

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет



Ратушний О. В., Гусак О. Г.

ГІДРАВЛІКА

Підручник

Видання друге, перероблене

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2022

УДК 532.51
Р 25

Рецензенти:

М. Г. Хмельнюк – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри холодильних установок і кондиціонування повітря Одеського національного технологічного університету;

О. О. Ляпоценко – доктор технічних наук, професор, професор кафедри хімічної інженерії Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 13 від 23 червня 2022 року)*

Ратушний О. В.

Р 25 Гідравліка : підручник / О. В. Ратушний, О. Г. Гусак. –
2-ге вид., переробл. – Суми : Сумський державний
університет, 2022. – 251 с.
ISBN 978-966-657-914-3

У підручнику розглянуті основи гідростатики, кінематики й динаміки рідини, а також деякі практичні питання розрахунку різних видів трубопроводів. Підручник відповідає програмі навчальної дисципліни «Гідравліка» для студентів закладів вищої освіти III–IV рівнів акредитації спеціальності 131 «Прикладна механіка» (освітня програма «Гідравлічні машини, гідроприводи та гідропневмоавтоматика») денної та заочної форм навчання.

Видання також може бути корисним науковцям та фахівцям-насособудівникам.

УДК 532.51

ISBN 978-966-657-914-3 © Сумський державний університет, 2022
© Ратушний О. В., Гусак О. Г., 2022

ЗМІСТ

	С.
1 Гідравліка – наука про рідину.....	7
1.1 Предмет і методи гідравліки. Її місце серед інших наук.....	7
1.2 Історія виникнення та розвитку гідравліки.....	10
1.3 Рідина як об’єкт вивчення гідравліки. Реальна рідина та її моделі. Елементарний об’єм рідини.....	12
1.4 Основні фізичні властивості реальної рідини.....	15
1.4.1 Основні механічні характеристики.....	15
1.4.2 Легка рухомість.....	17
1.4.3 Стисливість.....	18
1.4.4 Температурне розширення.....	20
1.4.5 В’язкість.....	22
1.4.6 Липкість.....	24
1.4.7 Розчинення газів у рідині.....	25
1.4.8 Випаровування та закипання.....	25
1.4.9 Поверхневий натяг (капілярність).....	27
1.5 Сили, що діють у рідині.....	28
Контрольні питання до розділу.....	33
2 Гідростатика.....	34
2.1 Гідростатичний тиск і його властивості. Закон Паскаля.....	34
2.2 Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера).....	39
2.3 Основні рівняння гідростатики.....	44
2.4 Основні види тиску.....	48
2.5 Характерні площини в рідині, що перебуває в стані спокою.....	50
2.6 Закон розподілу тиску в газах.....	54
2.7 Відносний спокій рідини.....	57
2.8 Сила тиску рідини на плоскі поверхні.....	66

2.9 Сила тиску на плоске дно резервуара.	
Гідростатичний парадокс.....	71
2.10 Сила тиску рідини на криволінійну поверхню.....	73
2.11 Закон Архімеда.....	77
2.12 Основи теорії плавання тіл.....	80
Контрольні питання до розділу 2.....	85
3 Основи кінематики й динаміки рідини.....	87
3.1 Основні поняття.....	87
3.2 Методи вивчення руху рідини.....	88
3.2.1 Метод Ейлера.....	88
3.2.2 Метод Лагранжа.....	89
3.3 Геометричні характеристики поля швидкостей.....	91
3.3.1 Лінія течії.....	91
3.3.2 Траєкторія.....	93
3.3.3 Поверхня течії.....	93
3.3.4 Трубка течії.....	94
3.3.5 Струминка течії. Елементарна струминка.....	95
3.3.6 Витрата елементарної струминки.....	95
3.3.7 Живий переріз потоку. Змочений периметр.....	97
3.3.8 Гідравлічний радіус.....	98
3.3.9 Середня швидкість.....	99
3.4 Закон збереження маси в гідравліці.....	100
3.5 Ламінарний і турбулентний режими руху рідини.....	103
3.6 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини.....	106
3.6.1 Фізичний зміст членів рівняння Бернуллі.....	110
3.6.1.1 Енергетичний зміст членів рівняння Бернуллі	110
3.6.1.2 Геометричний зміст членів рівняння	
Бернуллі.....	113
3.6.2 Інші вирази для питомої енергії рідини.....	115
3.7 Рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини.....	116
3.8 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини.....	120

3.9 Графічна ілюстрація зміни енергії вздовж трубопроводу.....	123
3.9.1 Зміна енергії вздовж трубопроводу для потоку ідеальної рідини.....	123
3.9.2 Зміна енергії вздовж трубопроводу для потоку в'язкої рідини.....	125
3.10 Рівняння Бернуллі для стисливої рідини.....	126
3.11 Рівняння Бернуллі для несталоого й відносного руху рідини.....	130
3.12 Теорема імпульсів для руху рідини.....	136
3.13 Гідравлічні опори.....	142
3.13.1 Загальні положення.....	142
3.13.2 Втрати напору по довжині.....	143
3.13.3 Втрати напору на місцевих опорах.....	145
3.13.3.1 Види місцевих опорів.....	145
3.13.3.2 Раптове розширення потоку.....	147
3.13.3.3 Раптове звуження потоку.....	152
3.13.3.4 Поступове розширення потоку.....	154
3.13.3.5 Поступове звуження каналу.....	160
3.13.3.6 Поворот потоку.....	162
3.14 Ламінарна течія в круглій циліндричній трубі.....	166
3.15 Втрати енергії по довжині під час турбулентного руху рідини.....	176
3.16 Гідравлічний розрахунок трубопроводів.....	189
3.17 Послідовне з'єднання трубопроводів.....	199
3.18 Трубопровід із паралельним розгалуженням.....	201
3.19 Розгалужений трубопровід.....	204
3.20 Розрахунок сифона.....	208
3.21 Гідравлічний удар у трубах.....	210
3.22 Витікання рідини через отвори й насадки.....	221
3.22.1 Отвір у тонкій стінці.....	221
3.22.2 Витікання під рівень.....	230

3.22.3 Витікання через насадки.....	232
3.22.4 Траєкторія струменя.....	241
3.22.5 Витікання рідини через отвори й насадки в разі змінного напору (спорожнення резервуара).....	243
3.22.6 Витікання рідини з дренажного резервуара.....	245
Контрольні питання до розділу 3.....	248
Список літератури.....	250

1 ГІДРАВЛІКА – НАУКА ПРО РІДИНУ

1.1 Предмет і методи гідравліки. Її місце серед інших наук

Гідравліка – це прикладна інженерна наука про рівновагу та рух рідини, сили взаємодії рідин та твердих тіл і використання їх у природі й техніці.

Гідравліка ґрунтується насамперед на експериментальних даних і розробляє практичні (інженерні) методи розрахунків течії рідини в каналах, трубах, технічних пристроях та гідравлічних системах. Надзвичайно велике коло її проявів на практиці, у природі й техніці.

Термін «гідравліка» походить від двох грецьких слів «вода» й «трубка» та означав спочатку вчення про водопроводи. Зараз гідравліка вивчає рух різноманітних рідин у трубах, каналах, гідротехнічних спорудах тощо. Водночас гідравліка є основою гідравлічних розрахунків для систем водопостачання, водовідведення, теплогазопостачання, опалення, вентиляції, насосних і компресорних станцій, гідротехнічних і гідромеліоративних споруд, систем дорожнього водовідведення.

Розвиток науки гідравліки пов'язаний із використанням людиною води. У Римі ще за шість століть до нашої ери було споруджено водопровід, залишки якого збереглися до нашого часу. Першою науковою працею з гідравліки був твір Архімеда «Про плаваючі тіла», написаний за 250 років до нашої ери.

Активно розвивалася гідравліка в епоху Відродження. У цей час з'явилися праці Леонардо да Вінчі, Стевіна, а пізніше, у сімнадцятому столітті, – Галілея, Торрічеллі, Паскаля, Ньютона. Подальший розвиток науки

про рівновагу та рух рідини привів до появи науки, близької до гідравліки, – гідромеханіки.

На відміну від гідравліки, де розглядають питання механіки рідини, для вирішення яких використовують результати експериментів, у гідромеханіці розв'язують задачі рівноваги та руху рідини за допомогою методів теоретичної механіки й математичного аналізу.

Розвиток та успіхи гідравліки у вирішенні багатьох завдань інженерної практики й розробленні нових гідравлічних методів розрахунку, з одного боку, та розвиток теоретичної гідромеханіки у зв'язку із використанням ЕОМ та нових методів розрахунку, з іншого боку, дали можливість наблизити ці науки одна до одної.

Можна вважати, що сучасна гідравліка є технічною механікою рідини, що ґрунтується на теоретичній гідромеханіці.

Відомо, що фізика – наука про загальні властивості оточуючої матерії. Ці властивості різні, тому їх вивчають різні розділи фізики. Гідравліка – розділ механіки рідини й газів, що зі свого боку є складовою частиною розділу фізики «Механіка суцільних середовищ».

Тому основним методом механіки рідин і газів є теоретичне вивчення законів рівноваги та руху рідини й газів, їх взаємодія із твердими тілами на основі загальних законів механіки, а також експериментальне вивчення законів рівноваги та руху рідин і газів.

Але гідравліка все ширше використовує теоретичні обґрунтування, висновки й намагається експериментально їх підтвердити. Так само, як і механіка рідини й газів, широко використовує експериментальні дослідження для теоретичних висновків.

Місце гідравліки серед інших наук можна подати як розділ фізики (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Основні розділи фізики

Предметом курсу гідравліки є такі питання:

а) закони рівноваги й руху рідини, баланс енергії та сили взаємодії з твердими тілами;

б) використання законів рівноваги й руху рідини для практичних цілей, інженерних розрахунків гідравлічних систем і машин;

в) приклади використання законів рівноваги та руху рідини в техніці.

1.2 Історія виникнення та розвитку гідравліки

Як і всі інші науки, гідравліка виникла з реальних практичних потреб людини. Із самого початку зародження людської цивілізації людина неминуче стикається із проявами дії води й повітря: вітер, що руйнував оселі, вода, що заливала під час дощу, або повінь, весняні танення та інше – усе вимагало вживати заходів для захисту. Розвиток гідравліки нерозривно пов'язаний із мрією людини про використання для своїх потреб такого елемента природи, яким є вода.

Археологічні розкопки показують іригаційні споруди – дамби, канали, навіть цілі системи водопостачання – деяких древніх міст. Усе це було б неможливо збудувати без знань елементарних законів гідравліки.

Одна з перших наукових праць, що дійшла до нас, – це трактат Архімеда «Про плаваючі тіла». Відкритий Архімедом закон про виштовхувальну силу і в наш час є основою навчання про рівновагу плаваючого тіла.

Найбільш активно гідравліка розвивалася в епоху Відродження (кінець XV – середина XVI століття). Пов'язано це з поступовим переходом людства до капіталістичного способу виробництва, одержання прибуткової вартості, розвитком машинного виробництва. Вода як енергоносіє, здатний виконувати роботу, стає предметом досліджень. Саме тоді з'явилося водяне колесо як двигун машини для підняття води, перші насосні та водопідіймальні машини. До речі, вертоліт (гелікоптер) і підводний човен теж були відкриті в той час Леонардо да Вінчі. «Кожного разу, коли маєш справу з водою, насамперед звернися до досвіду, а вже потім розмірковуй і роби висновки», – відомий вислів Леонардо

да Вінчі. Пізніше Галілей сказав: «Легше вивчити рух далеких від нас планет, ніж рух води в струмочку, що тече поблизу».

У середині XVIII століття експериментальний напрямок продовжує розвиватися, але паралельно поступово починає розвиватися новий теоретичний напрямок.

До ранніх теоретичних праць із механіки рідини належать праці таких науковців: С. Стевіна «Основи гідростатики»; І. Галілея «Міркування про тіла, що перебувають у воді, і про ті, що в ній рухаються»; Е. Торрічеллі, що вивів формулу швидкості витікання нев'язкої рідини з отворів; Б. Паскаля, який сформував закон про передавання тиску в рідині; І. Ньютона, який визначив особливості внутрішнього тертя в рідині.

Значний внесок у розвиток механіки рідини й газу в XVIII столітті зробили члени Петербурзької академії наук М. В. Ломоносов (закони збереження речовини та енергії для рідини, що рухається), Л. Ейлер (диференціальні рівняння рівноваги й руху рідини), Д. Бернуллі (його рівняння є основою сучасних гідравлічних розрахунків трубопроводів, відкритих русел і споруд).

У XVIII столітті вагомий внесок у визначення гідравлічних опорів під час руху рідини зробили А. Шезі, Ю. Вейсбах, Д. Вентурі, О. Рейнольдс, Д. І. Менделєєв, М. П. Петров, М. Є. Жуковський, О. М. Крилов, С. О. Чаплигін, Г. Стокс, Л. Прандтль.

Саме в цей час відбувалися розвиток суднобудівної справи, зародження та розвиток авіації, гідротехнічне будівництво водопостачання та водовідведення великих міст.

Широко відомі праці вчених радянського періоду: М. Д. Чертоусова, Й. І. Агроскіна, І. І. Леві, Р. Р. Чугаєва, О. О. Саткевича, Б. Й. Єсьмана, А. Д. Альтшуля,

Л. І. Лойцяньського, Б. Т. Ємцева, Д. В. Штернліхта. Також відомі праці українських учених: Г. Й. Сухомела, Ю. М. Даденкова, О. А. Угінчуса, В. В. Смилова, І. А. Шеренкова, О. М. Грабовського, О. Я. Олійника, В. О. Большакова, О. М. Яхна, І. І. Науменка.

Подальший розвиток науки про рівновагу й рух рідини виявив неможливість існувати відокремлено від теоретичного та експериментального напрямків. У зв'язку з подальшим розвитком математики й комп'ютерної техніки, моделювання, енергетики, потреб авіації та космонавтики виникло дуже багато відгалужень – підземна гідравліка, гідродинаміка дво- й багатозазних потоків, магнітна гідродинаміка, гідродинамічна теорія змішування.

1.2 Рідина як об'єкт вивчення гідравліки.

Реальна рідина та її моделі.

Елементарний об'єм рідини

Рідиною називають таке фізичне матеріальне тіло, частинки якого мають дуже велику рухомість одна щодо однієї, через що воно не має власної форми, а набирає форми посудини, в якій воно міститься. Рідини бувають двох видів: нестисливі (вода, нафта, олія та інші краплинні рідини) й стисливі (повітря та інші гази).

Нестисливі (краплинні) рідини мають власний об'єм, що займає частину об'єму резервуара й вільну поверхню. Стисливі рідини таких властивостей не мають і заповнюють увесь об'єм закритого резервуара (рис. 1.2).

Рідина має молекулярну структуру. Наприклад: H_2O – вода, D_2O – важка вода, T_2O – вода з іоном тритію. Різні ізоіопи має і кисень. Але в механіці під час вивчення руху матеріального тіла можна нехтувати окремими фізичними ознаками реального матеріального тіла.



Рисунок 1.2 – Приклади вільної поверхні рідини

Наприклад, коли в механіці вивчають явище зіткнення двох кульок, нехтують їх зовнішнім забарвленням, оскільки воно не впливає на наслідки зіткнення. Так, для вивчення руху рідини доцільно нехтувати тим, що не впливає на результат досліджень цього явища.

Для спрощення аналітичних досліджень у 1753 році Л. Ейлер запропонував модель реальної рідини, що називають «суцільним рідким середовищем». У цій моделі Ейлер знехтував мікропростором між окремими молекулами, оскільки вони дуже малі й помітного впливу на рух рідини не мають. Чи справедливо це? Так. Наприклад, 1 мм^3 повітря містить $2,7 \cdot 10^{16}$ молекул, міжмолекулярна відстань становить від 10^{-7} см до 10^{-8} см. Припущення, що простір між молекулами відсутній, дозволило вважати, що рідина наявна в кожній точці, а тому параметри, які характеризують стан рідини (тиск p , швидкість v , температура T , в'язкість μ та ін.), є безперервними функціями ($v = f(x, y, z, t)$; $p = f(x, y, z, t)$). Останнє зі свого боку дозволяє використовувати весь математичний апарат і математичний аналіз для вивчення законів руху рідини. Далі для спрощення замість терміна «суцільне рідке

середовище» будемо використовувати термін «перша модель».

Згідно з гіпотезою І. Ньютона (1686 р.), пізніше обґрунтованою професором М. П. Петровим (1883 р.), дотичне напруження в рідині залежить від виду й характеру руху рідини та змінюється прямо пропорційно градієнту швидкості. Тому в рідині, що перебуває в стані спокою, в'язкість відсутня.

Під час вирішення теоретичних питань та опису ряду явищ, пов'язаних з обтіканням твердих тіл і рухом рідини через деякі споруди та пристрої, зазвичай користуються моделлю ідеальної рідини. Ідеальна рідина характеризується відсутністю внутрішнього тертя під час її руху (відсутня в'язкість). Такої рідини в природі не існує, але наведена модель нев'язкої рідини (друга модель) зручна для вирішення теоретичних питань (рис. 1.3).



Рисунок 1.3 – Моделі рідкого середовища

Отже, перша модель рідини за характеристиками ближча до реальної рідини, ніж друга.

Для вивчення руху рідини необхідно ввести поняття елементарного об'єму. Елементарний об'єм рідини – це об'єм, лінійні розміри якого значно менші від будь-якого

лінійного розміру твердого тіла, що контактує з рідиною, але значно більші від довжини вільного пробігу молекули.

У подальшому будуть розглянуті всі явища, де буде виділений елементарний об'єм рідини. Потім через інтегрування будуть виведені загальні рівняння.

1.4 Основні фізичні властивості реальної рідини

1.4.1 Основні механічні характеристики

До основних механічних характеристик відносять:

а) тиск у кожній точці рідини, Па:

$$p = p(x, y, z, t);$$

б) швидкість у кожній точці рідини, м/с:

$$\vec{v} = v(x, y, z, t);$$

в) прискорення у кожній точці рідини, м/с²:

$$\vec{w} = \frac{dv(x, y, z, t)}{dt};$$

г) густину рідини – масу одиниці об'єму рідини, кг/м³:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

У разі безперервного середовища

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad (1.1)$$

г) питома вага – це вага одиниці об'єму, Н/м³:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V}.$$

У разі безперервного середовища

$$\gamma = \frac{G}{V}. \quad (1.2)$$

Розглянемо зв'язок між густиною ρ і питомою вагою γ .

Відомо, що

$$G = mg. \quad (1.3)$$

Тоді, підставляючи (1.3) в (1.2), одержуємо

$$\gamma = \frac{mg}{V}. \quad (1.4)$$

З урахуванням (1.1)

$$m = \rho V. \quad (1.5)$$

Тоді, підставляючи (1.5) в (1.4), одержуємо

$$\gamma = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{V}$$

Остаточно

$$\gamma = \rho g . \quad (1.6)$$

Значення густини ρ деяких рідин наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Густини рідин

Назва рідини	T, °C	ρ , кг/м ³
Вода	0	999,9
	4	1 000,0
	20	998,2
	40	992,2
	99	952,1
Морська вода	20	1 002–1 029
Нафта	20	850–950
Ртуть	20	13 547
Масло для гідравлічних систем	20	До 850
Повітря під час атмосферного тиску	20	1,2

1.4.2 Легка рухомість

Легка рухомість (текучість) – це нездатність рідини чинити опір деформаціям зсуву. Ця характеристика є якісною: рідина не може зберігати своєї форми, вона набирає форми того резервуара, в якому вона міститься.

1.4.3 Стисливість

Стисливість – це властивість рідини змінювати свій об’єм у разі зміни зовнішнього тиску.

Стисливість рідини характеризується коефіцієнтом об’ємного стиску β_p :

$$\beta_p = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dp}. \quad (1.7)$$

Коефіцієнт об’ємного стиску β_p вимірюють у Па^{-1} . Він характеризує відносне зменшення об’єму рідини під час збільшення тиску на 1 Па.

Інтегруючи рівняння (1.7), одержуємо

$$V = V_0 (1 - \beta_p \Delta p). \quad (1.8)$$

Величина, обернено пропорційна коефіцієнту β_p , має назву модуля об’ємної пружності рідини

$$k = \frac{1}{\beta_p}. \quad (1.9)$$

Об’ємну пружність вимірюють у Па.

Для води $k = 2 \cdot 10^6$ кПа, $\beta_p = 5 \cdot 10^{-7}$ кПа^{-1} . Тобто під час підвищення тиску на 100 кПа об’єм води зменшується лише на $5 \cdot 10^{-5}$ см^3 . Ось чому за помірних тисків воду можна вважати практично нестисливою.

Ураховуючи (1.1) і (1.8), одержуємо

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta_p \Delta p} \quad (1.10)$$

Тобто під час підвищення тиску на 10^4 кПа густина води збільшується на 0,5 %.

Графіки залежності модуля пружності K від зміни тиску p для краплинних (нестисливих) рідин і газів наведені на рисунку 1.4.

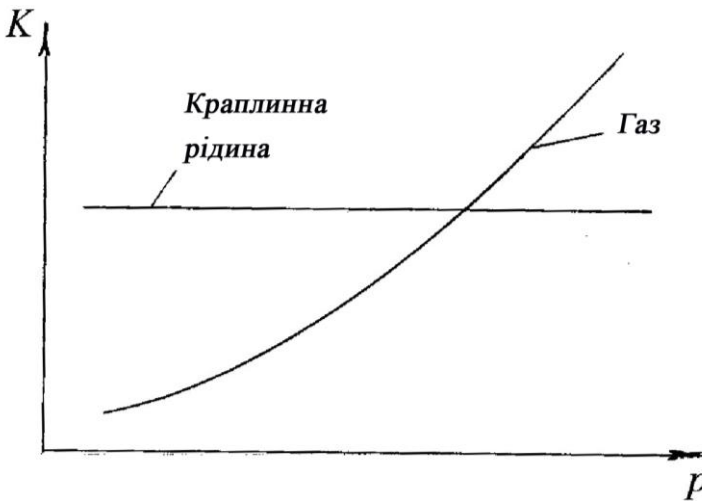


Рисунок 1.4 – Залежність модуля пружності від зміни тиску

Графіки залежності об'єму V від зміни тиску p для краплинних (нестисливих) рідин і газів наведені на рисунку 1.5.

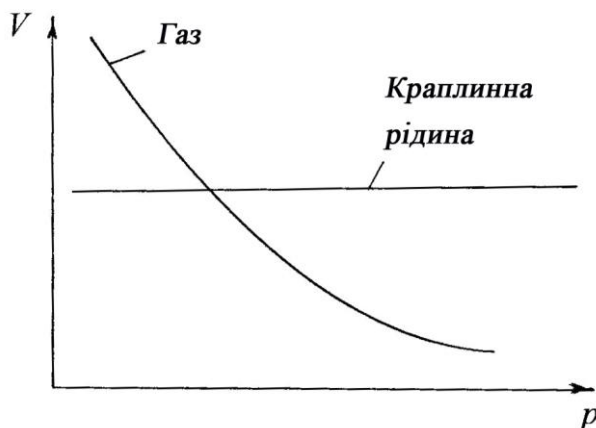


Рисунок 1.5 – Залежність об'єму від зміни тиску

Тобто для газів у разі збільшення тиску об'єм помітно зменшується й збільшується густина; для краплинних рідин зміна тиску не впливає на об'єм і густину.

1.4.4 Температурне розширення

Температурне розширення – здатність рідини змінювати свій об'єм під час зміни температури. Відносне збільшення об'єму рідини в разі підвищення температури характеризується коефіцієнтом температурного розширення β_T :

$$\beta_T = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dT}. \quad (1.11)$$

Коефіцієнт температурного розширення вимірюють у K^{-1} . Після інтегрування (1.11) одержуємо

$$V = V_0 (1 + \beta_T \Delta T). \quad (1.12)$$

Ураховуючи (1.1) і (1.12), одержуємо

$$\rho = \rho_0 \frac{\rho_0}{1 + \beta_T \Delta T}. \quad (1.13)$$

Для води за температури $T = +10-20$ °С коефіцієнт температурного розширення $\beta_T = 0,00015 \text{ K}^{-1}$.

Тобто зміна густини та об'єму дуже незначна. Для газів під час збільшення температури густина ρ помітно зменшується.

На рисунку 1.6 наведено залежність густини від температури для води й газу.

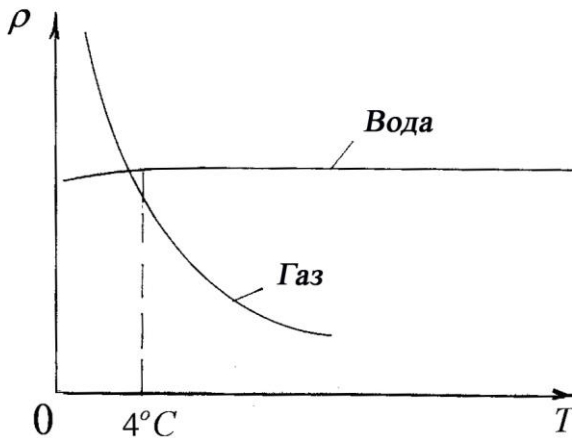


Рисунок 1.6 – Залежність густини від температури

Густина води має максимум у разі $T = 4^{\circ}\text{C}$, за $T = 0^{\circ}\text{C}$ вода переходить у твердий стан (крига), а якщо $T = 100^{\circ}\text{C}$ – у газовий (пара).

