електронний 157

орієнтаційний 157
Механіка 9
Механічний рух 9
Модуль Юнга 27
Молекули полярні 157
Моль 82
Молярна маса 82
Момент
імпульсу 38
інерції 45
однорідного циліндра 45
однорідної кулі 46
тонкого однорідного стержня 46
сили 38

N

Надпровідність 176
Напруга
електрична 166
механічна 26
Напруженість
електричного поля 141
однорідно зарядженої кулі 154
однорідно зарядженої пластини 151
однорідно зарядженої циліндричної
поверхні 152
точкового заряду 141
поля сторонніх сил 175
Невагомість 24
Незмочування повне 134
Нерівність Клаузіуса 106

O

Одиниці фізичних величин
основні 21
похідні 21
Одночасність подій 66
Ом 176
Оператор набла 35
Опір електричний 176
питомий 176
Основні положення молекулярно-кінетичної
теорії 81

P

Пара
насичена 127
пересичена 128
Парадокс Д'Аламбера 62
Параметри стану 79
Паскаль 26
Переміщення 9
Перетворення
Галілея 64
Лоренца 67
Перетин нормальний 135
Плече сили 39
Поверхневий натяг 132

Показник політропи 98
 Поле
 електричне 140
 швидкостей 56
 Поляризація електрична 156
 Поляризованість 160
 Порядок
 ближній 131
 дальній 132
 Потенціал 143
 Потік 119, 148
 вектора 148
 вектора напруженості електричного поля 148
 імпульсу 121
 маси 120
 теплоти 120
 Потужність 30
 електричного струму 179
 Правило Кірхгофа
 друге 178
 перше 177
 Приведена кількість теплоти 107
 Принцип
 відносності Галілея 65
 відносності Ейнштейна 66
 інваріантності швидкості світла 66
 суперпозиції 140, 141
 термодинаміки загальний 80
 Прискорення 12
 доцентрове 15
 кутове 16
 нормальне 14
 тангенціальне 14
 Провідність 176
 Простір 9
 Процес
 адіабатичний 96
 ізобаричний 96
 ізотермічний 96
 ізохоричний 96
 квазістатичний 79
 круговий 79
 необоротний 104
 оборотний 79, 104
 політропічний 97
 термодинамічний 79

Р

Радіус кривизни 15
 Радіус молекулярної дії 123
 Радіус-вектор 9
 Рівність Клаузіуса 106
 Рівняння
 Бернуллі 58
 Ван-дер-Ваальса 124

динаміки обертального руху твердого тіла щодо нерухомої осі 45
 Клапейрона 83
 Майєра 95
 Менделєєва – Клапейрона 83
 моментів 39, 40
 неперервності 174
 політропи 98
 Пуассона 97
 релятивістської динаміки 74
 руху
 матеріальної точки 20
 твердого тіла 50
 стану 83
 Рідина 131
 ідеальна 57
 перегріта 128
 Робота 29, 30
 Розмірність 22
 Розподіл
 Больцмана 117
 Максвелла 112
 Рух
 обертальний 16
 плоский 41
 поступальний 16
 рівноприскорений 13

С

Секунда 22
 Сила 20
 внутрішнього тертя 61
 внутрішня 28
 зовнішня 28
 інерції
 відцентрова 53
 Коріоліса 55
 поступальна 52
 консервативна 32
 лобового опору 62
 піднімальна 62
 поверхневого натягу 133
 пружності 26
 реакції опори 24
 результуюча 20
 рівнодійна 20
 Стокса 63
 стороння 175
 тертя
 ковзання 25
 спокою 25
 тяжіння 23
 фундаментальна 23
 центральна 40
 Система
 замкнена 19
 ізольована 19, 79

інерціальна 19
 неінерціальна 51
 термодинамічна 79
 Система відліку 9
 Система одиниць 21
 Стала
 Авогадро 82
 адіабати 95
 Больцмана 84
 електрична 140
 універсальна газова 83
 Сталі Ван-дер-Ваальса 123
 Стан
 метастабільний 128
 нерівноважний 79
 рівноважний 79
 Струм електричний 172
 густина 173
 Струм електричний 172
 Ступені вільності механічної системи 89
 коливальні 90
 обертальні 89
 поступальні 89
 Сублімація 130
 Сфера молекулярної дії 123

Т

Температура 80
 абсолютна 81
 за шкалою Фаренгейта 80
 за шкалою Цельсія 80
 молекулярно-кінетичний зміст 88
 Теорема
 Гаусса для електричного поля в діелектрику
 в інтегральній формі 159
 у диференціальній формі 159
 Гаусса для електричного поля у вакуумі
 в інтегральній формі 150
 у диференціальній формі 155
 Гюйгенса-Штейнера 47
 Карно
 друга 105
 перша 105
 Остроградського-Гаусса 154
 про кінетичну енергію 31
 про нерозривність потоку 57
 про рівномірний розподіл кінетичної енергії
 за ступенями вільності 90
 про циркуляцію напруженості
 електростатичного поля 142
 Тепловий двигун 103
 Теплоємність 93
 за сталого об'ємі 94
 за сталого тиску 94
 молярна 94
 Теплопередача 92
 Теплопровідність 120

Теплота 92
 Термодинаміка 78
 Течія
 ламінарна 61
 турбулентна 61
 Точка потрійна 130
 Траєкторія 10
 Трубка течії 56

У

Удар
 абсолютно непружний 37
 абсолютно пружний 37
 центральний 37
 Умова нормування
 дискретних величин 109
 неперервних величин 110
 Умова рівноваги твердого тіла 50

Ф

Фаза термодинамічна 126
 Фазове перетворення
 другого роду 130
 першого роду 130
 Фарада 165
 Фізика 9
 статистична 78
 Формула
 барометрична 85
 Лапласа 136
 Торрічеллі 59
 Функції розподілу молекул за швидкостями 112
 Функція розподілу ймовірності 110

Ц

Центр мас 29, 42
 Цикл Карно 105
 Циркуляція вектора 142

Ч

Час 9
 Число Рейнольдса 61
 критичне 61
 Число ударів молекул об одиничну поверхню
 за одиницю часу 116

Ш

Швидкість
 кутова 16
 миттєва 10
 молекул
 найбільш імовірна 114
 середньоквадратична 89, 114
 середня 113
 середня 10
 Шлях 10

Електронне навчальне видання

Лисенко Олександр Володимирович

Математичні моделі у фізиці

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 113 «Прикладна Математика»

У двох частинах

Частина 1

Відповідальний за випуск І. В. Коплик

Редактор І. О. Кругляк

Комп'ютерне верстання О. В. Лисенка

Формат 60x84/8. Ум. друк. арк. 22,32. Обл.-вид. арк. 22,83.

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.