1.4.5 В'язкість

В'язкість – це властивість рідини чинити під час свого руху опір відносному зсуву своїх частинок (деформаціям зсуву).

У рідині, що рухається, швидкості різні в різних її шарах. Між шарами рідини виникають сили внутрішнього тертя. Силу тертя, що припадає на одиницю площі, будемо називати дотичним напруженням τ .

Залежність швидкості v від відстані y подано на рисунку 1.7. На відстані y рідина має швидкість v ; на відстані $(y + dy)$ – швидкість $(v + dv)$.

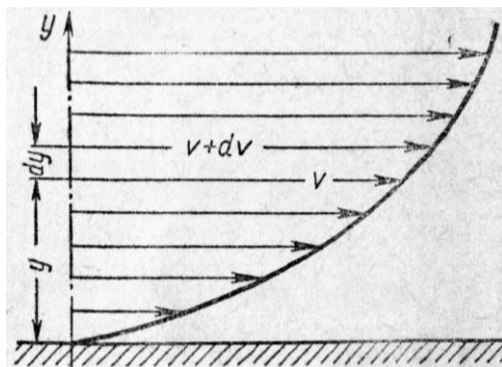


Рисунок 1.7 – Залежність швидкості від відстані

За гіпотезою Ньютона закон внутрішнього тертя в рідині записують у вигляді, який запропонував М. П. Петров:

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dy}, \quad (1.14)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;

$\frac{dv}{dy}$ – градієнт швидкості, тобто зміна швидкості на одиницю довжини в перпендикулярному напрямі.

Тоді

$$\bar{\tau} = \pm \mu \text{grad} \bar{v}. \quad (1.15)$$

Із формули (1.15) випливає, що в рідині, яка перебуває в стані спокою ($\text{grad} \bar{v} = 0$), дотичне напруження відсутнє ($\tau = 0$). Тобто в'язкість виявляється лише під час руху рідини.

У разі якщо дотичне напруження по поверхні S є сталим, повну дотичну силу (сила тертя), що діє по поверхні, визначають за формулою

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} S. \quad (1.16)$$

Коефіцієнт динамічної в'язкості μ вимірюють у Па·с. Він не залежить від інтенсивності деформації та сталий у разі визначеного стану рідини.

Аналізуючи формулу (1.14), можна зазначити, що динамічна в'язкість μ визначає силу, потрібну для переміщення одного шару рідини по іншому, якщо площі контакту шарів і градієнтів швидкості дорівнюють одиниці.

У гідравлічних розрахунках часто використовують величину ν – кінематичну в'язкість, що є відношенням динамічної в'язкості μ до густини ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.17)$$

Кінематичну в'язкість ν вимірюють у $\text{м}^2/\text{с}$ і залежить від виду рідини й температури. Із підвищенням температури кінематична в'язкість для краплинної рідини зменшується, а для газів – збільшується (рис. 1.8).

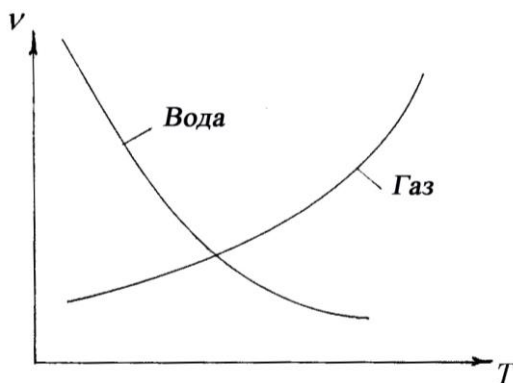


Рисунок 1.8 – Залежність кінематичної в'язкості від температури

1.4.6 Липкість

Липкість – це здатність рідини чинити опір розтяжним зусиллям.

Згідно з молекулярною теорією здатність краплинних рідин чинити опір розтяжним зусиллям дуже

велика – до 10^9 Па. Вода за спеціальних умов витримує розтяжні зусилля до $2,8 \cdot 10^7$ Па.

Але на практиці внаслідок вмісту в рідині твердих частинок і газу здатність рідини чинити опір розтяжним зусиллям дуже мала. Так, для води розрив суцільності відбувається, якщо розривне зусилля дорівнює $0,00036$ кг/см². Це в десять мільйонів разів менше, ніж розривне зусилля для сталі.

Тому в гідравліці вважають, що рідина зовсім не може чинити опір розтяжним зусиллям.

1.4.7 Розчинення газів у рідині

Розчинення газів у рідині відбувається за будь-яких умов, але вміст газу в одиниці об'єму рідини залежить від виду рідини й змінюється зі збільшенням тиску.

Відносний об'єм газу, який можна розчинити в рідині, збільшується зі збільшенням тиску. За нормальних умов ($T = 20$ °C; $p = 1$ кг/см²) вода містить близько 2 % повітря.

Чим більший тиск, тим більше розчиненого газу (рис. 1.9). Цю властивість широко застосовують для виробництва газованих напоїв (шампанське, сидро та ін.).

Під час зниження тиску в рідині відбувається вилучення розчиненого газу. До того ж вилучення відбувається значно інтенсивніше, ніж розчинення, що може нашкодити роботі гідросистем.

1.4.8 Випаровування та закипання

Випаровування характерне для всіх краплинних рідин, але залежить від типу рідини та зовнішніх умов. Основна характеристика випаровування – температура закипання за нормального атмосферного тиску. Так, для

води температура закипання $T_{\text{зак}}$ дорівнює $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ за умови тиску p , що дорівнює 1 кг/см^2 . Якщо тиск зменшується, то й температура закипання знижується: у разі $p = 0,45\text{ кг/см}^2$ $T_{\text{зак}} = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$; якщо $p = 0,25\text{ кг/см}^2$ – $T_{\text{зак}} = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$.

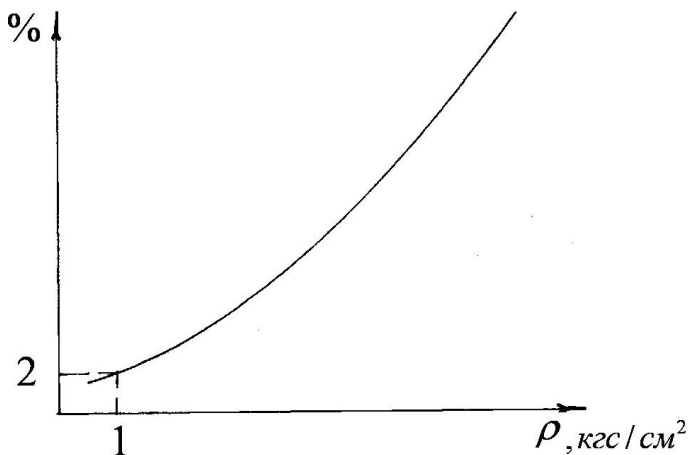


Рисунок 1.9 – Залежність кількості розчиненого в рідині газу від зміни тиску

У гідросистемах випаровування та закипання зазвичай відбуваються в замкнених об'ємах за температур і тисків, що відрізняються від нормальних. Тому для характеристики випаровування користуються поняттям «тиск насиченої пари». Чим більший тиск насиченої пари за даної температури, тим більше випаровування рідини. Розглянутою властивістю рідини обумовлене явище в роботі гідросистем, що називають кавітацією. Воно є шкідливим для роботи гідросистем.

1.4.9 Поверхневий натяг (капілярність)

Поверхневий шар нестисливої рідини перебуває в особливому напруженому стані, зумовленим невірноваженістю дії молекулярних сил і характеризується силами поверхневого натягу.

Розрізняють змочувані та незмочувані поверхні:

а) якщо взаємотяжіння двох молекул рідини велике щодо тяжіння молекул рідини до частинок твердої поверхні, маємо незмочувану поверхню (наприклад, скло – ртуть) (рис. 1.10);

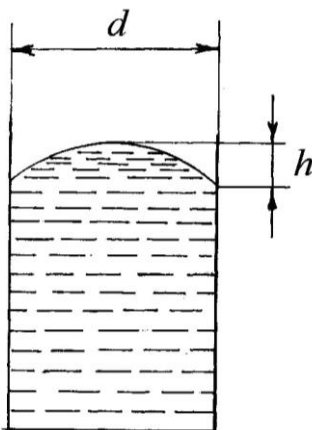


Рисунок 1.10 – Незмочувана поверхня

б) якщо взаємотяжіння двох молекул рідини мале щодо тяжіння молекул рідини до частинок твердої поверхні, маємо змочувану поверхню (наприклад, скло – вода) (рис. 1.11).

Вплив цих факторів значною мірою проявляється в трубках малого діаметра, в яких рідина, що змочує стінки трубки (наприклад, вода), піднімається, а рідина, що не змочує стінки трубки, опускається. Це явище називають капілярністю.

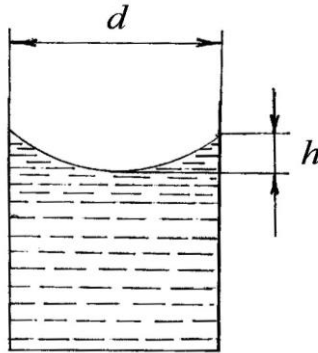


Рисунок 1.11 – Змочувана поверхня

Висота капілярного підняття води h у скляній трубці діаметром d за температури $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ буде $h = 30/d$; а висота опускання ртуті h у скляній трубці діаметром d за температури $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ буде $h = 10/d$.

Цю властивість рідини необхідно враховувати під час відліку у вимірювальних приладах, у яких використовують скляні трубки з рідиною. Також велике значення мають сили поверхневого натягу для рідини, що перебувають в умовах невагомості.

Усі властивості рідини, розглянуті вище, необхідно враховувати додатково під час розрахунків за рівняннями гідравліки.

1.5 Сили, що діють у рідині

Усі сили, що діють у рідині, можна поділити на внутрішні та зовнішні (рис. 1.12). Внутрішні – це сили взаємодії між окремими частинками рідини. До внутрішніх сил належать сили пружності \overline{F}_i і сили в'язкості (тертя) \overline{T} .

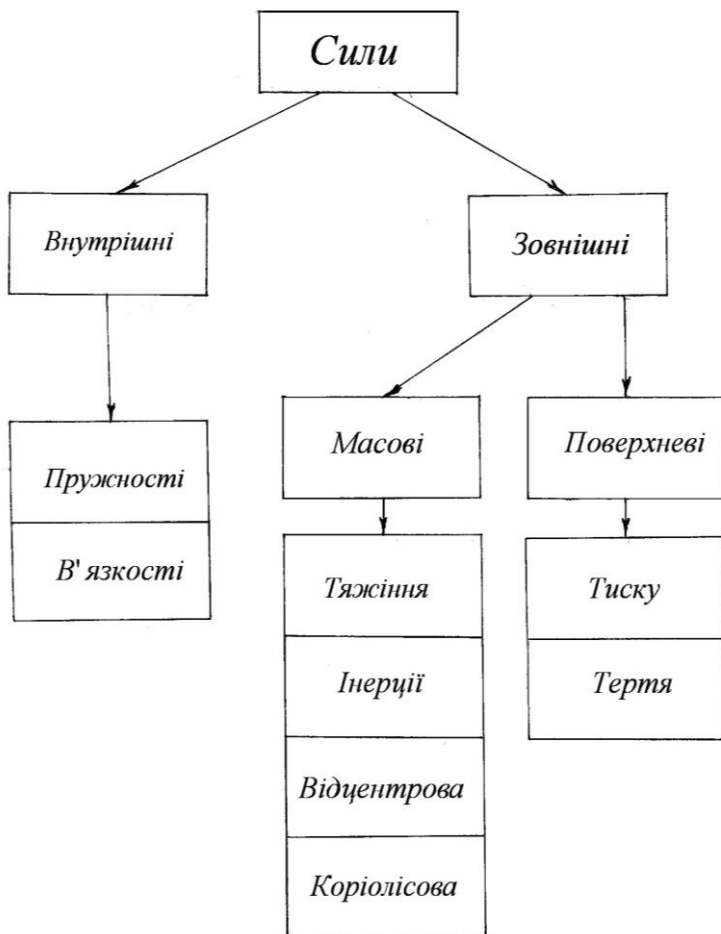


Рисунок 1.12 – Класифікація сил

Зовнішні – це сили, прикладені до окремих частинок або до виділеного елементарного об’єму з боку інших матеріальних тіл, зокрема і з боку оточуючої рідини. До зовнішніх сил належать масові й поверхневі сили.

Масові сили – це сили, прикладені до всього об’єму рідини й зумовлені масою цього об’єму. Масові сили

пропорційні масі рідини, а для однорідної рідини – пропорційні об'єму.

До масових сил належать:

а) сила тяжіння $\bar{G} = m\bar{g}$;

б) сила інерції $\bar{F}_{in} = m\bar{a}$;

в) відцентрова сила $\bar{F}_{\omega} = m\omega^2 R$;

г) Коріолісова сила $\bar{F}_k = 2m\omega\bar{W}$.

До речі, у майбутньому швидкість будемо поділяти на такі складові:

а) абсолютна швидкість \bar{U} – це швидкість щодо поверхні Землі;

б) переносна швидкість \bar{u} – це швидкість стінок каналу чи бака, де перебуває рідина;

в) відносна швидкість \bar{W} – це швидкість рідини щодо стінок каналу чи бака, що рухаються.

Масові сили прийнято відносити до одиниці маси:

$$\bar{F}_{od} = \frac{\bar{F}}{m} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}, \quad (1.18)$$

де \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – проєкції одиничних масових сил на відповідні осі координат.

Відомо, що будь-яка масова сила є добутком маси на прискорення. Тому кількісно одинична масова сила дорівнює відносному прискоренню. Наприклад, якщо об'єм рідини перебуває лише в полі тяжіння, то на нього діє одинична масова сила $\bar{F}_{od} = \bar{g}$ ($\bar{F}_{od} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$; в даному випадку $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 0$, $\bar{Z} = -\bar{g}$) (рис. 1.13).

Поверхневі сили – це сили, що діють лише на поверхні об'єму, що розглядається. До поверхневих сил належать сили тиску \bar{P} та сили тертя \bar{T} .

Поверхневі сили безперервно розподілені по поверхні рідини, і якщо це зроблено рівномірно, то вони пропорційні площі поверхні.

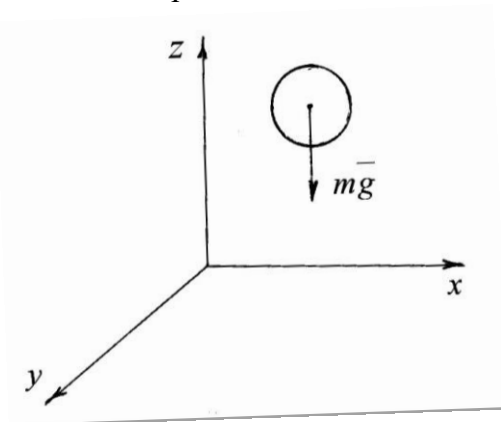


Рисунок 1.13 – Масова сила в полі тяжіння

Звичайно, поверхнева сила, що діє на поверхні, має напрямок під кутом, тому її можна розкласти на нормальну й дотичну складові (рис. 1.14).

Поверхневу силу, що діє нормально до будь-якої площадки, називають силою тиску \bar{P} .

Поверхневу силу, що діє по дотичній до будь-якої площадки, називають силою тертя \bar{T} .

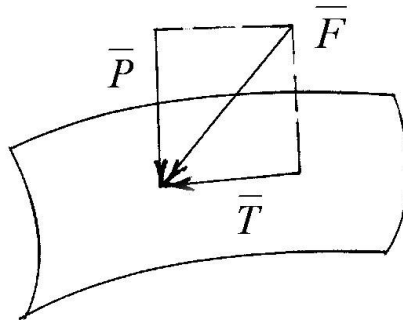


Рисунок 1.14 – Компоненти поверхневої сили

Поверхневі сили прийнято відносити до одиниці площі. Ці одиничні сили будемо називати напругою (нормальна й дотична напруги). Нормальну напругу (напругу сили тиску) називають гідромеханічним тиском (для стану спокою – гідростатичним тиском) і позначають \bar{p} ; дотичну напругу в рідині (напругу сили тертя) позначають $\bar{\tau}$:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{\bar{P}}{S}, \\ \bar{\tau} &= \frac{\bar{T}}{S}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Одиниці вимірювання нормальної й дотичної напруги – Па.

На рисунку 1.15 відображені напрямки дії нормальної й дотичної напруг.

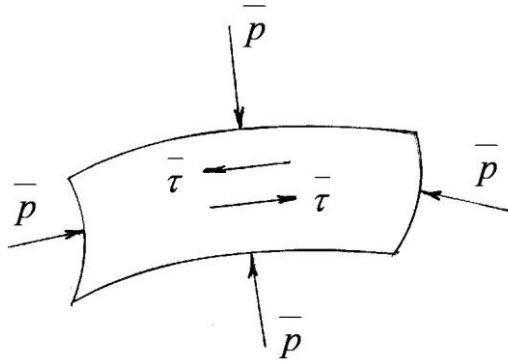


Рисунок 1.15 – Нормальні й дотичні напруги

Необхідно зауважити, що на рух матеріального тіла впливають лише зовнішні сили. Внутрішні сили не здатні змінити рух матеріального тіла – ні його напрямок, ні розмір швидкості. Тому в подальшому будемо враховувати лише зовнішні сили, що діють у рідині.

Контрольні питання до розділу 1

- 1 Предмет і методи гідравліки. Її місце серед інших наук.
- 2 Історія становлення й розвитку гідравліки. Характеристика гідравліки Галілеєм і Леонардо да Вінчі.
- 3 Рідина реальна та її моделі. Елементарний об'єм рідини.
- 4 Основні механічні характеристики рідини, їх фізичний зміст, розмірність і приклади величин.
- 5 Основні фізичні властивості реальної рідини.
- 6 Сили, що діють у рідині.

2 ГІДРОСТАТИКА

2.1 Гідростатичний тиск і його властивості. Закон Паскаля

Розглянемо довільний об'єм рідини V , що перебуває в стані спокою. Розітнемо цей об'єм довільною площиною S на дві частини – «А» і «В». Верхню частину «А» відкинемо, змінивши її дію на «В» рівнодійною поверхневою силою \bar{F} (рис. 2.1).

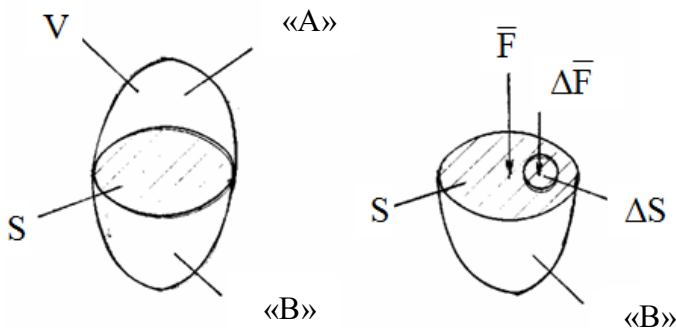


Рисунок 2.1 – До визначення гідростатичного тиску

Сила \bar{F} рівномірно діє на площу S , об'єм рідини перебуває в стані спокою (сила тертя дорівнює нулю), тому

$$p_{\text{сер}} = \frac{\bar{F}}{S}, \quad (2.1)$$

де $p_{\text{сер}}$ – середній гідростатичний тиск.

Тепер на площині S виділимо елементарну площу ΔS . На неї буде діяти лише частина рівнодійної сили $\Delta \bar{F}$. Відношення $\Delta \bar{F}$ до ΔS , коли ΔS наближається до нуля, називають гідростатичним тиском у точці:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S}. \quad (2.2)$$

Тобто гідростатичний тиск – це граничне значення поверхневої сили, що діє в статичній рідині на елемент площі.

Гідростатичний тиск має три основні властивості.

1 Гідростатичний тиск завжди спрямований по внутрішній нормалі до поверхні, на яку він діє. Тиск може діяти на площину лише під кутом 90° , оскільки інакше його можна було б розкласти на дві складові – нормальну й дотичну. Проте, як уже було зазначено, дотичні напруження можуть виникати в рідині лише під час руху. Тому гідростатичний тиск діє лише нормально до поверхні (рис. 2.2).

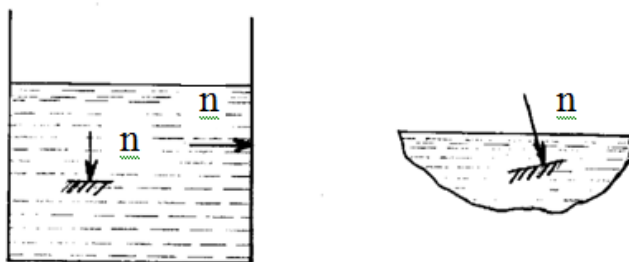


Рисунок 2.2 – Нормальні поверхні в рідині

Тиск може діяти лише по внутрішній нормалі; зовнішньої нормалі для рідини не може бути, оскільки вона майже не чинить опору зусиллям, що її розтягують. Тому гідростатичний тиск завжди викликає стискальні зусилля.

2 Гідростатичний тиск у будь-якій точці рідини є однаковим за всіма напрямками.

Для доведення цього положення розглянемо в рідині довільну точку O й навколо цієї точки виділимо елементарний об'єм рідини з гранями площиною dS_x, dS_y, dS_z, dS_n (рис. 2.3).

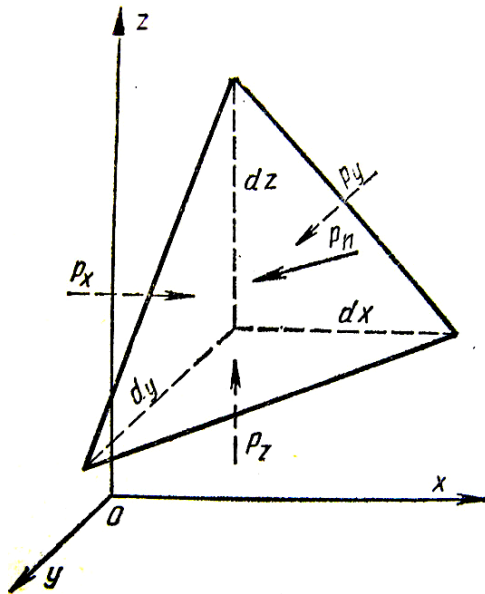


Рисунок 2.3 – До визначення гідростатичного тиску

На рисунку 2.3 p_x – гідростатичний тиск на поверхні dS_x ; p_y – гідростатичний тиск на поверхні dS_y ;

p_z – гідростатичний тиск на поверхні dS_z ; p_n – гідростатичний тиск на похилій поверхні dS_n .

Умова рівноваги цього об'єму такі:

$$\begin{cases} p_x dS_x - p_n \cos(n, x) dS_n = 0, \\ p_y dS_y - p_n \cos(n, y) dS_n = 0, \\ p_z dS_z - p_n \cos(n, z) dS_n = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} p_x dS_x = p_n \cos(n, x) dS_n, \\ p_y dS_y = p_n \cos(n, y) dS_n, \\ p_z dS_z = p_n \cos(n, z) dS_n. \end{cases}$$

З умови $dS_x = dS_y = dS_z = dS_n$.

Тоді

$$\begin{cases} p_x = p_n, \\ p_y = p_n, \\ p_z = p_n. \end{cases}$$

Тобто гідростатичний тиск у точці є однаковим за всіма напрямками.

Значення гідростатичного тиску визначається лише розміщенням певної точки в просторі, заповненому рідиною, тобто залежить від її координат: $p = f(x, y, z)$.

Тиск є скалярною величиною, тоді як сила тиску – це вектор. Одиниця вимірювання тиску – Па (н/м^2).

У техніці застосовують також іншу одиницю вимірювання тиску – технічну атмосферу (ат):

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98\,100 \text{ Н/м}^2 = 98\,100 \text{ Па} = 98,1 \text{ кПа} \approx 0,1 \text{ МПа}.$$

Із властивостей гідростатичного тиску випливає відомий закон Паскаля: гідростатичний тиск передається в усі точки рідини й по всіх напрямках без змін.

Нехай на поверхні рідини створили тиск p_0 . Тиск p_0 передається в усі точки об'єму (наприклад: точки 1, 2, 3, ..., 7) без зміни (рис. 2.4).

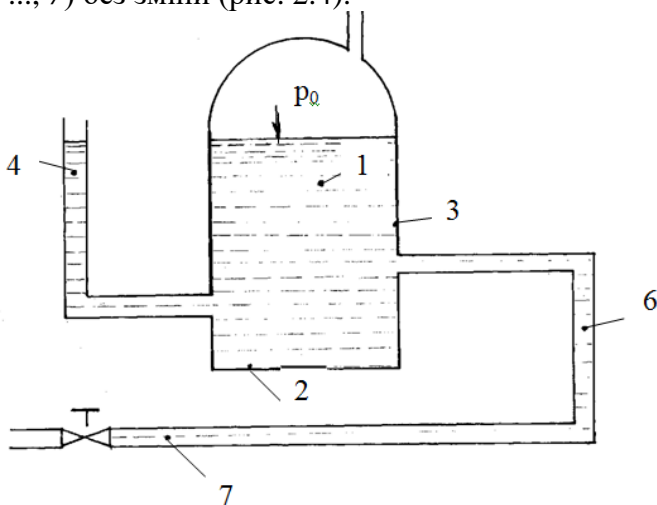


Рисунок 2.4 – До визначення закону Паскаля

Закон Паскаля широко застосовують у техніці для проєктування гідравлічних пристроїв (гідравлічні преси, гальма, підйомники (домкрати), гідроаккумулятори).

Існують інші варіанти формулювання закону Паскаля:

а) тиск, що передається на вільну поверхню рідини будь-якими зовнішніми силами, які не порушують рівноваги, передається без зміни в усі точки рідкого об'єму, збільшуючи на одну й ту саму величину тиск, що раніше існував у кожній точці рідини;

б) тиск, який чиниться на рідину, що перебуває в закритому об'ємі, передається рівномірно в усіх напрямках.

2.2 Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера)

Розглянемо в рідині, що перебуває в стані спокою, довільну точку A й навколо цієї точки виділимо елементарний паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz (рис. 2.5).

Тиск у точці $A(x, y, z)$ дорівнює p . Ураховуючи властивості гідростатичного тиску ($p = f(x, y, z)$), для точки M із координатами $\left(x - \frac{1}{2}dx, y, z\right)$ і точки N із координатами $\left(x + \frac{1}{2}dx, y, z\right)$ тиск буде відрізняться від p :

$$p_M = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx,$$

$$p_N = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx.$$

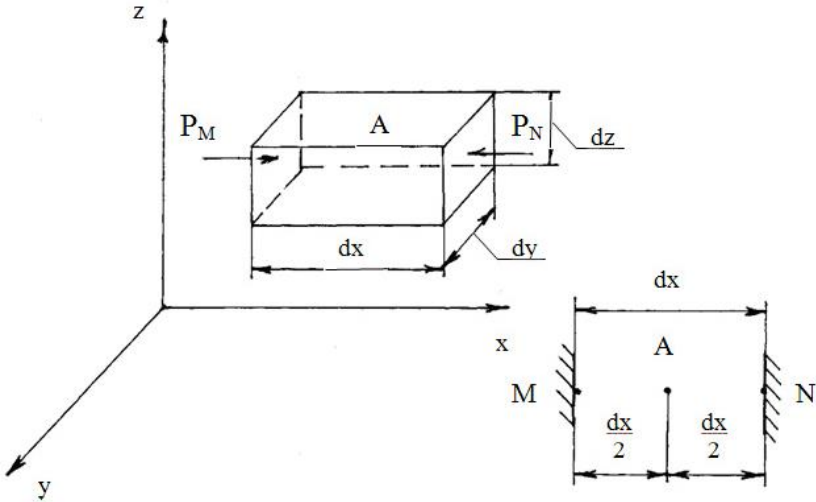


Рисунок 2.5 – До визначення рівняння Ейлера

Тоді на ліву грань паралелепіпеда діє сила

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz ,$$

а на праву грань діє сила

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz .$$

Крім того, в напрямку осі OX діє проекція
одиначної масової сили X :

$$Xdm = X \rho dx dy dz .$$

Запишемо умову рівноваги виділеного об'єму на вісь OX :

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz + X \rho dx dy dz = 0.$$

Розкриваючи дужки, одержимо

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} dy \cdot dz + X \rho dx dy dz = 0.$$

Перетворюючи, одержимо

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

За аналогією можна записати й рівняння для осей OY і OZ . Тоді одержимо диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера):

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Оскільки всі сили рівняння (2.3) віднесені до маси, кожен член рівняння має розмірність прискорення в м/с². Кожне рівняння (2.3) характеризує зміну тиску, якщо змінюється одна з координат.

Фізичний зміст членів рівняння Ейлера – це баланс масових і поверхневих сил. У цьому разі поверхневі сили – це сили гідростатичного тиску (рідина перебуває в стані спокою).

Якщо врахувати, що повна масова сила \bar{F} , що діє на виділений елементарний об'єм, дорівнює

$$\bar{F} = \bar{X}_i + \bar{Y}_i + \bar{Z}_i,$$

а $gradp$ дорівнює

$$gradp = \frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k},$$

то у векторній формі рівняння Ейлера матиме вигляд

$$\bar{F} = \frac{1}{\rho} gradp = 0. \quad (2.4)$$

Щоб установити закономірності зміни тиску в разі зміни кількох координат, необхідно розглянути рівняння Ейлера сумісно для трьох осей координат. Тому помножимо кожне рівняння (2.3) на dx, dy, dz відповідно й потім складемо ці рівняння:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right).$$

Тоді

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} dp,$$

або

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.5)$$

Ліва частина рівняння (2.5) є повним диференціалом тиску, тому права частина рівняння є теж повним диференціалом потенціальної функції. Нехай це буде функція $u = u(x, y, z)$, частинні похідні від якої по осях x, y, z будуть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z,$$

або

$$du = \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.6)$$

Тобто нестислива рідина може перебувати в стані спокою лише в разі, якщо на неї діють масові сили, що мають потенціал.

Після інтегрування рівняння (2.6) одержуємо

$$u = \frac{1}{\rho} p + c, \quad (2.7)$$

де c – стала інтегрування ($c = const$).

Для визначення c розглянемо точку рідини, для якої відомі значення p і u :

$$p = p_0, u = u_0.$$

Для цієї точки рівняння (2.7) матиме вигляд

$$u_0 = \frac{1}{\rho} p_0 + c,$$

звідси

$$c = u_0 - \frac{1}{\rho} p_0. \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) в (2.7), одержуємо

$$u - u_0 = \frac{1}{\rho} (p - p_0), \quad (2.9)$$

$$p = p_0 + \rho (u - u_0). \quad (2.10)$$

Тобто зміна тиску в рідині точно відстежує зміну потенціалу (зміну силової функції).

2.3 Основні рівняння гідростатики

На практиці найчастіше рідина перебуває в полі сил тяжіння.

Якщо з масових сил (сили інерції, відцентрова, Коріолісова, тяжіння) в умовах абсолютного спокою буде діяти лише сила тяжіння, то

$$X = 0, Y = 0, Z = -g.$$

Підставляючи X, Y, Z у рівняння (2.5), одержуємо

$$-gdz = \frac{1}{\rho} dp.$$

Тоді

$$dp = -\rho g dz.$$

Після інтегрування одержуємо

$$p = -\rho g z + c,$$

або

$$p = -\gamma z + c, \quad (2.11)$$

де c – стала інтегрування ($c = \text{const}$).

Для визначення c розглянемо точку на поверхні рідини, де $z = z_0$ і $p = p_0$ (рис. 2.6).

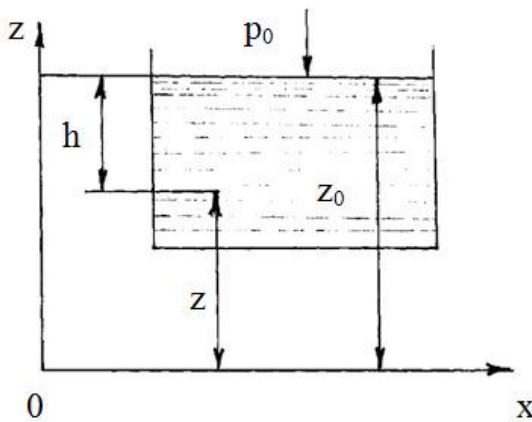


Рисунок 2.6 – До визначення основного рівняння гідростатики

Тоді рівняння (2.11) матиме вигляд

$$p_0 = -\gamma z_0 + c.$$

Звідси

$$c = p_0 + \gamma z_0. \quad (2.12)$$

Підставляючи (2.12) в (2.11), одержуємо

$$p = -\gamma z + p_0 + \gamma z_0. \quad (2.13)$$

Можливі два варіанти перетворення рівняння (2.13).

Перший варіант

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \text{const},$$

або

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}. \quad (2.14)$$

Другий варіант

$$p - p_0 = \gamma(z_0 - z),$$

або

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z).$$

Якщо $z_0 - z = h$ (див. рис. 2.6), то

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (2.15)$$

Рівняння (2.14) і (2.15) мають різний фізичний зміст.

Розглянемо фізичний зміст рівняння (2.14).

Відомо, що потенціальна енергія

$$E_n = mgz.$$

Якщо визначити потенціальну енергію одиниці ваги, матимемо

$$\frac{E_n}{G} = \frac{mgz}{mg} = z.$$

Тобто z – це питома потенціальна енергія, яку має одинична вага рідини, або це потенціальна енергія положення.

Фізичний зміст $\frac{p}{\gamma}$ – це питома потенціальна енергія тиску.

Отже, рівняння (2.14) показує, що в рідині, яка перебуває в стані абсолютного спокою і лише під дією сили тяжіння, для кожної точки об'єму сума потенціальної енергії положення й потенціальної енергії тиску залишається сталою величиною.

Розглянемо фізичний зміст рівняння (2.15). Тиск p у будь-якій точці дорівнює тиску p_0 у відомій точці та доданій до нього величині γh . Тоді зміна тиску відбувається лінійно ($y = a + bx$ – лінійна функція). Тобто зі збільшенням глибини розміщення точки в рідині h гідростатичний тиск збільшується лінійно (рис. 2.7).

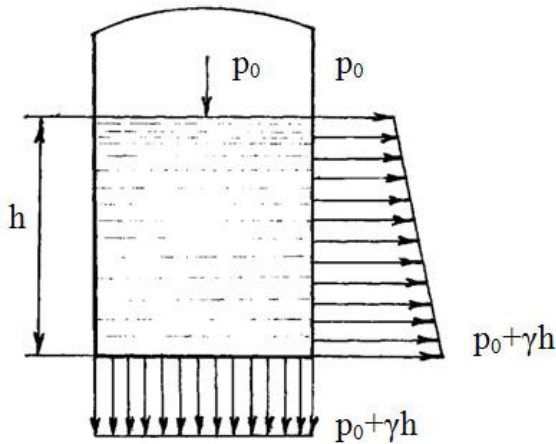


Рисунок 2.7

Тоді рівняння (2.15) є аналітичним записом закону Паскаля – закону зміни гідростатичного тиску в рідині за умови $\rho = const$.

Рівняння (2.14) і (2.15) – основні рівняння гідростатики.

2.4 Основні види тиску

Будемо розрізняти такі види тиску: атмосферний тиск P_{at} , абсолютний тиск P_{abs} , надлишковий, або манометричний, тиск P_m , тиск вакууму, або вакуумметричний, тиск P_{vak} .

На рисунку 2.8 схематично зображені всі зазначені види тиску.

Абсолютний тиск – це повний тиск у точці.

Надлишковий, або манометричний, тиск – це тиск, доданий до атмосферного.

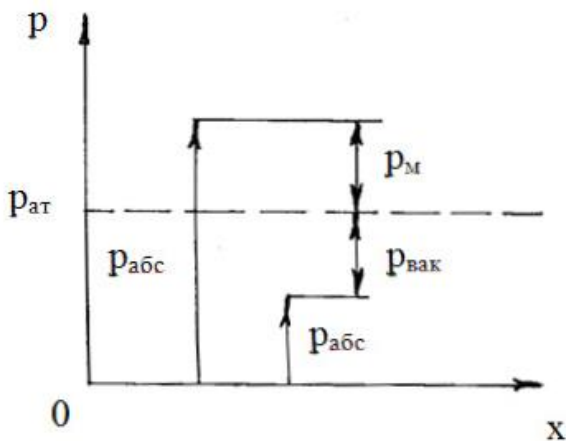


Рисунок 2.8 – Основні види тиску

Тиск вакууму (вакуумметричний тиск) – це тиск, якого не вистачає до атмосферного. Звідси абсолютний тиск у точці може бути як більшим від атмосферного, так і меншим. Для першого прикладу $P_{абс} = P_{ат} + P_m$, для другого – $P_{абс} = P_{ат} - P_{вак}$.

На практиці для вимірювання тиску застосовують манометри таких видів:

- а) манометри абсолютного тиску;
- б) манометри для вимірювання атмосферного тиску (барометри);
- в) манометри для вимірювання вакууму (вакуумметри);
- г) манометри для вимірювання різниці тиску у двох або в багатьох точках (диференціальні манометри).

За точністю вимірювання манометри поділяють на зразкові й технічні. Точність вимірювання зразкових манометрів набагато вища від точності технічних манометрів. Але на практиці технічні манометри використовують частіше внаслідок того, що зазвичай

забезпечуваної ними точності досить для проведення необхідних вимірювань.

За принципом дії манометри поділяють на рідинні й механічні. До рідинних манометрів належать U-подібні та чашкові манометри, до механічних – пружинні та мембранні.

2.5 Характерні площини в рідині, що перебуває в стані спокою

На рисунку 2.9 $O' - O'$ – площина порівняння; z , z_0 , z_1 , z_2 – відстані до площини порівняння.

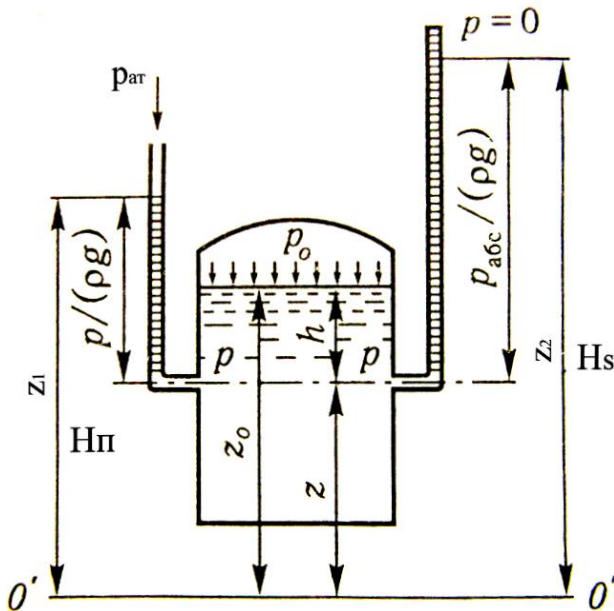


Рисунок 2.9 – До визначення гідростатичного і п'єзометричного напорів

Приєднаємо до стінки резервуара на висоті z над площиною порівняння $O' - O'$ відкриту й закриту зверху трубки. Із закритої трубки викачаємо повітря. Під дією тиску рідина в трубках підніметься на висоту z_1 і z_2 відповідно.

Складемо основні рівняння гідростатики для рідини в закритій і відкритій трубках:

а) для рідини в закритій трубці

$$\frac{P_{abc}}{\rho g} + z = 0 + z_2.$$

Тоді висота тиску або висота підняття рідини в закритій трубці, з якої викачане повітря,

$$\frac{P_{abc}}{\rho g} + z = z_2 - z; \quad (2.16)$$

б) для рідини у відкритій трубці

$$\frac{P_{abc}}{\rho g} + z = \frac{P_{am}}{\rho g} + z_1.$$

Тоді висота тиску або висота підняття у відкритій трубці

$$\frac{P_{abc} - P_{am}}{\rho g} = z_1 - z. \quad (2.17)$$

Висоту підняття рідини, що відповідає даному тиску, називають п'єзометричною висотою. П'єзометричну висоту (2.16), що відповідає абсолютному тиску в точці, будемо називати абсолютною п'єзометричною висотою. П'єзометричну висоту (2.17), що відповідає надлишковому тиску в точці, будемо називати п'єзометричною висотою, а саму відкриту трубку – п'єзометром.

Позначимо п'єзометричну висоту h_n , тоді

$$z_1 - z = h_n. \quad (2.18)$$

Суму відмітки точки z і п'єзометричної висоти h_n називають п'єзометричним напором H_n :

$$z + h_n = z + \frac{P_i}{\rho g} = H_n. \quad (2.19)$$

Для всіх точок рідини, що перебуває в стані спокою, п'єзометричний напір є сталою величиною згідно з (2.14):

$$z + \frac{P}{\rho g} = \text{const},$$

або

$$H_n = \text{const}.$$

Поверхні рідини, в кожній точці яких гідростатичний тиск однаковий, називають поверхнями рівного тиску.

Для поверхні рівного тиску

$$dp = 0,$$

тоді

$$dp + \gamma dz = 0,$$

або

$$dz = 0,$$

тобто

$$z = \text{const}.$$

Тоді для рідини, що перебуває лише під дією сили тяжіння (в полі сили тяжіння), поверхні рівного тиску – це горизонтальні поверхні.

Суму відмітки точки z та абсолютної п'езометричної висоти $P_{\text{абс}} / \rho g$ називають гідростатичним напором H_s :

$$H_s = z + \frac{P_{\text{абс}}}{\rho g},$$

або

$$H_s = z + \frac{P_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{P_n}{\rho g}. \quad (2.20)$$

Фізичний зміст складових гідростатичного та п'езометричного напорів:

z – питома енергія положення;

$\frac{P_n}{\rho g}$ – питома енергія надлишкового тиску;

$\frac{P_{\text{абс}}}{\rho g}$ – питома енергія абсолютного тиску.

Тобто:

а) п'езометричний напір H_n є сумою питомої енергії положення й надлишкового тиску даної поверхні рідини;

б) гідростатичний напір H_s є сумою питомої енергії положення та абсолютного тиску для даної поверхні рідини.

Розглянемо, що таке різниця гідростатичного та п'езометричного напорів:

$$\begin{aligned} H_s - H_n &= \left(z + \frac{P_{abc}}{\rho g} \right) - \left(z + \frac{P_n}{\rho g} \right) = \\ &= z + \frac{P_{am}}{\rho g} + \frac{P_n}{\rho g} - z - \frac{P_n}{\rho g} = \frac{P_{am}}{\rho g}. \end{aligned}$$

Тобто різниця гідростатичного H_s і п'езометричного H_n напорів є питомою енергією атмосферного тиску.

2.6 Закон розподілу тиску в газах

Закон розподілу тиску в газах залежить від висоти стовпа газу.

Так, за умови малої висоти стовпа газу можна взяти густину, незмінну за величиною ($\rho = const$). Тоді

$$dp = \rho du = \rho(gdz) = \gamma dz.$$

Після інтегрування одержуємо

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (2.21)$$

За умови великих висот стовпа (сотні й тисячі метрів) густина не є сталою величиною ($\rho \neq const$) і залежить від тиску p й температури T ($\rho = f(p, T)$).

У разі ізотермічної атмосфери ($T = const$) згідно із законом Бойля – Маріотта

$$\rho V = const .$$

Тоді

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0} ,$$

звідси

$$\gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0} .$$

Тоді

$$dp = \gamma dz = \gamma_0 \frac{p}{p_0} dz ,$$

звідси

$$dz = \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{dp}{p} .$$

Після інтегрування одержуємо

$$\begin{aligned} z &= \frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} (\ln p_0 - \ln p) = \\ &= \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p} = h_0 \ln \frac{p_0}{p} = \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)^{h_0} , \quad (2.22) \end{aligned}$$

звідси

$$e^z = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{h_0},$$

або

$$e^{\frac{z}{h_0}} = \frac{p_0}{p}.$$

Тоді

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{z}{h_0}}. \quad (2.23)$$

Раніше в (2.22) було знайдено, що

$$z = h_0 \ln \frac{p_0}{p}.$$

Тоді для двох різних висот z_1 і z_2 можна скласти рівняння

$$\begin{aligned} z_1 &= h_0 \ln \frac{p_0}{p_1}, \\ z_2 &= h_0 \ln \frac{p_0}{p_2}. \end{aligned}$$

Звідси одержимо

$$z_1 - z_2 = h_0 \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.24)$$

Рівняння (2.24) називають барометричною формулою й використовують для визначення різниці висот за відомими тисками на цих висотах.

Позначимо різницю $(z_2 - z_1)$ через h , тоді рівняння (2.24) можна записати як

$$p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{h}{h_0}}. \quad (2.25)$$

Тобто на малих висотах поблизу поверхні Землі тиск у газах розподілений лінійно, на великих висотах (сотні й тисячі метрів від поверхні Землі) тиск у газах розподілений еквіпотенціально (рис. 2.10).

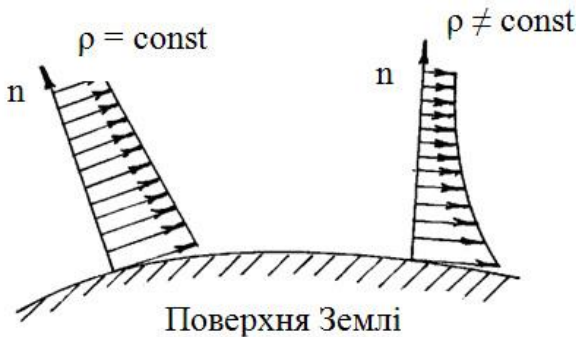


Рисунок 2.10 – Розподіл тиску у газах

2.7 Відносний спокій рідини

Якщо на рідину, що міститься в резервуарі, діють, крім сил тяжіння, ще й деякі інші масові сили, то такий стан рідини називають відносним спокоєм.

Розглянемо деякі приклади:

а) рідина міститься в цистерні (бензобаку), що рухається горизонтально з прискоренням \bar{a} (рис. 2.11).

Необхідно врахувати, що на цистерну діє сила \bar{F} із прискоренням \bar{a} ($\bar{F} = m\bar{a}$), а на рідину діє сила інерції \bar{F}_{in} із прискоренням мінус \bar{a} ($\bar{F}_{in} = -m\bar{a}$). Тоді на рідину діють одиничні сили $X = -a$, $Y = 0$, $Z = -g$.

Складемо диференціальне рівняння рівноваги рідини в цистерні.

Відомо, що $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$, на вільній поверхні рідини $-dp = 0$. Тоді

$$-adx - g dz = 0. \quad (2.26)$$

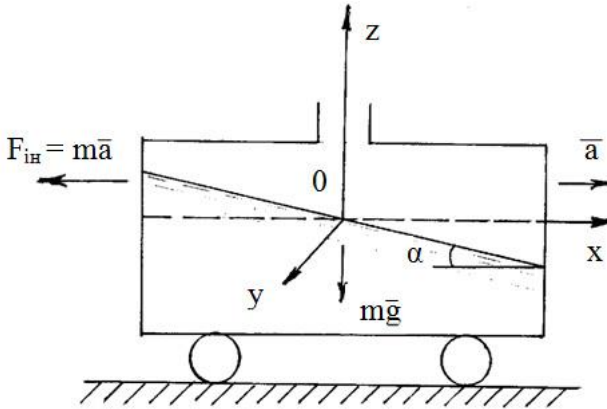


Рисунок 2.11 – Відносний спокій рідини за прямолінійного руху

Після інтегрування одержуємо

$$-ax - gz = c.$$

Для вільної поверхні $x = 0$, $z = 0$. Тоді

$$-ax - gz = 0,$$

звідси

$$z = -\frac{a}{g}x. \quad (2.27)$$

Рівняння (2.27) показує, що вільна поверхня рідини в цистерні є площиною з кутом нахилу $\alpha = \arctg(-a/g)$. Якщо $x > 0$, то $z < 0$ і навпаки: якщо $x < 0$, то $z > 0$. Тобто під час зменшення швидкості руху вільна поверхня рідини буде нахилена в протилежний бік.

Розглянемо розподіл тиску в рідині в цистерні:

$$dp = -\rho a dx - \rho g dz.$$

Після інтегрування одержуємо

$$p = -\rho ax - \rho gz + c. \quad (2.28)$$

Якщо $x = x_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, то

$$p_0 = -\rho ax_0 - \rho gz_0 + c.$$

Звідси

$$c = p_0 + \rho ax_0 + \rho gz_0. \quad (2.29)$$

Підставляючи (2.29) у (2.28), одержимо

$$p = p_0 + \rho a(x_0 - x) + \rho g(z_0 - z). \quad (2.30)$$

Рівняння поверхонь рівного тиску має вигляд

$$\rho a(x_0 - x) + \rho g(z_0 - z) = \text{const}; \quad (2.31)$$

б) резервуар із рідиною рухається з прискоренням \bar{a} у вертикальному напрямку.

У цьому разі на рідину діють сила тяжіння $\bar{G} = m\bar{g}$ і сила інерції $\bar{F}_{in} = -m\bar{a}$. Проекції на осі координат рівнодійної сили будуть $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -a - g$ (рис. 2.12).

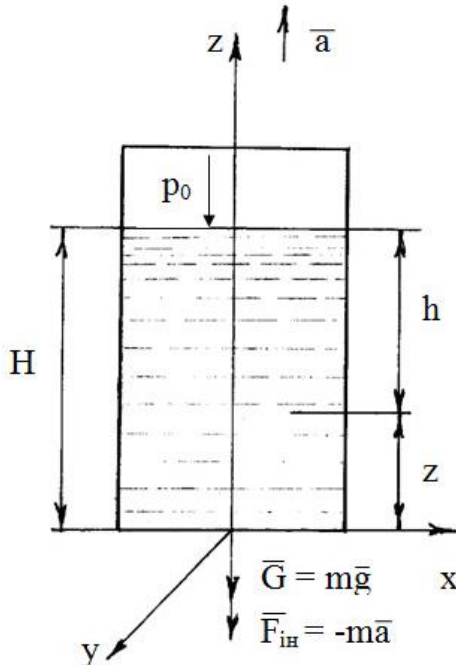


Рисунок 2.12 – Відносний спокій рідини за вертикального руху

У цьому разі на рідину діють сила тяжіння $\bar{G} = m\bar{g}$ і сила інерції $\bar{F}_{in} = -m\bar{a}$. Проекції на осі координат рівнодійної сили – $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -a - g$. Тоді диференціальне рівняння розподілу тиску в рідині набирає вигляду

$$dp = -\rho(a + g) dz .$$

Після інтегрування одержуємо

$$p = -\rho(a + g)z + c .$$

Якщо $z = H$, $p = p_0$, то

$$p_0 = -\rho(a + g)H + c .$$

Звідси

$$c = p_0 + \rho(a + g)H ,$$

тоді

$$p = -\rho(a + g)z + p_0 + \rho(a + g)H .$$

Остаточно

$$p = p_0 + \rho(a + g)(H - z) . \quad (2.32)$$

Якщо $H - z = h$, можна записати

$$p = p_0 + \rho(a + g)h . \quad (2.33)$$

Проаналізуємо вираз (2.33):

1) якщо $a = 0$, то $p = p_0 + \rho gh$ (h – глибина занурення щодо вільної поверхні);

2) якщо $a < 0$, то $p = p_0 + \rho(g - a)h$;

3) якщо $a = -g$, то $p = p_0$. Це приклад, коли вага відсутня (невагомість).

Для поверхонь рівного тиску

$$p = p_0 + \rho(a + g)h = \text{const}.$$

Тобто

$$H - z = \text{const},$$

або

$$z = \text{const};$$

в) рідина міститься в циліндрі, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω (рис. 2.13).

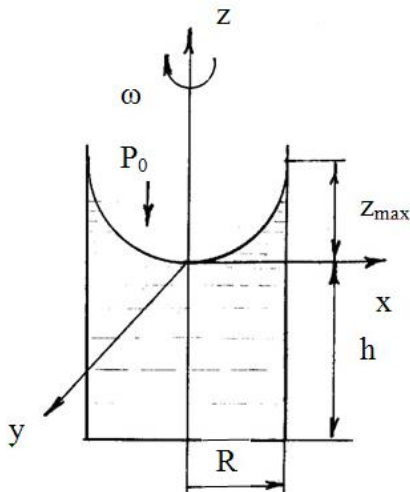


Рисунок 2.13 – Відносний спокій рідини за обертального руху

У цьому разі на рідину діють відцентрова сила інерції та сила тяжіння. Тому $X = \omega^2 x$, $Y = \omega^2 y$, $Z = -g$. Диференціальне рівняння рівноваги рідини

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Для цього прикладу

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz),$$

або

$$dp = \rho\omega^2(xdx + ydy) - \rho g dz.$$

Після інтегрування одержуємо

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + c.$$

Якщо $(x^2 + y^2) = r^2$, $\rho g = \gamma$, то

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + c.$$

У разі якщо $x = y = z = 0$, $p = p_0$, то одержуємо

$$c = p_0.$$

Тоді

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz.$$

Ураховуючи, що $x^2 + y^2 = r^2$, $\rho g = \gamma$, $z = -h$, одержуємо

$$p = p_0 + \gamma h + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}. \quad (2.34)$$

Рівняння вільної поверхні рідини в циліндрі як поверхні однакового тиску набирає вигляду

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Після інтегрування одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = c,$$

або

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = c. \quad (2.35)$$

Тобто в цьому разі поверхня однакового тиску є параболоїдом обертання.

На вільній поверхні $c = 0$, тоді

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} = gz,$$

або

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (2.36)$$

Максимальне підвищення рідини в циліндрі буде за умови, якщо $r = R$, тоді

$$z_{\max} = \frac{\omega^2 R^2}{2g}. \quad (2.37)$$

У цьому разі тиск на стінки циліндра

$$p = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2} + \gamma h. \quad (2.38)$$

Якщо вісь обертання горизонтальна, на рідину будуть діяти сили $Z = 0$, $X = \omega^2 x$, $Y = \omega^2 y$. Тоді тиск на стінки циліндра

$$p = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2}, \quad (2.39)$$

або

$$p = \gamma \frac{\omega^2 R^2}{2g}. \quad (2.40)$$

За умови значних швидкостей обертання циліндра тиск на його стінки дуже великий. Цей ефект використовують у фрикційних муфтах, де для з'єднання необхідно забезпечити значні сили нормального тиску, та в технологічному процесі відцентрового лиття.

2.8 Сила тиску рідини на плоскі поверхні

Визначення сили тиску рідини на плоску поверхню (стінку, заглушку тощо) має велике практичне значення, оскільки під час розрахунків має значення не лише тиск в окремих точках, а й сила тиску на споруду чи її частину.

Розглянемо визначення сили тиску на плоску стінку довільної форми, що утворює із горизонтом кут α . Рідина тисне на поверхню із площею S в усіх точках, але цей тиск нерівномірний. У верхніх точках тиск менший, у нижніх – більший. Необхідно визначити силу абсолютного гідростатичного тиску та знайти точку її прикладення (центр тиску) (рис. 2.14).

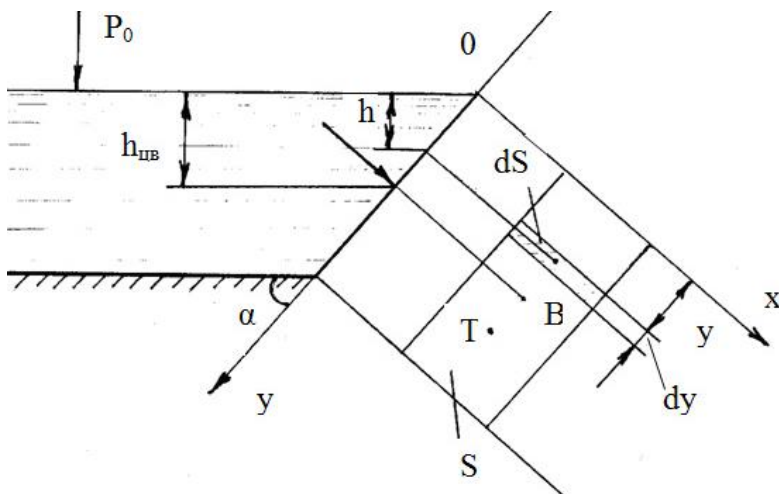


Рисунок 2.14 – До визначення сили тиску на плоску стінку

Для того щоб знайти рівнодійну силу тиску на плоску стінку, необхідно обчислити силу тиску dF на елементарну площадку з площею dS , занурену на глибину h , а потім цей вираз проінтегрувати по всій площі S .

Сила абсолютного гідростатичного тиску діє по нормалі до стінки поверхні (основна властивість гідростатичного тиску) й дорівнює $p_{аб} = p_0 + \gamma h$. Тоді елементарну силу гідростатичного тиску dF на площу dS визначають як тиск у точці, помножений на площу площадки:

$$dF = p dS,$$

або

$$dF = p_0 dS + \gamma h dS.$$

Якщо $h = y \sin \alpha$ (рис. 2.14), то

$$dF = p_0 dS + \gamma y \sin \alpha dS.$$

Після інтегрування по всій площі одержуємо

$$F = p_0 \int_S dS + \gamma \sin \alpha \int_S y dS,$$

або

$$F = p_0 S + \gamma \sin \alpha \int_S y dS.$$

Вираз $\int_S y dS$ є статичним моментом I_x площі S щодо осі OX . Статичний момент визначають як добуток відстані від центра ваги $y_{цв}$ на площу поверхні S :

$$\int_S y dS = y_{цв} \cdot S.$$

Тоді

$$F = p_0 S + \gamma \sin \alpha y_{цв} S.$$

Вираз $y_{цв} \cdot \sin \alpha$ є глибиною занурення центра ваги плоскої поверхні $h_{цв}$. З урахуванням цього рівнодійна сила

$$F = p_0 S + \gamma h_{цв} \cdot S, \quad (2.41)$$

або

$$F = (p_0 + \gamma h_{цв}) S.$$

Тобто силу тиску рідини на плоску поверхню визначають як тиск у центрі ваги плоскої поверхні, помножений на площу змоченої поверхні.

Із виразу (2.41) випливає, що сила тиску рідини F складається із сили F_0 від зовнішнього тиску p_0 (не залежить від h) і сили F_n від надлишкового тиску p_n (залежить від h). Для розрахунків важливо знати силу від надлишкового тиску F_n , оскільки найчастіше зовнішній тиск p_0 дорівнює атмосферному, і сила F_0 врівноважується (атмосферний тиск, що діє на стінки з одного боку, врівноважується атмосферним тиском, що діє на стінки з іншого боку):

$$F_n = \gamma h_{цв} \cdot S. \quad (2.42)$$

Для визначення точки прикладення сили тиску F_n – центра тиску $y_{цт}$, скористаємося принципом, згідно з яким момент рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил:

$$F_n \cdot y_{cm} = \int_S y dF_n .$$

З урахуванням виразу (2.42)

$$F_n \cdot y_{cm} = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot y_{цг} \cdot S \cdot y_{cm} ,$$

тоді

$$F_n \cdot y_{cm} = \gamma \sin \alpha \int_S y^2 dS .$$

Звідси

$$y_{cm} = \frac{\gamma \sin \alpha \int_S y^2 dS}{\gamma \sin \alpha y_{цг} S} = \frac{\int_S y^2 dS}{y_{цг} S} .$$

Вираз $\int_S y^2 dS$ є моментом інерції I_x площі щодо осі OX .

Тоді

$$y_{cm} = \frac{I_x}{y_{цг} S} . \quad (2.43)$$

Із механіки відомо, що між моментом інерції I_x і центральним моментом інерції I_0 (моментом інерції щодо осі, що проходить через центр ваги плоскої стінки) існує такий зв'язок:

$$I_x = I_0 + y_{цг}^2 S ,$$

тоді

$$y_{цт} = \frac{I_0}{y_{цв} S} + y_{цв} . \quad (2.44)$$

Тобто центр тиску розміщений нижче від центра ваги на величину $I_0 / (y_{цв} S)$.

Якщо тиск p_0 дорівнює атмосферному й діє з обох боків стінки, то центр ваги буде й центром тиску.

Якщо тиск p_0 більший від атмосферного, то центр тиску обчислюють за правилами механіки як точку прикладення рівнодійної сил F_n і F_0 . У цьому разі чим більша сила F_0 щодо сили F_n , тим ближчий центр тиску до центра ваги.

Якщо плоска поверхня має форму прямокутника й одна сторона цього прямокутника збігається з вільною поверхнею рідини, епюра розподілу тиску рідини на стінку є прямокутним трикутником. Центр ваги трикутника знаходиться на відстані $\frac{1}{3}$ його висоти b , тому центр тиску

рідини на поверхню знаходиться теж на відстані $\frac{1}{3} b$

(рис. 2.15).

На практиці дуже часто виникає необхідність визначення сили тиску рідини на плоскі поверхні, наприклад, на стінки поршнів гідравлічних машин і приладів.

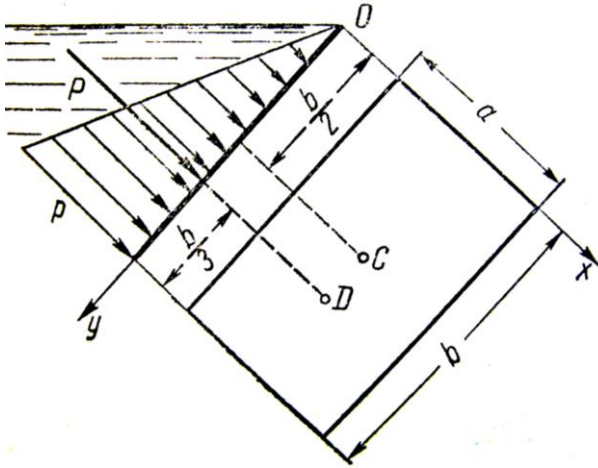


Рисунок 2.15 – Центр ваги і центр тиску

Тиск p_0 зазвичай дуже високий, тобто центр тиску можна вважати таким, що збігається з центром ваги стінки.

2.9 Сила тиску на плоске дно резервуара. Гідростатичний парадокс

Розглянемо приклад, коли плоска поверхня, на яку тисне рідина, розміщена горизонтально (рис. 2.16).

Сила тиску F у цьому прикладі

$$F = (p_0 + \gamma h_{цв}) S$$

Ураховуючи, що в цьому прикладі $h_{цв}$ дорівнює H , одержуємо

$$F = (p_0 + \gamma H) S. \quad (2.45)$$

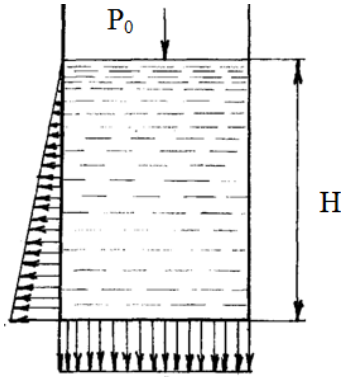


Рисунок 2.16 – Розподіл тиску стінками резервуара

Тобто сила тиску на плоске дно не залежить від форми стінок резервуара, а залежить лише від висоти гідростатичного напору H і площі дна S .

На рисунку 2.17 зображені резервуари різної форми, але з однаковою площею дна й висотою гідростатичного напору ($H_1 = H_2 = H_3 = H_4$; $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$).

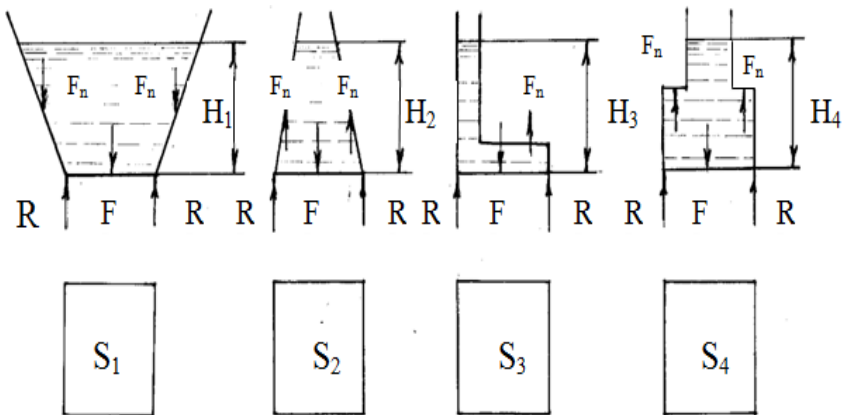


Рисунок 2.17 – Гідростатичний парадокс

Для всіх резервуарів, зображених на рисунку 2.17, сила тиску на дно резервуара буде однаковою (згідно з рівнянням (2.45)). Однак вага рідини в резервуарах буде різною. Таке явище називають гідростатичним парадоксом.

Необхідно розрізнити дві сили – силу тиску рідини на дно резервуара й силу тиску dna резервуара на опору (вага рідини в резервуарі). Різниця між силами тиску на дно резервуара F і реакціями опор R урівноважується вертикальними складовими сил тиску F_n на плоскі стінки резервуарів.

2.10 Сила тиску рідини на криволінійну поверхню

Під час визначення сили тиску рідини на криволінійну поверхню точка прикладення цієї сили та її напрям заздалегідь невідомі, оскільки в кожній точці тиск буде перпендикулярним (нормальним) до цієї поверхні.

Для криволінійних поверхонь елементарні сили тиску, залишаючись нормальними щодо відповідної площадки, вже не будуть паралельними між собою. Загалом вони утворюють систему сил, як заведено розміщених у просторі, розрахунок їх зводиться до визначення головного вектора сил. Тому для визначення сили тиску на криволінійну поверхню насамперед необхідно визначити три її складові, паралельні координатним осям.

На практиці криволінійні поверхні часто є циліндричними. У цьому разі доцільно розмістити систему координат так, щоб вісь OY була паралельною твірній циліндричної поверхні.

Розглянемо довільну криволінійну поверхню $ABCD$ нескінченно малої товщини, на яку з двох боків діє рідина, і виділимо елементарну площадку dS (рис. 2.18).

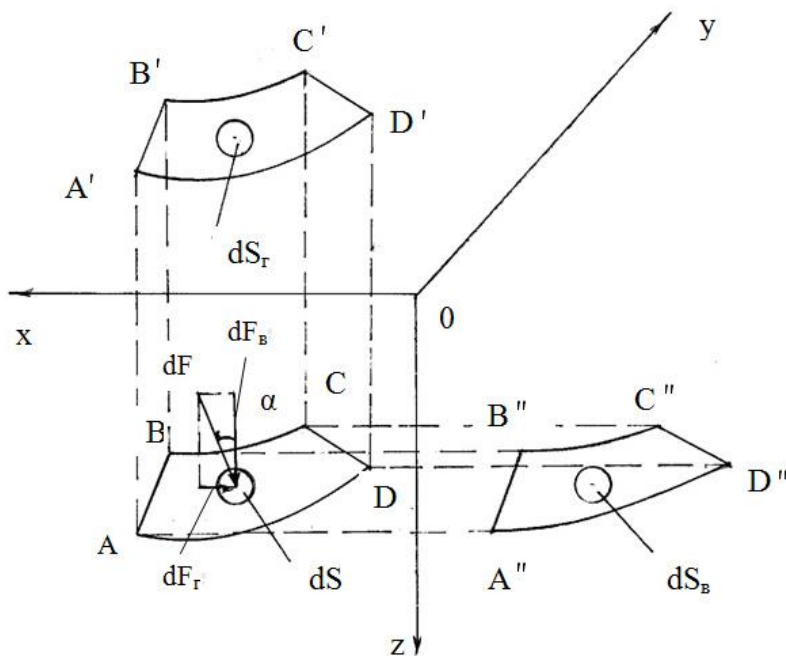


Рисунок 2.18 – До визначення сили тиску на криволінійну поверхню

Надлишковий тиск у точці на площадці dS

$$p = \gamma h,$$

де h – глибина занурення точки, розміщеної в центрі площадки, яку відкладено від п'езометричної площини.

Сила тиску на елементарну площадку

$$dF = \gamma h dS.$$

Розкладаючи тиск, спрямований по нормалі до поверхні стінки, на складові, одержимо

$$dF_z = dF \cdot \sin \alpha = \gamma h dS_g,$$

$$dF_g = dF \cdot \cos \alpha = \gamma h dS_z.$$

Інтегруючи по всій поверхні криволінійної стінки, одержуємо

$$F_g = \gamma \int_S h dS_z,$$

$$F_z = \gamma \int_S h dS_g.$$

Вираз $h dS_z$ є об'ємом вертикального стовпця рідини висотою h , що спирається на площадку dS_z . Інтеграл цього виразу є об'ємом усього вертикального стовпця рідини, який спирається на криволінійну поверхню та обмежується п'єзометричною площиною. Такий стовпець називають тілом тиску. Тому

$$F_g = \gamma V_{mm}, \quad (2.46)$$

де V_{mm} – об'єм тіла тиску.

Вираз $\int_S h dS_g$ дорівнює добутку проєкції площі криволінійної поверхні S_g на глибину занурення центра ваги цієї проєкції $h_{цв}$. Тобто

$$F_z = \gamma h_{цв} S_g. \quad (2.47)$$

Рівнодійна сила тиску

$$F = \sqrt{F_z^2 + F_g^2} . \quad (2.48)$$

Для практичних розрахунків важливо вміти визначати тіло тиску. На рисунку 2.19 наведені деякі характерні випадки.

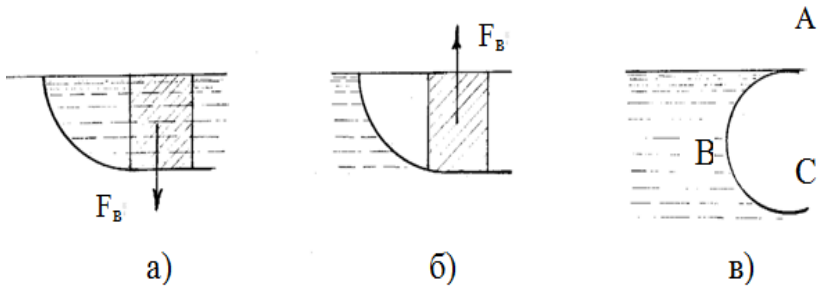


Рисунок 2.19 – До визначення тіла тиску

Якщо тіло тиску заповнене рідиною (рис. 2.19 а), його називають дійсним. Якщо тіло тиску заповнене рідиною умовно (рис. 2.19 б, в), його називають фіктивним. Тіло тиску для прикладу, зображеного на рисунку 2.19 в, визначають як суму тіл тиску на кожну частину криволінійної поверхні (AB і BC) з відповідними знаками.

Об'єм тіла тиску – це об'єм між криволінійною поверхнею, п'єзометричною площиною й вертикальними проєктувальними площинами.

Вертикальна складова сили тиску F_g прикладена в центрі ваги об'єму тіла тиску. Напрямок вертикальної складової сили тиску залежить від того, на якій поверхні побудовано об'єм тіла тиску. Якщо його побудовано зі

змоченої сторони криволінійної поверхні, вертикальна складова сили тиску спрямована вниз (рис. 2.19 а). Якщо об'єм тіла тиску побудований із незмоченої сторони криволінійної поверхні, вертикальна складова сили тиску спрямована вгору (рис. 2.19 б).

Горизонтальна складова сили тиску прикладена в центрі тиску вертикальної проєкції S_e (або в центрі ваги епюри тиску).

Повна сила тиску F на криволінійну поверхню є геометричною сумою сил F_z і F_e . Для криволінійних поверхонь, симетричних вертикальній площині, повну силу тиску рідини визначають за формулою

$$F = \sqrt{F_z^2 + F_e^2}.$$

Точка прикладення повної сили тиску визначається з умов рівноваги криволінійної поверхні, тобто

$$M_F = M_{F_z} + M_{F_e}.$$

Напрямок рівнодійної сили тиску характеризується кутом нахилу її до горизонту:

$$\alpha = \arctg \frac{F_e}{F_z}.$$

2.11 Закон Архімеда

Розглянемо тіло довільної форми, занурене в рідину (рис. 2.20). Визначимо сили тиску рідини на це тіло. Горизонтальні й вертикальні сили, що діють на тіло,

визначають як сили, що діють на криволінійні поверхні. Тоді F_{z_1} – горизонтальна сила, що діє на тіло зліва, F_{z_2} – горизонтальна сила, що діє на тіло справа.

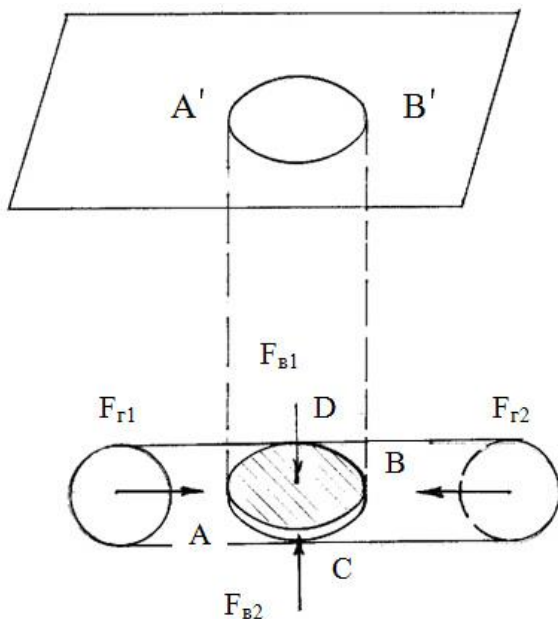


Рисунок 2.20 – До визначення сили Архімеда

Оскільки площі вертикальних криволінійних поверхонь $САД$ і $СВД$ дорівнюють одна одній, а центри їх ваги занурені на однакову глибину, то

$$F_{z_1} = F_{z_2}, \quad F_z = F_{z_1} - F_{z_2} = 0.$$

Якби ця рівність не зберігалася, тіло вийшло б зі стану рівноваги й почало б рухатися горизонтально.

Вертикальні сили тиску на криволінійній поверхні ADB і ACB визначають як сили ваги тіл тиску, опертих на ці поверхні.

Вертикальна складова сили тиску на поверхню ADB діє зверху донизу й дорівнює

$$F_{e_1} = \gamma \cdot V_{AA'B'VD}.$$

Для поверхні ACB вертикальна складова сили тиску діє знизу вгору й дорівнює

$$F_{e_2} = \gamma \cdot V_{AA'B'VC}.$$

Результуюча сила

$$F_e = F_{e_1} - F_{e_2} = \gamma \cdot (V_{AA'B'VD} - V_{AA'B'VC}) = \gamma V_{ACVD}.$$

Отже, на тіло, яке міститься в рідкому середовищі, діє сила, спрямована вгору, що дорівнює вазі рідини, витісненою тілом. Цю силу називають архімедовою або виштовхувальною:

$$F_A = \gamma \cdot V_{зан. тіла}, \quad (2.49)$$

де $V_{зан. тіла}$ – об'єм зануреного в рідину тіла.

Закон Архімеда: на занурене в рідину тіло діє виштовхувальна сила, спрямована вертикально вгору, за величиною дорівнює вазі рідини в об'ємі зануреного тіла та прикладена в центрі ваги цього об'єму.

Залежно від співвідношення ваги тіла G_T і виштовхувальної сили F_A можуть бути три варіанти стану тіла, зануреного в рідину:

а) якщо $G_T > F_A$ – тіло потоне, оскільки рівнодійна сила спрямована вниз;

б) якщо $G_T = F_A$ – тіло перебуває в стані рівноваги на тій глибині, на яку воно занурене;

в) якщо $G_T < F_A$ – тіло підніметься вгору.

Необхідно дещо зауважити. Якщо частина тіла почне підніматися над поверхнею води, об'єм води, що був виштовхнутий тілом, зменшиться й від цього стане меншою сила F_A . Коли F_A дорівнюватиме G_T , підняття догори закінчиться.

2.12 Основи теорії плавання тіл

Розглянемо рисунок 2.21.

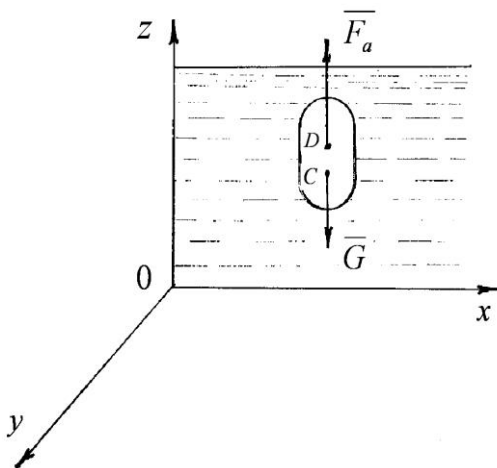


Рисунок 2.21 – Силевий вплив на занурене в рідину тіло

На занурене в рідину тіло діють сила ваги тіла G_T й сила тиску рідини на зовнішню поверхню тіла F_A .

Сила ваги G_T прикладена в центрі ваги тіла (точка C) і спрямована вниз:

$$G_T = m_T g = \rho_T V_T g = \gamma_T V_T.$$

Сила тиску рідини на зовнішню поверхню тіла F_A прикладена в центрі ваги витисненого об'єму рідини (точка D):

$$F_A = \gamma_p V_p.$$

Вагу рідини, яку витісняє тіло, називають водотоннажністю W . Центр ваги маси рідини в об'ємі зануреної частини тіла (точку прикладання сили F_A) називають центром водотоннажності (точка D).

Отже, точка C – центр ваги всього твердого тіла, зануреного в рідину; точка D – центр ваги маси рідини в об'ємі зануреної частини тіла. Найчастіше точки C і D не збігаються між собою.

Здатність тіла плавати в зануреному або частково зануреному стані в разі певної ваги G_T називають плавучістю. Умови плавання визначають співвідношенням ваги тіла G_T й виштовхувальної сили F_A . Сили G_T і F_A утворюють пару сил, що діє на тіло:

$$F = F_A + G_T.$$

Залежно від співвідношення ваги тіла G_T й виштовхувальної сили F_A можуть бути три варіанти стану зануреного в рідину тіла:

а) якщо $F > 0$, тобто $F_A > G_T$, – тіло піднімається вгору;

б) якщо $F < 0$, тобто $F_A < G_T$, – тіло тоне;

в) якщо $F = 0$, тобто $F_A = G_T$, – тіло перебуває в стані рівноваги на тій глибині, де настає цей баланс сил.

Питома величина сумарної сили, що діє на тіло,

$$F_{\text{sum}} = \frac{F}{V_T} = \frac{F_A + G_T}{V_T} = \frac{\gamma_p V_p - \gamma_T V_T}{V_T} = \gamma_p \frac{V_p}{V_T} - \gamma_T.$$

Якщо тіло повністю занурене в рідину ($V_p = V_T$), то

$$F_{\text{sum}} = \gamma_p - \gamma_T.$$

Здатність плаваючого тіла повертатися в стан рівноваги після припинення дії відхильної сили називають остійністю.

Унаслідок дії на плаваюче тіло відхильної сили центр ваги тіла C не змінить свого положення, а центр водотоннажності D переміститься в інше положення (рис. 2.22).

Можуть бути два варіанти стану плаваючого тіла: перший – тіло втрачає рівновагу й тоне, другий – тіло відновлює стан рівноваги.

Для остійного плавання тіла, повністю зануреного в рідину, необхідно, щоб центр ваги тіла C знаходився нижче від центра водотоннажності D . Тому якщо внаслідок дії відхильної сили виникає поновлювальний момент $M_{\text{пон}}$,

– плавання остійне, якщо внаслідок відхильної сили виникає перекидний момент $M_{пер}$, – плавання неостійне.

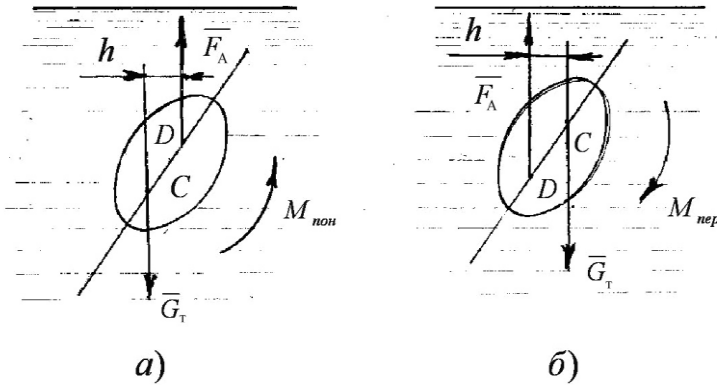


Рисунок 2.22 – Остійне (а) й неостійне (б) плавання повністю зануреного в рідину тіла

Розглянемо приклад, коли тіло плаває в частково зануреному стані (рис. 2.23).

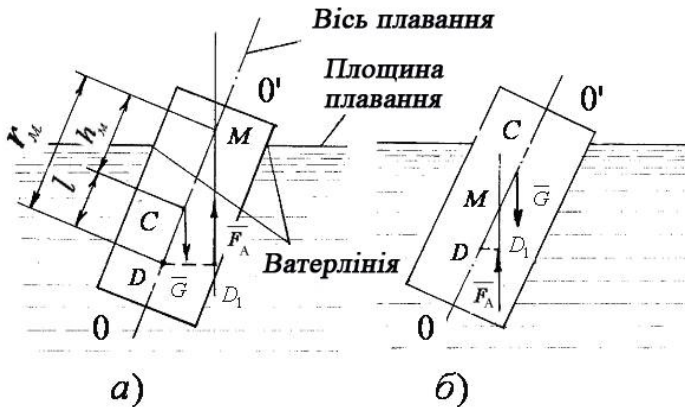


Рисунок 2.23 – Остійне (а) й неостійне (б) плавання частково зануреного в рідину тіла

Основні визначення для частково зануреного тіла:

а) площа плавання – це площа вільної поверхні;

б) вісь плавання – це лінія, що з'єднує центр ваги тіла C та центр водотоннажності D , коли тіло перебуває в стані рівноваги;

в) ватерлінія – це лінія перетину площини плавання й бічної поверхні плаваючого, частково зануреного тіла;

г) метацентр – це точка перетину осі плавання й лінії дії виштовхувальної сили F_A (точка M);

ґ) метацентричний радіус – це відстань між метацентром M і центром водотоннажності D (відстань r_m);

д) ексцентриситет – це відстань між центром ваги C та центром водотоннажності D (відстань e);

е) метацентрична висота – це різниця між метацентричним радіусом r_m та ексцентриситетом e (відстань h_m):

$$h_m = r_m - e.$$

Якщо метацентр M розміщений вище від центра ваги C , то тіло намагається відновити початкове положення (плавання остійне) (рис. 2.23 а).

Якщо метацентр M розташований нижче від центра ваги C , то сили G_T і F_A будуть намагатися перекинути тіло (плавання неостійне) (рис. 2.23 б).

Під час остійного плавання $r_m > e$, а під час неостійного – $r_m < e$. Відповідно під час остійного плавання $h_m > 0$, під час неостійного – $h_m < 0$ ($h_m = r_m - e$).

Метацентричний радіус r_m визначають за формулою

$$r_m = \frac{I_0}{V_p}, \quad (2.50)$$

де I_0 – момент інерції площини плавання щодо осі $O-O'$;

V_p – об'ємна водотоннажність (об'єм тіла, зануреного в рідину).

Тоді метацентричну висоту h_m визначають за формулою

$$h_m = \frac{I_0}{V_p} - e. \quad (2.51)$$

Аналіз взаємного розташування центра ваги, центра водотоннажності та метacentра приводить до таких можливих випадків:

а) у разі положення центра ваги нижче від центра водотоннажності тіло, що вільно плаває, буде завжди остійним;

б) під час положення центра ваги вище від центра водотоннажності тіло буде остійним, якщо метacentр розміщений вище від центра ваги;

в) у цілком зануреного тіла під час нахилення центр водотоннажності не буде переміщатися, тому внаслідок незмінності форми зануреного об'єму метacentр суміститься з центром водотоннажності. У цьому разі умова остійності виконується лише за розміщення центра ваги нижче від центра водотоннажності.

Контрольні питання до розділу 2

1 Гідростатичний тиск і його властивості. Закон Паскаля та приклади його використання в техніці.

2 Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера). Дві його форми.

3 Основне рівняння гідростатики, його фізичний зміст.

4 Закон розподілу тиску в нестисливій рідині. Види тиску та прилади для його вимірювання.

5 Гідростатичний та п'єзометричний напори. Поверхні рівного тиску.

6 Приклади відносного спокою рідини.

7 Сила тиску рідини на плоскі поверхні та криволінійні поверхні, її величина й точка прикладання.

8 Закон Архімеда та приклади його використання.

9 Основи теорії плавання тіл. Умови плавання та остійності.

3 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ Й ДИНАМІКИ РІДИНИ

3.1 Основні поняття

Кінематика рідини – це розділ науки про рух рідини, в якому вивчають геометричні характеристики руху рідини незалежно від причин, що спричинили цей рух.

Динаміка рідини – це розділ гідравліки, в якому вивчають закони руху рідини.

У рухомому об'ємі рідини кожна точка характеризується величиною та напрямом швидкості $\bar{v} = f(x, y, z, t)$. Зі свого боку, простір, кожна точка якого характеризується своїм вектором, називають векторним полем. Тоді потік рідини можна охарактеризувати відносним полем швидкостей.

За аналогією можуть бути поле тиску $p = f(x, y, z, t)$, температурне поле $T = f(x, y, z, t)$ та інші.

У гідравліці розрізняють неусталений та усталений рух рідини.

Неусталений рух – це такий рух, за якого всі його характеристики в окремих точках простору змінюються з часом.

Усталений рух – це такий рух, за якого його характеристики в окремих точках простору не змінюються з часом.

Можуть бути такі види руху рідини:

а) тривимірний неусталений рух –

$$\bar{v} = f(x, y, z, t);$$

б) тривимірний усталений рух – $\bar{v} = f(x, y, z);$

в) двовимірний усталений рух:

1) плоский – $\bar{v} = f(x, y)$;

2) осесиметричний – $\bar{v} = f(r, \Theta)$;

г) одновимірний усталений рух – $\bar{v} = f(x)$.

3.2 Методи вивчення руху рідини

3.2.1 Метод Ейлера

Існують два методи вивчення руху рідини: метод Ейлера й метод Лагранжа.

За методом Ейлера фіксують точку в потоці рідини й вивчають швидкості в цій одній точці. Через задану точку проходять різні частинки рідини, але згідно з методом Ейлера рух і траєкторія руху кожної частинки рідини не мають значення. Координати фіксованої точки є не координатами частинки рідини, а нерухомої точки простору.

Розглянемо момент часу t_1 . На цей момент часу в точці 1 буде знаходитися частинка рідини, що має швидкість $u_1(t_1)$; у цей самий час у точці 2 будемо мати швидкість $u_2(t_1)$, у точці 3 – швидкість $u_3(t_1)$ тощо. Тобто для моменту часу t_1 потік рідини буде поданий векторним полем швидкостей, де кожний вектор швидкості належить до відповідної фіксованої точки простору. Відповідно для моменту часу t_2 швидкості в точках 1, 2 і 3 будуть $u_1(t_2)$, $u_2(t_2)$ і $u_3(t_2)$ (рис. 3.1).

Загалом для моменту часу t_2 будемо мати інше поле швидкостей. Тобто за методом Ейлера потік рідини в

даний момент часу буде подано векторним полем швидкостей для нерухомих точок простору.

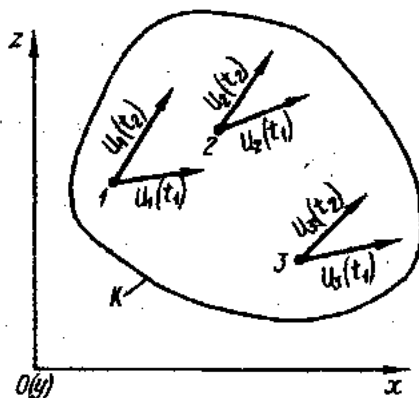


Рисунок 3.1 – Метод Ейлера

Якщо порівняти векторне поле швидкостей для моменту часу t_1 із векторним полем швидкостей для моменту часу t_2 , можна уявити, як із часом змінюється потік.

3.2.2 Метод Лагранжа

Метод Лагранжа полягає в дослідженні руху окремих зафіксованих частинок рідини, тобто траєкторій їх руху.

Нехай область K заповнена рідиною, що рухається, осі OX і OZ – нерухомі (рис. 3.2).

Розглянемо рухомі частинки рідини M_1, M_2 і M_3 . Початкові координати цих частинок позначимо як x_0 і z_0 . Будемо вважати, що для кожної частинки M_i відомі залежності

$$\begin{cases} x = f_1(x_0, z_0, t), \\ z = f_2(x_0, z_0, t). \end{cases}$$

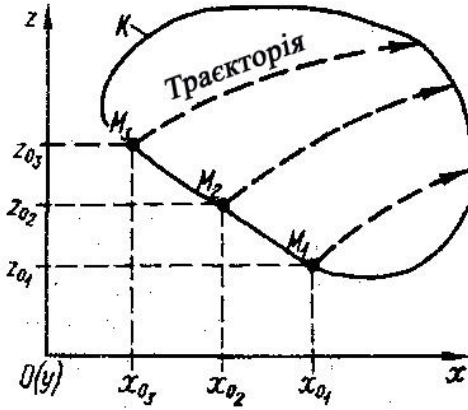


Рисунок 3.2 – Метод Лагранжа

Тоді можна визначити траекторії руху частинок рідини M_1, M_2 і M_3 . Далі для будь-якого відрізка траекторії можна визначити довжину шляху ds за час dt і відповідну швидкість. Тобто в цьому разі вивчаємо рух частинки рідини упродовж часу t .

За методом Лагранжа потік рідини загалом є сукупністю траекторій частинок рідини. Координати x, y і z змінюються з часом, тому

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.1)$$

Метод Лагранжа пов'язаний зі значними труднощами під час розв'язування загальних задач. Тому в подальшому вивчати рух частинок за методом Лагранжа будемо лише впродовж елементарного відрізка часу dt , коли частинка рідини проходить через фіксовану точку простору. Тобто будемо вважати, що в кожній точці простору за час dt відповідна частинка рідини проходить відрізок ds , проєкції якого на осі OX і OZ дорівнюють dx і dz відповідно. Тому для визначення проєкцій швидкостей v_x і v_z будемо використовувати співвідношення (3.1).

3.3 Геометричні характеристики поля швидкостей

3.3.1 Лінія течії

Лінія течії – це крива лінія, в кожній точці якої вектор швидкості \vec{V} є дотичною на кожний момент часу.

Розглянемо точку A , в якій вектор швидкості дорівнює \vec{V}_1 . Якщо вибрати в напрямі цього вектора точку B , у ній буде вектор швидкості \vec{V}_2 (рис. 3.3).

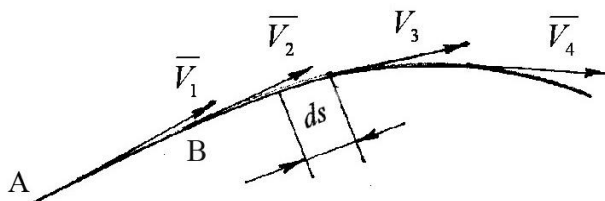


Рисунок 3.3 – Лінія течії

Аналогічно одержимо вектори швидкостей \bar{v}_3 , \bar{v}_4 та ін. Сукупність цих векторів дає ламану лінію. Під час зменшення відстані між точками одержимо плавну криву – лінію течії.

Отже, лінія течії є умовною геометричною кривою, проведеною в просторі так, що дотична в будь-якій точці кривої характеризує напрям швидкості в цій точці на певний момент часу.

У разі усталеного руху лінія течії збігається з траєкторією руху частинки. У цьому разі за час dt частинка за швидкості \bar{v} пройде шлях dS .

Вектор швидкості дотичний до траєкторії частинки, тому рівняння лінії течії буде

$$\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{S} = 0. \quad (3.2)$$

Виведемо диференціальні рівняння лінії течії

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{S} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \\ &= i(v_y dz - v_z dy) + j(v_z dx - v_x dz) + \\ &+ k(v_x dy - v_y dx) = 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} v_y dz &= v_z dy, \\ v_z dx &= v_x dz, \\ v_x dy &= v_y dx. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо

$$\frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz},$$

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_z}{dz},$$

$$\frac{v_y}{dy} = \frac{v_x}{dx},$$

тобто

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}. \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) називають рівняннями лінії течії.

3.3.2 Траєкторія

Траєкторія – це лінія, якою рухалась окрема частинка рідини за певний відрізок часу.

У разі усталеного руху траєкторія не змінюється з часом і збігається з лінією течії. За неусталеного руху траєкторія збігається з лінією течії лише тоді, коли швидкість із часом змінюється лише за величиною і не змінюється за напрямком.

3.3.3 Поверхня течії

Поверхня течії – це поверхня, утворена сукупністю ліній течії, що проходять через усі точки довільного контуру S (рис. 3.4).

Основна властивість поверхні течії – усі вектори швидкості дотичні до поверхні течії.

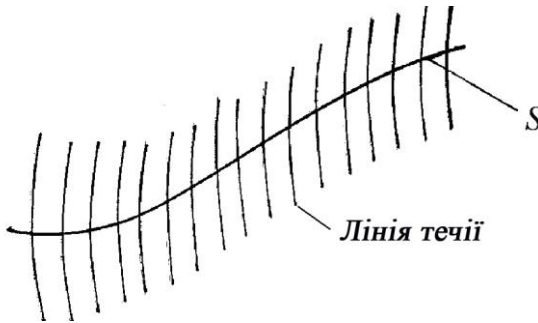


Рисунок 3.4 – Поверхня течії

3.3.4 Трубка течії

Трубка течії – це поверхня, утворена сукупністю ліній течії, що проходять через точки замкненого контуру S (рис. 3.5).

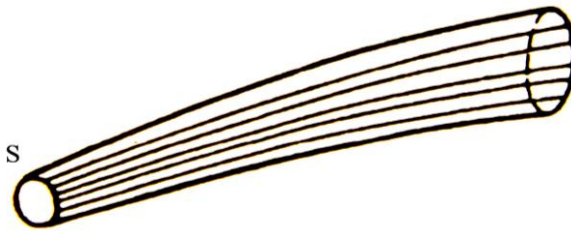


Рисунок 3.5 – Трубка течії

До будь-якої точки бокової поверхні трубки течії вектор швидкості спрямований по дотичній, нормальні складові швидкостей відсутні ($v_n = 0$). Тобто кожна частинка рідини не може потрапити всередину трубки течії або вийти зовні. Трубка течії неначе жорстка стінка.

3.3.5 Струминка течії. Елементарна струминка

Струминка течії – це об'єм рідини, що тече всередині трубки течії. Кожна струминка є самостійним елементарним потоком рідини.

Елементарна струминка – це об'єм рідини, що знаходиться всередині трубки течії, утвореної сукупністю ліній течії, що проходять через усі точки елементарної площадки $d\omega$. Елементарною струминкою може бути пучок ліній течії.

Елементарна струминка має такі основні властивості:

а) форма елементарної струминки під час усталеного руху не змінюється, за неусталеного – змінюється;

б) площі нормальних перерізів елементарної струминки нескінченно малі, але неоднакові в різних місцях. Тобто пучок ліній течії може згущуватися й розріджуватися;

в) в усіх точках певного нормального перерізу елементарної струминки швидкості однакові (з умови нескінченно малої величини самих перерізів), але під час переходу від одного перерізу до іншого швидкості змінюються.

3.3.6 Витрата елементарної струминки

Витрата елементарної струминки dQ – це кількість рідини, що пройшла через переріз струминки за одиницю часу.

Для елементарної струминки площа перерізу нескінченно мала й швидкість однакова для будь-яких точок кожного перерізу.

Тому витрата елементарної струминки

$$dQ = v \cdot \omega,$$

де v – швидкість, м/с;

$d\omega$ – площа перерізу струминки, м².

Одиниця вимірювання витрати – м³/с.

Сукупність елементарних струминок утворює потік рідини. Під потоком розуміють рух маси рідини, обмеженої жорсткими стінками або вільними поверхнями.

Для потоку кінцевих розмірів загалом швидкість має різні значення в різних точках перерізу, тому витрату визначають як суму елементарних витрат струминок:

$$Q = \int_{\omega} v d\omega.$$

Якщо ввести середню швидкість у перерізі $v_{сеп}$, то витрату потоку рідини можна визначати за формулою

$$Q = v_{сеп} \cdot \omega.$$

Витрата рідини (об'ємна й масова) – це кількість рідини, що протікає через живий переріз потоку за одиницю часу.

Об'ємна витрата

$$Q = \int_{\omega} v \cdot d\omega = v_{сеп} \cdot \omega.$$

Одиниця вимірювання об'ємної витрати – м³/с.

Масова витрата

$$M = \rho \cdot Q = \int_{\omega} \rho \cdot v \cdot d\omega,$$

або

$$M = \rho \cdot v_{\text{сер}} \cdot \omega.$$

Одиниця вимірювання масової витрати – кг/с.

3.3.7 Живий переріз потоку. Змочений периметр

Живий переріз потоку (або переріз потоку) – це поверхня в потоці рідини, нормальна до лінії течії (рис. 3.6).

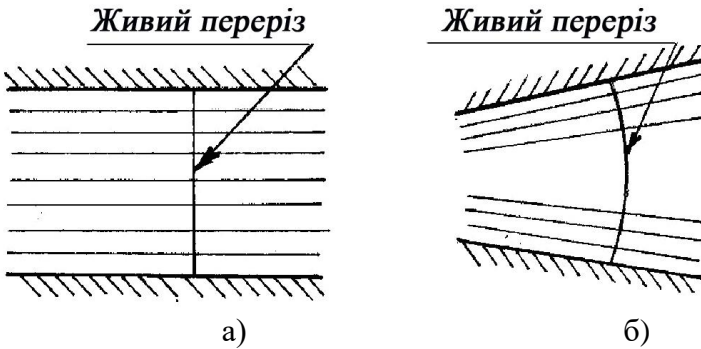


Рисунок 3.6 – Живі перерізи потоку

Якщо лінії течії паралельні між собою, живий переріз має плоску форму, зображену на рисунку 3.6 а. Якщо лінії течії не паралельні, живий переріз утворює криволінійну поверхню (рис. 3.6 б).

Зазвичай у потоках розглядають ділянки, для яких лінії течії можна вважати паралельними, а живий переріз – плоским.

Змочений периметр Π – це периметр частини перерізу каналу (труби), змоченої рідиною (рис. 3.7).

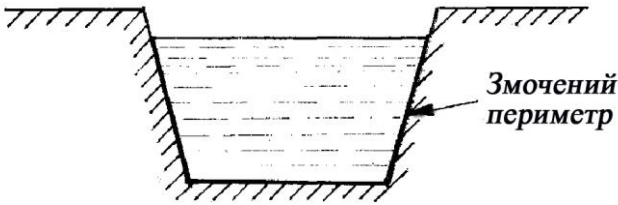


Рисунок 3.7 – Змочений периметр

3.3.8 Гідравлічний радіус

Гідравлічний радіус R_z – це відношення площі живого перерізу ω до змоченого периметра Π :

$$R_z = \frac{\omega}{\Pi}.$$

Величина R_z не має фізичного змісту, але за допомогою неї враховують вплив форми та розмірів живого перерізу потоку на рух рідини.

Наприклад, для круглої циліндричної трубки, повністю заповненої рідиною, гідравлічний радіус

$$R_z = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}.$$

Тобто для круглого живого перерізу гідравлічний радіус R_z дорівнює половині геометричного радіуса.

3.3.9 Середня швидкість

Середня швидкість по площі живого перерізу $v_{сеп_{\omega}}$ – це така уявна однакова для всіх точок живого перерізу швидкість, за якої крізь цей переріз проходила б та сама витрата, що й за умови дійсних швидкостей, різних для різних точок перерізу.

З урахуванням цього

$$Q = \int_{\omega} v d\omega = v_{сеп_{\omega}} \omega,$$

тоді

$$v_{сеп_{\omega}} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} v d\omega.$$

Середня швидкість за часом (для неусталеної течії) – це така швидкість, яку мала б частинка рідини, щоб за певний час подолати ту саму відстань, але в разі усталеної течії (рис. 3.8).

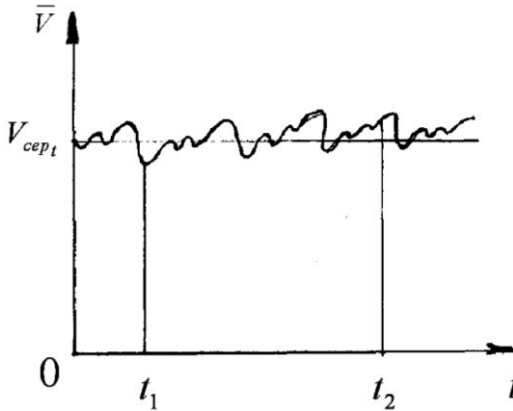


Рисунок 3.8 – Середня швидкість течії

З урахуванням рисунка 3.8

$$v_{\text{сеп.}}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v dt,$$

тоді

$$v_{\text{сеп.}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt .$$

3.4 Закон збереження маси в гідравліці

На поверхні струминки течії вектор швидкості спрямований по дотичній, тому нормальна складова швидкості відсутня ($v_n = 0$), і кожна частинка рідини не може потрапити всередину струминки або вийти за її межі. Тобто витрата рідини крізь поверхню струминки відсутня.

Тому з урахуванням закону збереження речовини й припущення про нерозривність течії для окремої струминки одержуємо

$$v_1 \cdot d\omega_1 = v_2 \cdot d\omega_2,$$

де $d\omega_1, d\omega_2$ – площі живих перерізів уздовж струминки;

v_1, v_2 – швидкості в живих перерізах.

Тоді

$$dQ_1 = dQ_2 = dQ = \text{const} .$$

Тобто витрата вздовж елементарної струминки залишається сталою.

Якщо весь потік рідини уявити як набір окремих струминок (струминна модель течії), можна записати аналогічне рівняння для потоку рідини:

$$Q_1 = Q_2 = Q = const, \quad (3.4)$$

де Q – об’ємна витрата рідини через живий переріз потоку.

У подальшому рівняння (3.4) ($Q = const$, або $Q_1 = Q_2$) будемо називати рівнянням нерозривності (суцільності) для потоку рідини в інтегральній формі.

Необхідно зазначити, що рівняння (3.4) дійсне лише вздовж потоку рідини.

Якщо вздовж потоку відбувається розподіл на декілька потоків, то сумарний потік буде тим самим (рис. 3.9).

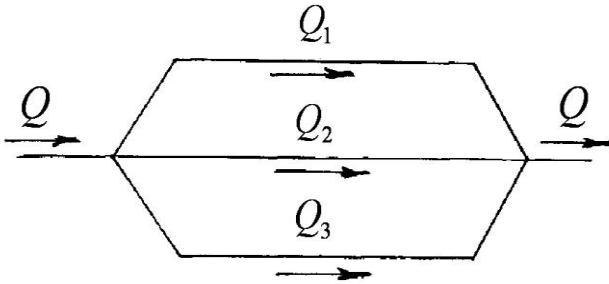


Рисунок 3.9 – Розподіл потоків

Для потоку на рисунку 3.9

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) використовують для розрахунків паралельно розгалужених трубопроводів.

Якщо між двома живими перерізами рідина не затікає й не витікає, то умови нерозривності є умовами постійної масової витрати (рис. 3.10).

У цьому разі

$$M_1 = M_2 ,$$

або

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot \omega_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot \omega_2 . \quad (3.6)$$

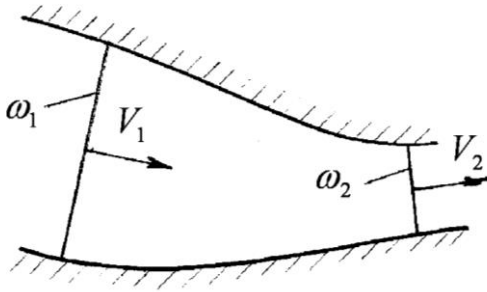


Рисунок 3.10 – Постійність витрати

Для нестисливої рідини ($\rho = const$)

$$v_1 \cdot \omega_1 = v_2 \cdot \omega_2 . \quad (3.7)$$

Звідси

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} . \quad (3.8)$$

Тобто в усталеному потоці нестисливої рідини середні швидкості руху обернено пропорційні площам відповідних живих перерізів. У разі зменшення площі

живого перерізу середня швидкість зростає, а за умови збільшенні площі – зменшується.

3.5 Ламінарний і турбулентний режими руху рідини

Спостереження свідчать, що існують два режими руху рідини: ламінарний і турбулентний.

Ламінарний режим – це режим руху, коли рідина рухається повільно, окремими шарами та струминками, без перемішування, рух упорядкований.

Турбулентний режим – це режим руху рідини, що характеризується інтенсивним перемішуванням частинок рідини, рух неупорядкований.

Найбільш докладні досліді з вивчення режимів руху рідини зробив англійський фізик Рейнольдс, який опублікував свої дослідження в 1883 році.

Розглянемо методику досліджень (рис. 3.11).

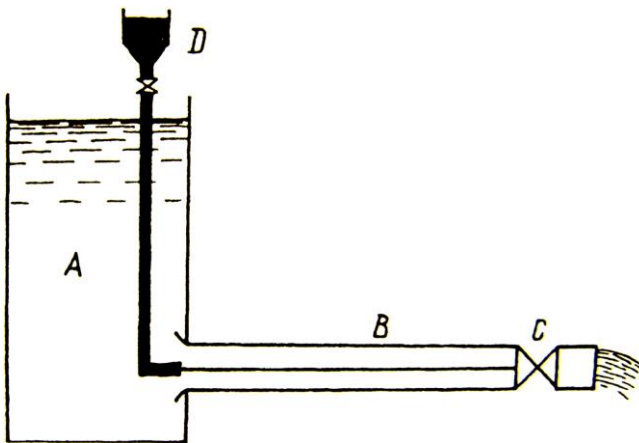


Рисунок 3.11 – Методика досліджень режимів руху рідини

Рідина з бака *A* витікає через скляну трубку *B*, у кінці якої встановлений кран *C* для регулювання витрати й швидкості. Водночас із бачка *D* трубкою меншого діаметра в бак подають фарбу. У разі незначного відкриття крана *C* вода рухається по трубці *B* з відносно малою швидкістю, а фарба в ній рухається у вигляді тоненької струминки без перемішування з потоком. Це ламінарний рух.

У разі більшого відкриття крана *C* і збільшення швидкості протікання води в трубці характер руху змінюється (рис. 3.12).

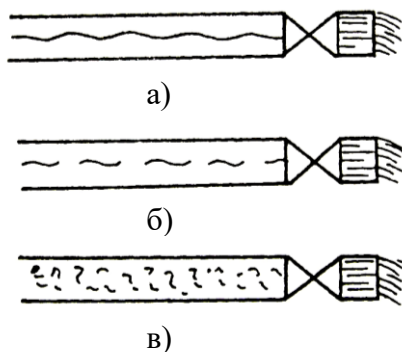


Рисунок 3.12 – Режими руху рідини

За деякого значення швидкості струминка стає хвилястою, а її контури нестійкими (рис. 3.12 а). У разі подальшого збільшення швидкості в струминці виникають розриви (рис. 3.12 б), а далі – повне руйнування струминки, внаслідок чого фарба повністю перемішується в трубці *B* (рис. 3.12 в). Рух стає турбулентним.

У разі зворотного зменшення швидкості руху рідини режим знову стає ламінарним, але цей перехід відбувається за умови меншої швидкості, ніж перехід від ламінарного режиму до турбулентного. З урахуванням, що в потоці рідини головними діючими силами є сили інерції

та сили в'язкості, Рейнольдс дійшов висновку, що на характер режиму руху рідини впливає їх співвідношення. Тобто якщо переважають сили в'язкості, режим руху рідини буде ламінарним; якщо переважають сили інерції – турбулентним.

Крім того, Рейнольдс дійшов висновку, що існує таке критичне число, що відмежовує ламінарний режим руху від турбулентного. Це число називають критерієм Рейнольдса (інакше – числом Рейнольдса):

$$\text{Re} = \frac{\nu \cdot l}{\nu}, \quad (3.9)$$

де ν – характерна швидкість;

l – відповідний характерний лінійний розмір;

ν – кінематична в'язкість рідини.

Наприклад:

а) для круглої циліндричної труби

$$\text{Re} = \frac{\nu \cdot d}{\nu},$$

де d – діаметр трубки;

б) для відкритих каналів

$$\text{Re} = \frac{\nu \cdot R_z}{\nu},$$

де R_z – гідравлічний радіус;

в) для радіального зазору між двома циліндрами

$$Re = \frac{v \cdot \delta}{\nu},$$

де δ – величина радіального зазору;

г) для течії на виході з робочого колеса гідромашини

$$Re = \frac{v \cdot D_2}{\nu},$$

де D_2 – зовнішній діаметр робочого колеса.

Турбулентний режим переходить у ламінарний за нижнього критичного числа Рейнольдса, а ламінарний режим переходить у турбулентний за верхнього. Відповідні критичним числам Рейнольдса швидкості мають несталі значення, тому на практиці для руху води в трубці критичне число Рейнольдса $Re_{кр}$ дорівнює 2 320; для відкритих каналів критичне число Рейнольдса $Re_{кр}$ знаходиться в діапазоні від 300 до 700.

На практиці ламінарний режим установлюється в капілярних трубках за малих швидкостей руху, під час руху між частинками ґрунту (фільтрація) або руху рідини з великою в'язкістю (нафта, олія тощо). У системах водопостачання й водовідведення зазвичай установлюється турбулентний режим руху.

3.6 Рівняння Бернуллі для елементарної струмінки ідеальної рідини

Другим основним рівнянням гідравліки після рівняння нерозривності є рівняння Бернуллі в різних його видах для різних випадків. Але фізичний зміст рівняння незмінний – закон збереження енергії: в замкненій

механічній системі енергія не зникає й не виникає, а лише переходить з одного виду в інший.

Розглянемо елементарну струминку ідеальної рідини з нескінченно малими розмірами перерізу й виділимо в ній об'єм рідини, що на момент часу t_1 розміститься між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 3.13).

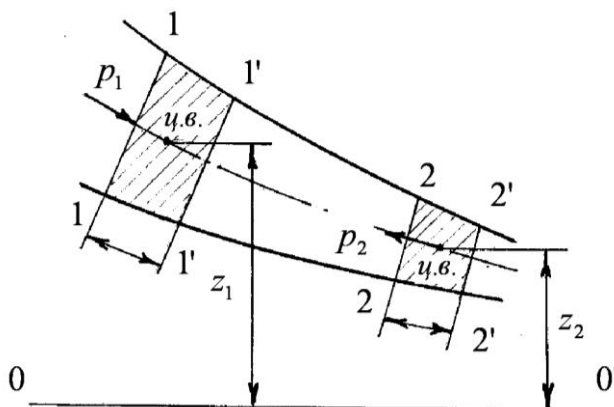


Рисунок 3.13 – До визначення рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини

Через час Δt цей об'єм займе положення між перерізами 1'-1' і 2'-2'. Застосуємо до вибраного об'єму теорему про зміну кінетичної енергії. Згідно з теоремою зміна кінетичної енергії матеріального об'єму дорівнює роботі всіх зовнішніх сил, що діють на цей об'єм:

$$\Delta E_k = \sum A. \quad (3.10)$$

У цьому разі зміна кінетичної енергії здійснюється за рахунок роботи сили тиску P й сили ваги G .

Позначимо площу перерізу 1-1 – ΔF_1 , площу перерізу 2-2 – ΔF_2 , переміщення перерізу 1-1 за час Δt – ΔS_1 , переміщення перерізу 2-2 за час Δt – ΔS_2 .

З урахуванням того, що $\Delta S_1 = v_1 \cdot \Delta t$, $\Delta S_2 = v_2 \cdot \Delta t$, знайдемо об'єми $V_{1-1'}$ і $V_{2-2'}$ (див. рис. 3.13):

$$V_{1-1'} = \Delta S_1 \cdot \Delta F_1 = v_1 \cdot \Delta t \cdot \Delta F_1 = q_1 \cdot \Delta t,$$

$$V_{2-2'} = \Delta S_2 \cdot \Delta F_2 = v_2 \cdot \Delta t \cdot \Delta F_2 = q_2 \cdot \Delta t.$$

Згідно із законом нерозривності потоку $q_1 = q_2 = q$, тому $V_{1-1'} = V_{2-2'} = q \cdot \Delta t$.

Маса об'ємів $V_{1-1'}$ і $V_{2-2'}$ буде

$$m = \rho \cdot q \cdot \Delta t = \frac{\gamma \cdot q \cdot \Delta t}{g} = \frac{G}{g},$$

де G – вага об'єму.

Тоді зміна кінетичної енергії

$$\Delta E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{G}{2g} v_2^2 - \frac{G}{2g} v_1^2. \quad (3.11)$$

Визначимо роботу сил, що діють на наш об'єм рідини:

а) роботу сили ваги щодо переміщення об'єму визначимо як добуток сили ваги G на шлях, що пройшов центр ваги об'єму за вертикаллю:

$$A_G = G \cdot z_1 - G \cdot z_2, \quad (3.12)$$

де z_1 і z_2 – висота розміщення центра ваги об'єму щодо площини порівняння $0-0'$;

б) роботу сили тиску P щодо переміщення об'єму визначимо як добуток сили тиску на площу перерізу й на величину переміщення:

$$\begin{aligned} A_p &= p_1 \cdot \Delta F_1 \cdot \Delta S_1 - p_2 \cdot \Delta F_2 \cdot \Delta S_2 = \\ &= p_1 \cdot V_{1-1'} - p_2 \cdot V_{2-2'} = p_1 \frac{G}{\gamma} - p_2 \frac{G}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Підставляючи (3.11), (3.12), (3.13) у (3.10), одержимо

$$\frac{G}{2g} v_2^2 - \frac{G}{2g} v_1^2 = G \cdot z_1 - G \cdot z_2 + p_1 \frac{G}{\gamma} - p_2 \frac{G}{\gamma}.$$

Поділимо кожен член рівняння на G і перегрупуємо, тоді

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (3.14)$$

Перерізи елементарної струминки ми обрали цілком довільно, тому для будь-якого перерізу струминки можна записати

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \quad (3.15)$$

Вирази (3.14) і (3.15) називають рівнянням Д. Бернуллі для струминки ідеальної рідини.

3.6.1 Фізичний зміст членів рівняння Бернуллі

3.6.1.1 Енергетичний зміст членів рівняння Бернуллі

Для обчислення енергії нескінченно малої частинки масою dm із центром ваги в точці A , розміщеній у межах елементарної струминки, необхідно визначити потенціальну й кінетичну енергію цієї частинки (рис. 3.14).

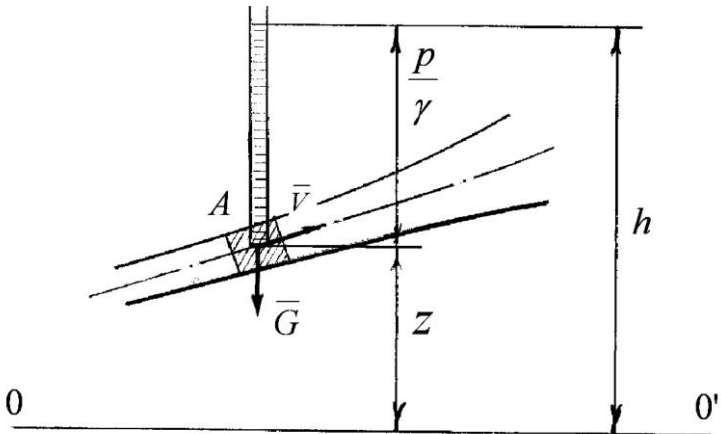


Рисунок 3.14 – До визначення енергії частинки рідини

Загальна механічна енергія складається із суми потенціальної та кінетичної енергії.

Потенціальну енергію E_n визначимо як добуток сили ваги, що діє на цю частинку, на висоту розміщення частинки над площиною порівняння $0-0'$:

$$E_n = mgh .$$

Необхідно зазначити, що висота розміщення частинки h складається з геометричної висоти z і п'єзометричної висоти $\frac{p}{\gamma}$, оскільки рідина піднімається під дією тиску p .

Тому

$$E_n = mg \left(z + \frac{p}{\gamma} \right).$$

Для нескінченно малої частинки

$$dE_n = dm g \left(z + \frac{p}{\gamma} \right).$$

Питома потенціальна енергія

$$dE_{n_{\text{unit}}} = \frac{dm \cdot g}{dm \cdot g} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = z + \frac{p}{\gamma}.$$

Кінетична енергія

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Для нескінченно малої частинки

$$dE_k = \frac{dm \cdot v^2}{2}.$$

Якщо розділити кінетичну енергію dE_k на одиницю ваги (gdm), то одержимо питому кінетичну енергію

$$dE_{k_{num}} = \frac{dm \cdot v^2}{2dm \cdot g} = \frac{v^2}{2g}.$$

Повна питома енергія

$$dE_{num} = dE_{n_{num}} + dE_{k_{num}},$$

або

$$dE_{num} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}, \quad (3.16)$$

де z – питома потенціальна енергія положення;

$\frac{p}{\gamma}$ – питома потенціальна енергія тиску;

$\frac{v^2}{2g}$ – питома кінетична енергія.

Вираз (3.16) для всіх перерізів струминки є величиною сталою.

Тобто для всіх перерізів елементарної струминки сума питомої потенціальної енергії й питомої кінетичної енергії є величиною сталою.

Енергетичний зміст рівняння Бернуллі – закон збереження енергії.

У подальшому повну питому енергію будемо називати напором рідини.

Одиниця вимірювання напору – м.

3.6.1.2 Геометричний зміст членів рівняння Бернуллі

Із гідростатики відомо, що вираз $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ є гідростатичним напором H_s , який складається з лінійних величин – відмітки точки z і п'єзометричної висоти $\frac{p}{\gamma}$.

Величина $\frac{v^2}{2g}$ також має лінійну розмірність $\left(\left[\frac{m}{c}\right]^2 : \left[\frac{m}{c^2}\right] = [m]\right)$. Це – швидкісний напір.

Тоді рівняння Бернуллі можна записати так:

$$H_0 = H_s + \frac{v^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = const, \quad (3.17)$$

де H_0 – повний або гідродинамічний напір рідини.

Отже, рівняння Бернуллі є також рівнянням напору.

Воно є найважливішим рівнянням гідравліки, встановлює залежність між положенням точки, тиском і швидкістю в будь-якому перерізі елементарної струминки й аналогічними характеристиками в іншому перерізі цієї самої струминки.

За умови сталих значень координат z для всіх перерізів потоку ($z = const$) із рівняння Бернуллі випливає дуже важлива властивість рідини, що рухається.

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів потоку в точках 1, 2, 3 (рис. 3.15).

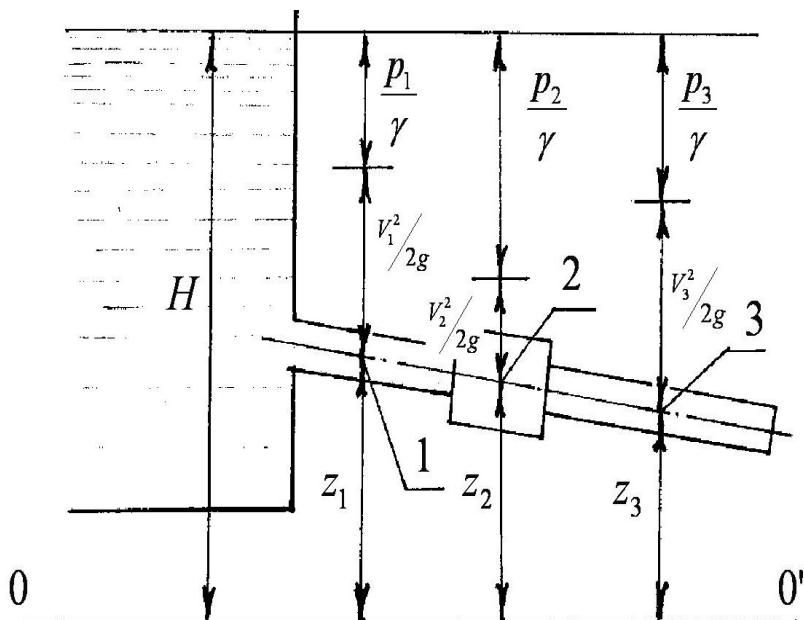


Рисунок 3.15 – До визначення взаємозалежності швидкості і тиску в рідині, що рухається

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}.$$

Якщо $z_1 = z_2 = z_3$, то

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}.$$

Тобто для рідини, що рухається, зі зростанням швидкості тиск зменшується, а зі зменшенням швидкості тиск збільшується.

Інакше, в разі зменшення площі перерізу швидкість руху рідини збільшується, тиск зменшується; а в разі збільшення – швидкість зменшується, тиск збільшується.

Вищезазначене є проявом механізму перетворення одного виду енергії на інший: потенціальної енергії на кінетичну й навпаки. У подальшому цю властивість рідини було використано в різноманітних технічних пристроях (рис. 3.16).

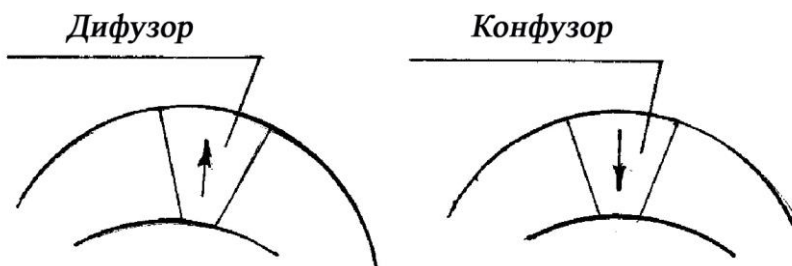


Рисунок 3.16 – Дифузор і конфузор

Загалом рідина буде рухатися в напрямку від точки з більшим тиском до точки з меншим тиском. Тобто, якщо в точці A тиск $p_1 = 20$ Па, а в точці B тиск $p_2 = 4$ Па, рідина буде рухатися від точки A до точки B (за $z_A = z_B$ і $v_A = v_B$).

3.6.2 Інші вирази для питомої енергії рідини

Повну питому механічну енергію однієї одиниці ваги рідини визначають за формулою

$$H_G = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}. \quad (3.18)$$

Одиниця вимірювання H_G – м.

Повну питому механічну енергію однієї одиниці маси рідини визначають за формулою

$$H_m = \rho g z + p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (3.19)$$

Одиниця вимірювання H_m – Н/м².

Повну питому механічну енергію однієї одиниці об'єму рідини визначають за формулою

$$H_v = g z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (3.20)$$

Одиниця вимірювання H_v – м²/с².

У подальшому в розрахунках будемо користуватися виразом (3.18) без індексу « G »:

$$H_G = H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}.$$

3.7 Рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини

Енергія потоку в живому перерізі складається із суми енергії елементарних струминок (рис. 3.17).

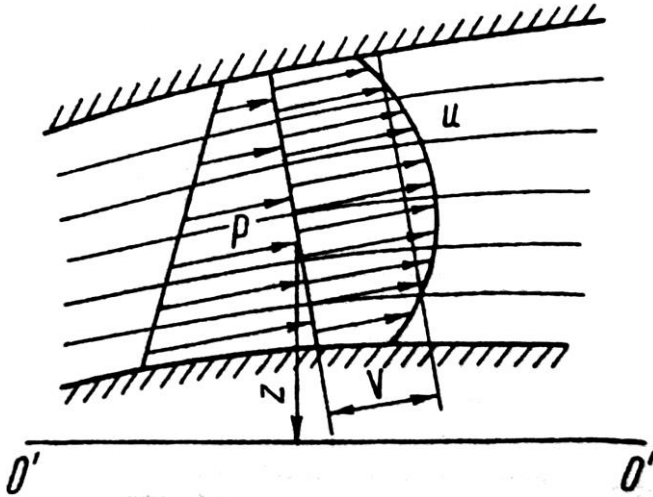


Рисунок 3.17 – До визначення енергії потоку ідеальної рідини

Якщо вираз (3.16) помножити на вагу рідини, що протікає через живий переріз потоку, тоді, інтегруючи по площі живого перерізу, одержимо повний (гідродинамічний) напір живого перерізу потоку

$$E = G \int_{\omega} z d\omega + G \int_{\omega} \frac{p}{\gamma} d\omega + G \int_{\omega} \frac{v^2}{2g} d\omega.$$

Якщо z і $\frac{p}{\gamma}$ віднести до центра ваги живого перерізу потоку, одержимо питому енергію

$$E_{num} = \frac{E}{G} = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_{uc} + \int_{\omega} \frac{v^2}{2g} d\omega .$$

Розглянемо два приклади: перший – усі частинки рідини проходять через живий переріз ω з однаковою швидкістю ($v = const$); другий – швидкості частинок рідини в живому перерізі ω різні ($v \neq const$) (рис. 3.18).

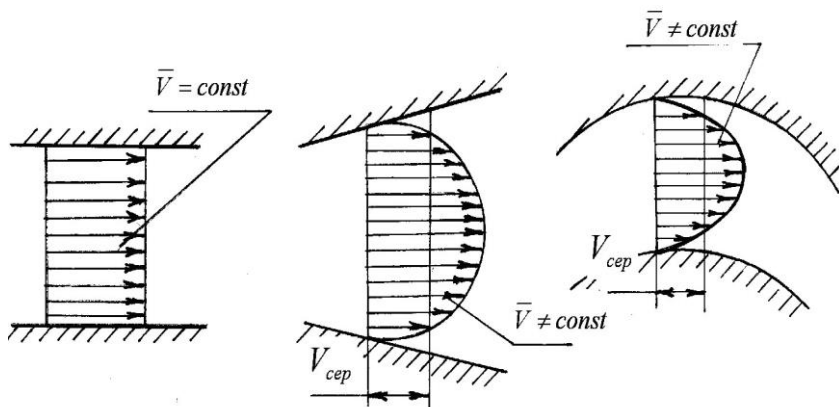


Рисунок 3.18 – Ідеальний і дійсні потоки

Перший випадок – ідеальний потік, другий – дійсний потік. Для наближення реальної епюри швидкості до ідеальної необхідно ввести середню швидкість $v_{сep}$. Але кінетична енергія, обчислена за середньою швидкістю $v_{сep}$, буде відрізняться від кінетичної енергії для дійсних величин швидкості. Для врахування нерівномірності розподіл швидкостей по перерізу введемо коефіцієнт α відношення дійсної кінетичної енергії до кінетичної енергії, обчисленої за середньою швидкістю

$$\alpha = \frac{E_{к.v_0}}{E_{к.v_{сep}}} \quad (3.21)$$

Коефіцієнт кінетичної енергії α називають коефіцієнтом Коріоліса. З урахуванням (3.21) дійсна кінетична енергія в живому перерізі

$$E_{\kappa, v_0} = \alpha \cdot E_{\kappa, v_{cep}} = \frac{\alpha v^2}{2g}.$$

Тоді рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини матиме вигляд

$$H = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)_{\text{цв}} + \frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const}, \quad (3.22)$$

або

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)_{\text{цв}} + \frac{\alpha_1 v_{1cep}^2}{2g} = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)_{\text{цв}} + \frac{\alpha_2 v_{2cep}^2}{2g}. \quad (3.23)$$

Фізичний зміст (енергетичний і геометричний) рівнянь (3.22), (3.23) той самий, що й для рівнянь (3.14), (3.15):

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)_{\text{цв}}, \quad \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)_{\text{цв}} \quad - \quad \text{середня питома}$$

потенціальна енергія рідини в перерізах 1-1 і 2-2 відповідно;

$$\frac{\alpha_1 v_{1cep}^2}{2g}, \quad \frac{\alpha_2 v_{2cep}^2}{2g} \quad - \quad \text{дійсна питома кінетична}$$

енергія рідини в перерізах 1-1 і 2-2, обчислена за середньою швидкістю.

Значення коефіцієнта α визначають за дослідними даними. У трубопроводах і каналах $\alpha = 1,05 - 1,1$ водночас у деяких випадках коефіцієнт α може бути й значно менше за одиницю.

3.8 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

Під час руху в'язкої (реальної) рідини частина механічної енергії потоку втрачається на подолання сили опору між живими перерізами. Природу цього опору й визначення його розміру розглянемо пізніше, а зараз будемо стверджувати, що під час руху в'язкої рідини від перерізу 1-1 до перерізу 2-2 механічна енергія буде зменшуватися, тобто $E_1 > E_2$ (або $H_1 > H_2$). З урахуванням цього

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Щоб скласти рівняння, необхідно додати до правої частини величину втраченої питомої енергії $\Delta h_{\text{втр}}$. Тоді рівняння Бернуллі для потоку реальної (в'язкої) рідини можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \left(z_1 + \frac{p}{\rho g} \right)_{\text{цв}} + \frac{\alpha_1 v_{1\text{цв}}^2}{2g} &= \\ = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)_{\text{цв}} + \frac{\alpha_2 v_{2\text{цв}}^2}{2g} + \Delta h_{\text{втр}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

З енергетичної точки зору рівняння (3.24) виражає явище розсіювання (дисипації) енергії. Інакше кажучи, під час руху частина механічної енергії рідини внаслідок в'язкості незворотно переходить у теплову форму енергії, тобто для потоку втрачається.

Геометричну інтерпретацію рівняння Бернуллі для потоку реальної (в'язкої) рідини подано на рисунку 3.19.

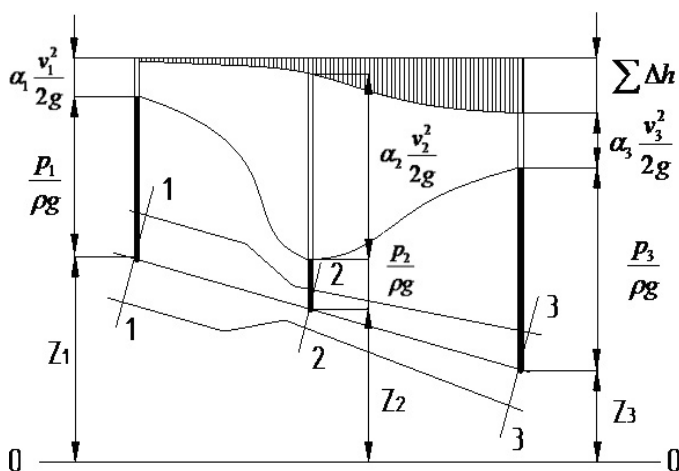


Рисунок 3.19 – Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

З геометричного погляду рівняння Бернуллі є сумою трьох лінійних величин: z , $\frac{p}{\rho g}$, $\frac{\alpha v^2}{2g}$. Точки A і B , розміщені в перерізах $1-1$ і $2-2$, мають відмітки z_1 і z_2 над горизонтальною площиною порівняння $0-0'$. П'єзометричні висоти в цих точках – $\frac{P_1}{\rho g}$ і $\frac{P_2}{\rho g}$.

П'єзометричні напори в кожному перерізі – $\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right)$ і $\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)$. Лінію, що з'єднує відмітки п'єзометричних напорів, називають п'єзометричною.

Суму п'єзометричного та швидкісного напорів називають повним напором H_0 . Лінію, що з'єднує відмітки повних напорів, називають напірною.

Зміну величини п'єзометричного напору H_n характеризує п'єзометричний похил I_n :

$$I_n = -\frac{dH_n}{dl}, \quad (3.25)$$

де dl – нескінченно малий відрізок уздовж руху.

Унаслідок того, що тиск уздовж руху може зменшуватися або збільшуватися (якщо збільшується або зменшується швидкість), п'єзометричний похил I_n може бути додатним або від'ємним.

Зміну величини повного напору H_0 характеризує гідравлічний похил I_z :

$$I_z = -\frac{dH_0}{dl}. \quad (3.26)$$

Оскільки приріст dH_0 завжди є від'ємним (напір зменшується вздовж руху), то гідравлічний похил I_z завжди додатний.

Гідравлічний похил I_z – це втрата повного напору, яку віднесено до одиниці довжини, тому

$$I_z = \frac{dh_{emp}}{dl}. \quad (3.27)$$

Загалом утрати напору можуть виникати за рахунок зменшення всіх або деяких величин, що входять до рівняння Бернуллі.

На практиці водопровідні труби мають постійний переріз і швидкість у них постійна, а втрати напору відбуваються за рахунок зменшення п'єзометричного напору H_n : у горизонтальних трубах утрати напору відбуваються за рахунок зменшення тиску p , у безнапірних трубах – за рахунок зменшення відмітки z .

3.9 Графічна ілюстрація зміни енергії вздовж трубопроводу

3.9.1 Зміна енергії вздовж трубопроводу для потоку ідеальної рідини

Розглянемо трубопровід, зображений на рисунку 3.20.

Якщо рідина ідеальна, втрат енергії вздовж трубопроводу немає, і для кожного перерізу виконується залежність

$$z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} = const.$$

Відомо, що лінія повного напору для ідеальної рідини є горизонтальною. Аналізуючи характер зміни енергії вздовж трубопроводу, необхідно зробити такі зауваження щодо лінії п'єзометричного напору:

а) якщо площа перерізу трубопроводу збільшується, швидкість і швидкісний напір зменшуються, п'єзометрична лінія йде вгору;

б) якщо площа перерізу трубопроводу зменшується, швидкість і швидкісний напір збільшуються, п'єзометрична лінія йде вниз;

в) якщо площа перерізу трубопроводу не змінюється, п'єзометрична лінія є горизонтальною прямою;

г) у разі, якщо вісь трубопроводу горизонтальна, її можна обрати за площину порівняння $0-0'$.

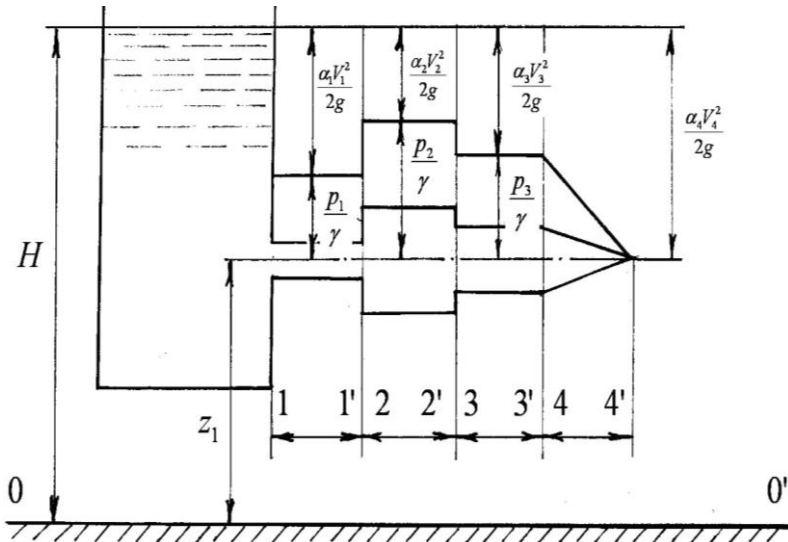


Рисунок 3.20 – Зміни енергії потоку ідеальної рідини вздовж трубопроводу

3.9.2 Зміна енергії вздовж трубопроводу для потоку в'язкої рідини

Для потоку в'язкої рідини зміна енергії вздовж трубопроводу буде відрізнятися щодо потоку ідеальної рідини.

На рисунку 3.21 наведено графічну ілюстрацію зміни енергії для трубопроводу з рисунка 3.20 у разі потоку реальної рідини.

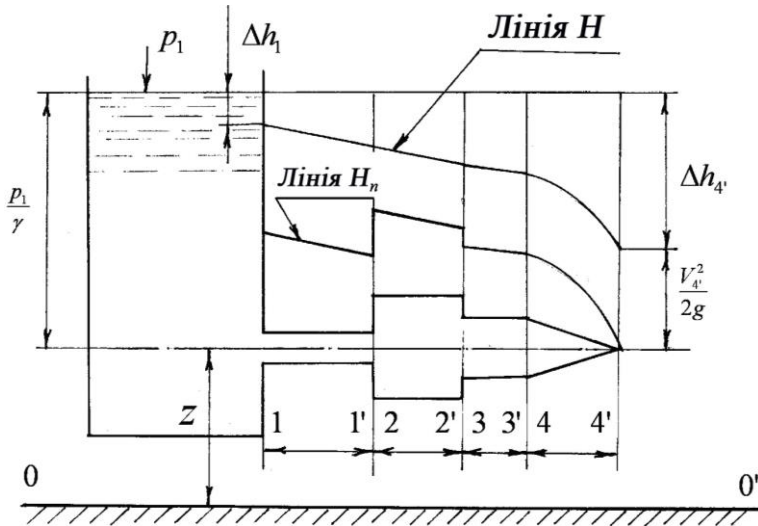


Рисунок 3.21 – Зміни енергії потоку реальної рідини
вздовж трубопроводу

Якщо рідина реальна (в'язка), рівняння Бернуллі для двох перерізів матиме вигляд

$$z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} = z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\gamma} + \frac{\alpha_{i+1} v_{i+1}^2}{2g} + \Delta h_{i-(i+1)}.$$

Аналізуючи характер зміни енергії в цьому разі, необхідно зауважити, що:

а) лінії повного напору H і п'єзометричного напору H_n мають похил щодо площини порівняння (горизонтальної площини);

б) під час руху рідини вздовж ділянки трубопроводу постійного діаметра (за умови незмінного розподілу швидкості) зміна повного та п'єзометричного напорів характеризується паралельними лініями внаслідок того, що гідравлічний і п'єзометричний похили однакові.

3.10 Рівняння Бернуллі для стисливої рідини

За невеликих змін тиску вздовж потоку рівняння Бернуллі можна використовувати для газового потоку (стисливої рідини) в раніше одержаному вигляді для нестисливої рідини:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = const. \quad (3.28)$$

У цьому разі вираз (3.28) – це питома енергія одиниці ваги газу.

Якщо кожний член рівняння (3.28) помножити на g , знайдемо рівняння для енергії одиниці маси рідини

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const. \quad (3.29)$$

За значних змін тиску змінюється й густина ($\rho \neq const$), тому в цьому разі необхідно

використовувати рівняння (3.29) для одиниці маси (за умови виконання $m_1 = m_2 = const$).

За умови великих тисків величиною енергії положення gz можна знехтувати, оскільки вона достатньо мала порівняно з іншими видами енергії. Тому рівняння (3.29) запишемо у вигляді

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const,$$

або в диференціальній формі

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

Інтегруючи цей вираз уздовж елементарної струминки, одержуємо

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const. \quad (3.30)$$

Вираз (3.30) є рівнянням Бернуллі для стисливої рідини (газу).

З енергетичної точки зору член рівняння $\int \frac{dP}{\rho}$ є питомою потенціальною енергією газу з урахуванням перетворення його внутрішньої енергії (під час зміни тиску об'єм газу змінюється й виділяється теплова енергія). Тому енергетичний зміст рівняння (3.30) можна сформулювати так: за умови усталеної течії газу вздовж трубки течії сума

питомої потенціальної та кінетичної енергії є величиною сталою.

Для того щоб скористатися рівнянням (3.30), потрібно знати залежність $\rho = f(P)$. Тобто необхідно знати характеристику процесу зміни стану газу в розглядуваному випадку течії.

Якщо газ проходить без теплообміну із оточуючою атмосферою, то такий процес загалом називають адіабатичним. Якщо водночас знехтувати в'язкістю (тобто газ ідеальний), то процес буде мати назву ізоентропічного.

Для ізоентропічного процесу виконується залежність

$$\frac{P}{\rho^k} = c,$$

де k – показник адіабати процесу (для повітря $k = 1,4$);

c – стале число.

Тобто

$$\rho = \frac{P^{\frac{1}{k}}}{c^{\frac{1}{k}}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{\rho} &= \int \frac{dP}{\frac{P^{\frac{1}{k}}}{c^{\frac{1}{k}}}} = c^{\frac{1}{k}} \int \frac{dP}{P^{\frac{1}{k}}} = \\ &= c^{\frac{1}{k}} \frac{P^{\frac{k-1}{k}}}{(k-1)/k} = c^{\frac{1}{k}} \frac{k}{k-1} P^{\frac{k-1}{k}}. \end{aligned}$$

Виконаємо заміну

$$c^{\frac{1}{k}} = \rho^{-1} P^{\frac{1}{k}}.$$

Тоді

$$\int \frac{dP}{\rho} = \frac{P^{\frac{1}{k}}}{\rho} \frac{k}{k-1} P^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho}.$$

Тепер рівняння (3.30) матиме вигляд

$$\frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const. \quad (3.31)$$

Ураховуючи рівняння газового стану Менделєєва – Клапейрона ($P = \rho RT$), рівняння (3.31) можна записати у вигляді

$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{V^2}{2} = const, \quad (3.32)$$

де R – універсальна газова стала;

T – температура.

Із рівняння (3.32) випливає, що зміна швидкості вздовж струминки газу пов'язана зі зміною температури. Тобто в разі збільшення температури швидкість знижується, а в разі зменшення – зростає. Це використовують для збільшення швидкості потоку в ракетних двигунах.

3.11 Рівняння Бернуллі для несталоного й відносного руху рідини

Розглянуті раніше рівняння Бернуллі виводили для прикладів, коли рух рідини сталий, і на кожний елементарний об'єм рідини діють лише сила тиску й сила тяжіння. Для одержання рівнянь із закону механіки $\Delta E_{\kappa} = \sum A$ враховували лише роботу цих двох сил. Але є ситуації, коли на рідину, крім сили тяжіння й сили тиску, діють інші масові сили – сила $F = ma$ та сила інерції в абсолютному ($F = m\omega^2 r$) або відносному ($F = 2m\omega W$) русі, і дію цих сил необхідно враховувати. Наприклад, під час відкриття засувки або коли трубопровід, яким рухається рідина, змінює своє положення в просторі. Тоді під час виведення рівняння Бернуллі враховують роботу сил інерції:

$$\Delta E = A_{G_m} + A_p + A_{F_{in}}.$$

Для визначення роботи сил інерції $A_{F_{in}}$ проаналізуємо характер сили інерції та визначимо прискорення рідкої частинки.

Із загальної механіки відомо, що прискорення $a = dv/dt$. Для рідкої частинки швидкість $v = f(x, y, z, t)$; до того ж координати x, y, z теж є функціями часу: $x = f(t), y = f(t), z = f(t)$.

Тоді проєкції вектора прискорення \bar{a} можна записати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Тут a_x, a_y, a_z – субстанціональні похідні від проєкцій вектора швидкості за часом;

$\frac{\partial v_x}{\partial t}, \frac{\partial v_y}{\partial t}, \frac{\partial v_z}{\partial t}$ – локальні прискорення в точці простору;

$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ – проєкції вектора швидкості в даній точці простору.

Позначимо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z.$$

Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{array} \right.$$

У кожному рівнянні позначимо локальні прискорення в точці простору:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = a_{x_{лок}}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = a_{y_{лок}}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = a_{z_{лок}}.$$

За умови сталого руху швидкості рідких частинок у точках простору не змінюються й локальні прискорення відсутні ($a_{x_{лок}} = a_{y_{лок}} = a_{z_{лок}} = 0$).

Частини рівняння, що залишаються без локальних прискорень, мають назву конвективних прискорень і характеризують зміну вектора швидкості під час переходу від однієї точки поля до іншої. Тому

$$\begin{cases} a_x = a_{x_{лок}} + a_{x_{конв}}, \\ a_y = a_{y_{лок}} + a_{y_{конв}}, \\ a_z = a_{z_{лок}} + a_{z_{конв}}. \end{cases}$$

Загалом прискорення рідкої частинки є сумою локального й конвективного прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_{лок} + \bar{a}_{конв}. \quad (3.33)$$

За умови несталого й відносного руху на кожну частинку рідини діють багато сил інерції – від локального прискорення й від конвективного прискорення. Тому рівняння Бернуллі для реальної рідини в разі несталого й відносного руху матиме вигляд

$$\begin{aligned} \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right)_{цв} + \frac{\alpha_1 v_{1cep}^2}{2g} &= \\ = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)_{цв} + \frac{\alpha_2 v_{2cep}^2}{2g} + \Delta h + \Delta H_{ин}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де $\Delta H_{ин}$ – інерційний напір, що являє собою роботу сили інерції, віднесено до одиниці ваги.

Розглянемо визначення величини інерційного напору для деяких характерних прикладів:

а) прямолінійний рівноприскорений рух каналу.

Якщо канал із потоком рідини рухається прямолінійно з прискоренням $a = const$, на всі частини рідини, що рухається каналом, діє стала за часом сила інерції $F_{ин} = ma$ (рис. 3.22).

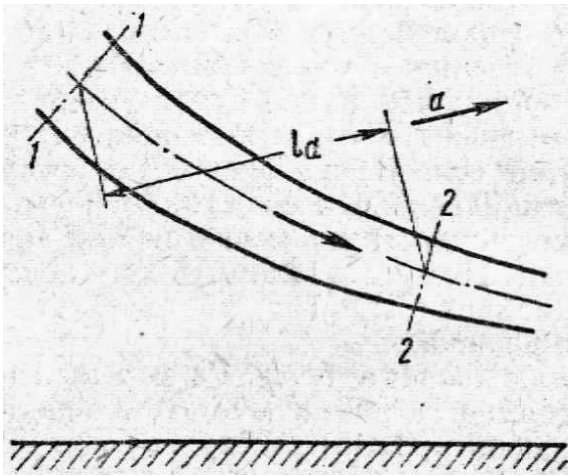


Рисунок 3.22 – До визначення інерційного напору за прямолінійного рівноприскореного руху каналу

Якщо поділити силу інерції $F_{in} = ma$ на вагу $G = mg$, одержимо силу інерції, що діє на кожному одиницю ваги рідини:

$$F_{in_{од}} = a \frac{1}{g}.$$

Роботу цієї сили щодо переміщення рідини від перерізу 1 до перерізу 2 (див. рис. 3.22) визначають як добуток сили F_{in} і переміщення l_a . Тому

$$\Delta H_{in} = l_a \frac{a}{g}, \quad (3.35)$$

де l_a – проекція відрізка каналу на напрям прискорення \bar{a} .

Величину ΔH_{in} у правій частині рівняння (3.34) підставляють зі знаком плюс, якщо прискорення \bar{a} спрямоване від перерізу 1 до перерізу 2 внаслідок зменшення тиску в другому перерізі щодо першого (сила інерції має напрямок від перерізу 2 до перерізу 1, тому інерційний напір аналогічний гідравлічним утратам).

Якщо прискорення \bar{a} спрямоване від перерізу 2 до перерізу 1, то інерційна сила має напрямок від перерізу 1 до перерізу 2 й допомагає течії. У цьому разі інерційний напір повинен мати знак мінус у правій частині рівняння (3.34), оскільки він збільшує тиск у перерізі 2, тобто зменшує гідравлічні втрати напору;

б) рідина рухається каналом, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω .

У цьому разі на рідину діє сила інерції обертального руху $F_{in} = m\omega^2 r$ (рис. 3.23).

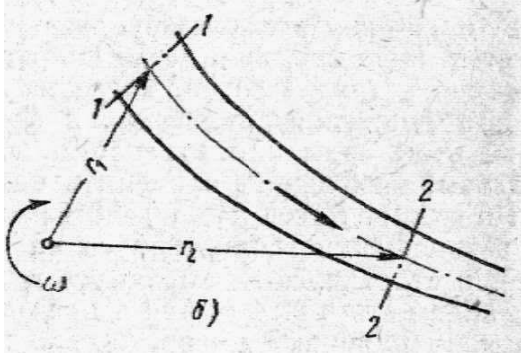


Рисунок 3.23 – До визначення інерційного напору за обертowego руху каналу

Тоді на одиницю ваги рідини в цьому разі буде діяти сила інерції $F_{in.oo} = r \frac{\omega^2}{g}$. Робота цієї сили під час переміщення уздовж радіуса r на відстань dr буде дорівнювати $\frac{\omega^2}{g} r dr$. Виконавши інтегрування, знайдемо величину інерційного напору ΔH_{in} під час переміщення рідини на відстань від r_1 до r_2 :

$$\Delta H_{in} = -\frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2). \quad (3.36)$$

Знак ΔH_{in} у формулі (3.36) визначають за правилом, розглянутим для прямолінійного рівноприскореного руху каналу;
в) відносний рух рідини.

За умов відносного руху необхідно враховувати коріолісову силу інерції $F_{in} = 2m\omega W$.

Інерційний напір у цьому разі знаходять за формулою

$$\Delta H_{in} = \frac{2\omega}{g} W (r_2^2 - r_1^2). \quad (3.37)$$

3.12 Теорема імпульсів для руху рідини

Використання рівняння Бернуллі вимагає обґрунтованого врахування втрат енергії. У деяких ситуаціях руху рідини заздалегідь важко оцінити величину втрат енергії через значну зміну її під впливом різних факторів. Це призводить до труднощів під час застосування рівняння Бернуллі, що значно ускладнює розрахунки та впливає на точність результатів. Тому в таких ситуаціях доцільно використовувати інтегральний підхід до розрахунків руху рідини, коли процеси, що відбуваються між перерізами $a-a$ і $b-b$, не враховують (рис. 3.24).

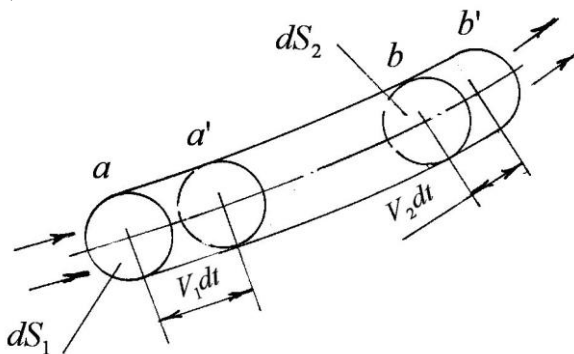


Рисунок 3.24 – До використання теореми імпульсів

Цей підхід ґрунтується на використанні теореми імпульсів – теореми про збереження або зміну кількості руху виділеного об’єму. Відомо, що кількість руху – $m\bar{v}$, зміна кількості руху – $d(m\bar{v})$, зміна кількості руху за час dt – $d(m\bar{v})/dt$. Закон зміни кількості руху в загальній механіці формулюють так: похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок геометрично дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, прикладених до цієї системи:

$$\bar{F} = d(m\bar{v})/dt, \quad (3.38)$$

де $d(m\bar{v})$ – вектор кількості руху матеріальної системи;

\bar{F} – результуюча всіх зовнішніх сил.

Якщо результуюча сила дорівнює нулю $\bar{F} = 0$ (усі зовнішні сили урівноважили одна одну), то приходимо до рівняння збереження кількості руху:

$$d(m\bar{v})/dt = 0,$$

або

$$m\bar{v} = const .$$

Для рідини кількість руху

$$m\bar{v} = \int_v \rho \bar{v} dV,$$

де \bar{v} – вектор швидкості в кожній точці рідкого об’єму.

Зовнішні сили для рідини складаються з об'ємних \bar{F}_m і поверхневих \bar{P} .

Об'ємні сили мають вигляд

$$\bar{F}_m = \int_V \rho \bar{F}_m dV .$$

Поверхневі сили мають вигляд

$$\bar{P} = - \int_s \bar{p} dS .$$

Тоді закон збереження кількості руху для рідини

$$\frac{d \left(\int_V \rho \bar{v} dV \right)}{dt} = \int_V \rho \bar{F}_m dV - \int_s \bar{p} dS . \quad (3.39)$$

Тобто похідна за часом від інтеграла кількості руху дорівнює сумі інтегралів об'ємних сил і поверхневих тисків.

На рисунку 3.24 рідкий об'єм ab за нескінченно малий проміжок часу dt займає положення $a'b'$. Тоді

$$aa' = v_1 dt ,$$

$$bb' = v_2 dt .$$

Ураховуючи, що рух сталий, кількість рідини в об'ємах aa' і bb' буде $m_1 = \rho v_1 dS_1 dt$, $m_2 = \rho v_2 dS_2 dt$.

Збільшення кількості руху за час dt визначається різницею кількостей рухів об'ємів aa' і bb' :

$$d(mv) = m_2v_2 - m_1v_1 = \rho(v_2^2 dS_2 - v_1^2 dS_1) dt. \quad (3.40)$$

Отже, зміна кількості руху в елементарному рідкому потоці пов'язана з перенесенням кількості руху через її скінченні перерізи.

Момент кількості руху – це вектор, величина якого визначається добутком вектора кількості руху $m\bar{V}$ на плече r , а напрямок – перпендикулярний до площини, що містить вектор кількості руху (рис. 3.25).

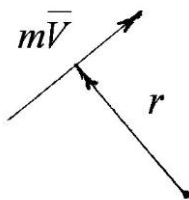


Рисунок 3.25 – Момент кількості руху (імпульсу)

Теорему моментів кількості руху формулюють так: зміна моменту кількості руху дорівнює моменту головного вектора зовнішніх сил:

$$M = \frac{d(m\bar{V}r)}{dt}.$$

Для рідини головний момент зовнішніх сил, що діють на рідкий об'єм, складається з моментів об'ємних сил та моментів поверхневих тисків.

Теорему імпульсів використовують для вирішення різноманітних практичних завдань. Наприклад:

а) рідина рухається в прямокутному каналі з постійною площею перерізу (рис. 3.26).

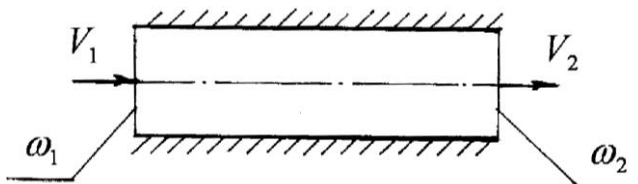


Рисунок 3.26 – Прямокутний канал із постійною площею перерізу

У цій ситуації $mV_1 = mV_2$ (з умови $V_1 = V_2$).

Тому

$$mV_2 - mV_1 = 0.$$

Тобто результуючий вектор зовнішніх сил дорівнює нулю:

$$F = d(mv)/dt = 0;$$

б) рідина рухається в каналі змінного перерізу (рис. 3.27).

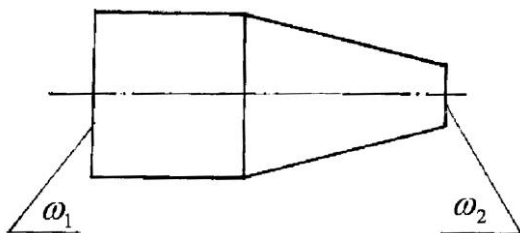


Рисунок 3.27 – Канал змінного перерізу

У цьому прикладі $v_2 > v_1$, оскільки з умови $\omega_1 > \omega_2$. Тоді

$$mv_2 > mv_1,$$

або

$$mv_2 - mv_1 \neq 0.$$

Тобто виникає результуюча сила $F \neq 0$;

в) рідина рухається в зігнутому під кутом α каналі (рис. 3.28).

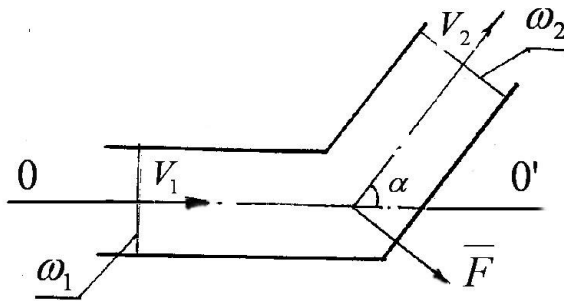


Рисунок 3.28 – Зігнутий канал

У цій ситуації $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, оскільки з умови випливає $\omega_1 = \omega_2$. Рівняння імпульсів матиме вигляд

$$mv_1 - mv_2 \cos \alpha \neq 0.$$

Тобто від повороту потоку виникає результуюча сила $F \neq 0$.

3.13 Гідравлічні опори

3.13.1 Загальні положення

Як було зазначено раніше, під час руху в'язкої рідини виникають утрати енергії (напору). Тобто під час руху в'язкої рідини від перерізу 1–1 до перерізу 2–2 повний напір зменшується:

$$H_1 = H_2 + \Delta h,$$

де Δh – втрати повної енергії.

Величина втрат Δh залежить від багатьох факторів:

- а) форми живого перерізу потоку;
- б) швидкості протікання рідини;
- в) в'язкості рідини;
- г) кінематичної структури потоку (епюри швидкостей);
- г) режиму течії (ламінарного чи турбулентного);
- д) якості твердої поверхні каналу (шорсткості твердої поверхні);
- е) геометричних параметрів потоку (прямолінійний, конфузорний, дифузорний, із поворотом потоку, з відривом потоку, з вихороутворенням та ін.).

Причиною втрат Δh є різні гідравлічні опори, що характеризуються в'язкими або інерційними силами. Перші обумовлені наявністю дотичних напружень τ між рідиною та твердою поверхнею каналу й між окремими шарами рідини, а другі – від здатності рідини чинити опір під час руху.

Теоретично розрахувати величину втрати напору Δh часто досить складно, але ще до появи теоретичної гідродинаміки експериментально дійшли висновку, що

гідравлічні втрати напору прямо пропорційні квадрату швидкості рідини. Тому загальна формула для визначення гідравлічних утрат

$$\Delta h = \xi \frac{v_{\text{сеп}}^2}{2g}, \quad (3.41)$$

де ξ – коефіцієнт гідравлічних утрат.

Із формули (3.41) випливає, що коефіцієнт гідравлічних утрат ξ визначають як відношення втраченої енергії до динамічного напору:

$$\xi = \frac{\Delta h}{v_{\text{сеп}}^2 / 2g}.$$

Опори бувають двох видів:

а) опори по довжині, що виникають під час протікання в трубках і каналах за умови рівномірного або нерівномірного руху;

б) місцеві опори, що виникають на короткій відстані в місцях різкої зміни конфігурації потоку.

Відповідно до видів опорів усі гідравлічні втрати напору поділяють на втрати по довжині та втрати на місцевих опорах.

3.13.2 Втрати напору по довжині

Втрати напору по довжині Δh_d – це втрати напору, які в чистому вигляді виникають у прямих трубках і каналах постійного перерізу. Цей вид втрат енергії зумовлений винятково силами тертя в рідині (внутрішніми і зовнішніми).

Загальна формула для розрахунку втрат по довжині

$$\Delta h_{\partial} = \xi_{\partial} \frac{v_{cep}^2}{2g}.$$

Проте значно зручніше коефіцієнт втрат по довжині ξ_{∂} пов'язувати із довжиною трубки.

Розглянемо ділянку трубопроводу довжиною l і діаметром d (рис. 3.29).

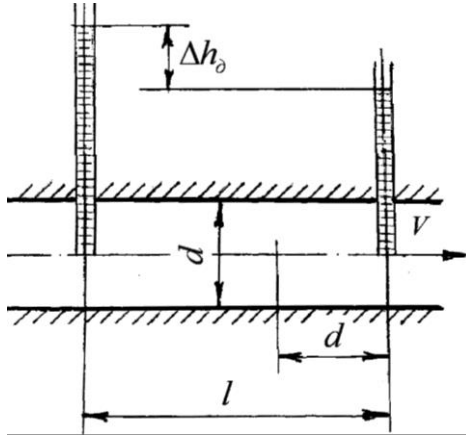


Рисунок 3.29 – До визначення втрат напору по довжині

Позначимо коефіцієнт опору відрізка труби довжиною d через λ . Тоді для відрізка труби довжиною l коефіцієнт опору буде в l/d разів більшим.

Тобто

$$\xi_{\partial} = \lambda \frac{l}{d}.$$

Тоді

$$\Delta h_{\partial} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cep}^2}{2g}, \quad (3.42)$$

де Δh_0 – втрати напору по довжині трубопроводу;

λ – гідравлічний коефіцієнт тертя, який визначають за дослідними даними;

l – довжина трубопроводу;

d – діаметр трубопроводу;

$\frac{v_{сеп}^2}{2g}$ – швидкісний напір.

Формулу (3.42) запропонував французький учений Дарсі в 1857 році на основі багатьох дослідів, проведених на паризькому трубопроводі. Тому вираз (3.42) називають формулою Дарсі.

3.13.3 Втрати напору на місцевих опорах

3.13.3.1 Види місцевих опорів

Втрати на місцевих опорах – це втрати, обумовлені місцевими змінами конфігурації та розмірів потоку, що приводять до його деформації.

Місцеві опори поділяють на раптове й поступове розширення, звуження та поворот потоку. Більш складні місцеві опори (засувка, дросель, діафрагма та ін.) можна уявити як комбінацію вищезазваних опорів.

Наприклад, якщо рідина тече через засувку, потік змінює свій напрямок, звужується, потім знову розширюється. Водночас відбувається інтенсивне вихороутворення.

На рисунку 3.30 проілюстровані деякі приклади місцевих опорів: раптове розширення або звуження

поток, поворот потока, засувка, діафрагма, сопло, дросель.

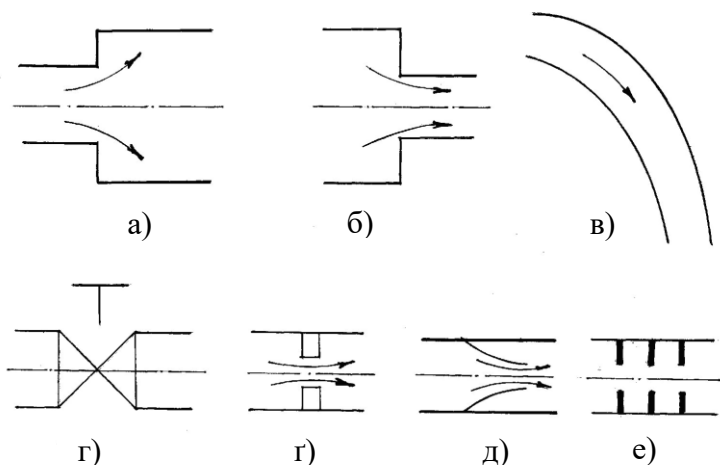


Рисунок 3.30 – Місцеві опори:

- а) раптове розширення потоку;
- б) раптове звуження потоку;
- в) поворот потоку; г) засувка;
- г) діафрагма; д) сопло; е) дросель

Утрати енергії на місцевих опорах зручно визначити за загальною формулою, яку в 1840 р. запропонував Ю. Вейсбах:

$$\Delta h_m = \zeta_m \frac{v_{сер}^2}{2g}, \quad (3.43)$$

де ζ_m – коефіцієнт місцевого опору, що визначають за даними експериментів.

Для кожного виду місцевого опору коефіцієнт ζ_m буде свій. Зазвичай величину ζ_m можна знайти в

спеціальних довідниках (наприклад, Ідельчик «Довідник з гідравлічних опорів»).

Необхідно зауважити, що довжину потоку, де відбувається втрата напору на місцевому опорі, для розрахунків вважають такою, що дорівнює нулю ($l_m = 0$), а величину місцевої втрати напору відносять до конкретного перерізу потоку.

На місцевих опорах унаслідок зміни розмірів і конфігурації потоку відбуваються зміна швидкості й відрив транзитного потоку від стінки каналу та утворюються вихори. Тому втрата енергії на місцевих опорах відбувається не стільки за рахунок внутрішнього тертя, скільки за рахунок вихороутворення.

3.13.3.2 Раптове розширення потоку

У деяких прикладах величини коефіцієнта ζ_m можна визначити аналітично. Наприклад, французький інженер Борда запропонував залежність для вивчення втрати напору від раптового розширення потоку.

У разі раптового розширення каналу потік зривається з кута й розширюється не раптово, як канал, а поступово. У просторі між потоками та стінкою каналу утворюються вихори, що зумовлюють утрату енергії. До того ж, між головними потоками та його вихровою частиною безперервно відбувається обмін частинками рідини.

Розглянемо потік рідини (рис. 3.31), який із каналу з площиною ω_1 витікає в канал із площиною ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$). Складемо залежність для визначення втрати енергії від раптового розширення потоку Δh_{pp} .

Для виведення залежності зробимо припущення:

- а) розподіл швидкості в перерізах 1-1 і 2-2 рівномірний ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$);
 б) тертя на стінках каналу відсутнє;
 в) розподіл тиску p по площі перерізів ω_1 і ω_2 рівномірний.

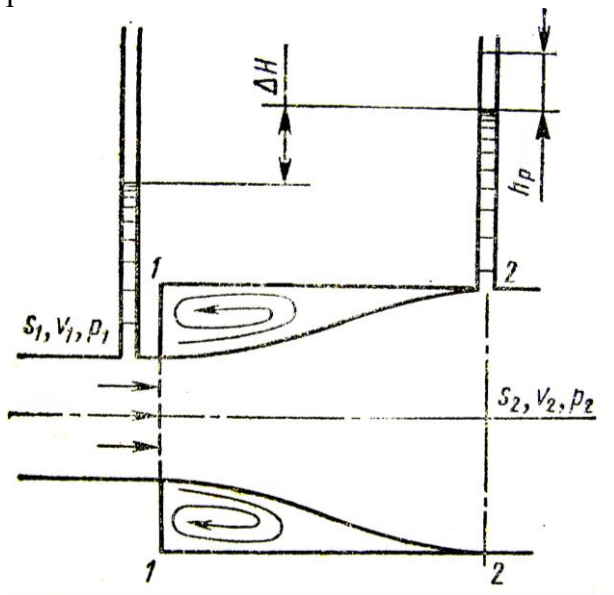


Рисунок 3.31 – Раптове розширення каналу

Складемо гідравлічне рівняння кінетичної енергії (рівняння Бернуллі) для перерізів 1-1 і 2-2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{pp},$$

або

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \Delta h_{pp}. \quad (3.44)$$

Ураховуючи, що секундний імпульс зовнішніх сил дорівнює $(p_1 - p_2)\omega_2$, відповідна зміна кількості руху

$$m(v_2 - v_1) = \rho Q(v_2 - v_1) = \rho v_2 \omega_2 (v_2 - v_1).$$

Тоді рівняння кількості руху

$$(p_1 - p_2)\omega_2 = \rho v_2 \omega_2 (v_2 - v_1).$$

Поділимо ліву та праву частини рівняння на добуток $\rho g \omega_2$. Тоді

$$\frac{(p_1 - p_2)\omega_2}{\rho g \omega_2} = \frac{\rho v_2 \omega_2 (v_2 - v_1)}{\rho g \omega_2},$$

або

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{g}.$$

Перетворимо праву частину рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{g} &= \frac{v_2^2 - v_2 v_1}{g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g} = \\ &= \frac{v_2^2}{g} + \frac{v_2^2}{g} - \frac{2v_2 v_1}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \\ &= \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}. \quad (3.45)$$

Якщо порівняти вирази (3.44) й (3.45), одержимо рівняння

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \Delta h_{pp}.$$

Тоді втрата енергії від раптового розширення потоку

$$\Delta h_{pp} = \xi_{pp} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (3.46)$$

Тобто втрата напору (питомої енергії) в разі раптового розширення потоку дорівнює динамічному напору, обчисленому за різницею швидкостей.

Утрати напору Δh_{pp} ще називають утратами Карно, а вираз (3.46) – теоремою Борда – Карно.

Визначимо, чому в цьому випадку дорівнює коефіцієнт раптового розширення ξ_{pp} . Згідно з формулою Вейсбаха

$$\Delta h_{pp} = \xi_{pp} \frac{v^2}{2g}.$$

Тоді, якщо виділити швидкісний напір $v_1^2/2g$ із виразу (3.46), можна одержати ξ_{pp} :

$$\Delta h_{pp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2,$$

або

$$\xi_{pp} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2. \quad (3.47)$$

Якщо врахувати, що згідно з рівнянням нерозривності потоку $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, то

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Коефіцієнт раптового розширення ξ_{pp}

$$\xi_{pp} = \left(1 - \frac{v_2}{v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)^2,$$

або

$$\xi_{pp} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2. \quad (3.48)$$

Для круглої труби $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$, тому коефіцієнт раптового розширення в цьому разі визначають за формулою

$$\xi_{pp} = \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}\right)^2. \quad (3.49)$$

Під час раптового розширення потоку до нескінченно великих розмірів (вихід у резервуар великих розмірів за умови $d_2 \rightarrow \infty$, $\omega_2 \rightarrow \infty$) витрачається весь динамічний напір ($v_2 = 0$). Коефіцієнт раптового розширення в цьому разі

$$\xi_{pp} = 1. \quad (3.50)$$

3.13.3.3 Раптове звуження потоку

Раптове звуження потоку завжди обумовлює меншу втрату напору, ніж раптове розширення за умов однакового співвідношення площі перерізів 1-1 і 2-2 (рис. 3.32).

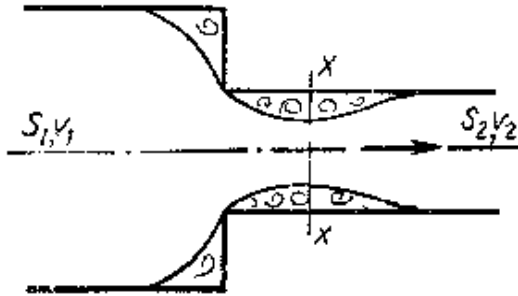


Рисунок 3.32 – Раптове звуження каналу

У цьому прикладі втрати енергії обумовлені, по-перше, тертям потоку на вході у вузьку трубку; по-друге,

втратами на вихороутворення. Останні виникають за рахунок зриву з кута й звуження потоку (переріз $x-x$ на рис. 3.32), утворення простору з малорухомою рідиною. Під час подальшого розширення потоку відбувається втрата енергії, яку визначають за теоремою Борда. Тому повна втрата енергії в разі раптового звуження потоку

$$\Delta h_{p.36} = \xi_0 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v_2)^2}{2g} = \xi_{p.36} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (3.51)$$

де ξ_0 – коефіцієнт опору, обумовлений тертям потоку біля входу у вузьку трубу;

v_x – швидкість потоку в найвужчому перерізі;

$\xi_{p.36}$ – коефіцієнт раптового звуження.

Коефіцієнт раптового звуження $\xi_{p.36}$ залежить від співвідношення площі перерізів 1–1 і 2–2. На практиці для розрахунків використовують напівемпіричну формулу

$$\xi_{p.36} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2, \quad (3.52)$$

де n – ступінь звуження: $n = \omega_1 / \omega_2$.

З виразу (3.52) випливає, що за $\omega_1 \rightarrow \infty$ (вхід у трубу з резервуара) коефіцієнт звуження

$$\xi_{p.36} = 0,5. \quad (3.53)$$

Якщо надати вхідному куту округлої форми, можна значно зменшити втрату напору біля входу в трубу.

3.13.3.4 Поступове розширення потоку

Ділянку труби, що поступово розширюється, називають дифузором (рис. 3.33).

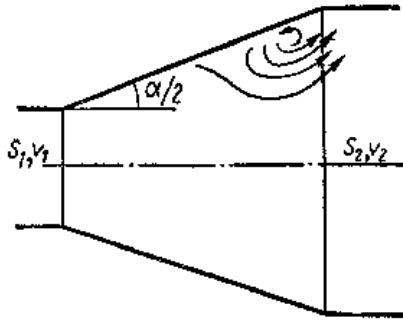


Рисунок 3.33 – Дифузор

Для руху рідини в дифузорі характерне зменшення швидкості ($v_1 > v_2$) та збільшення тиску ($p_1 < p_2$). Частинки рухомої рідини долають збільшення тиску за рахунок кінетичної енергії, що зменшується вздовж дифузора та в напрямку від осі до стінки дифузора. Шари рідини, які прилягають до стінок, мають таку малу кінетичну енергію, що зупиняються або починають рухатися у зворотному напрямку. Унаслідок цього відбуваються вихороутворення й відрив потоку від стінки дифузора. Інтенсивність цих явищ зростає зі збільшенням кута дифузора. Крім того, в дифузорі виникають утрати напору, обумовлені тертям. Тому

$$\Delta h_{\text{оуф}} = \Delta h_m + \Delta h_{\text{розш}}, \quad (3.54)$$

де Δh_m – утрати напору, обумовлені тертям;

$\Delta h_{\text{розши}}$ – утрати напору, обумовлені розширенням (вихороутворенням).

Спробуємо оцінити кожен зі складових рівняння (3.54). Для визначення втрати напору на тертя Δh_m розглянемо дифузор із діаметром входу r_1 та діаметром виходу r_2 , з прямолінійної твірної й кутом розширення α (рис. 3.34).

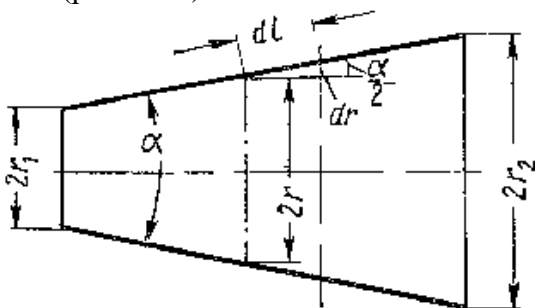


Рисунок 3.34 – До визначення втрат напору в дифузорі

Радіус перерізу дифузора та швидкість руху рідини вздовж дифузора змінюються за величиною. Тому виділимо елементарний відрізок дифузора довжиною dl і діаметром $2r$, для нього знайдемо елементарну втрату напору на тертя за загальною формулою

$$dh_m = \lambda \frac{dl}{2r} \frac{v^2}{2g},$$

де v – середня швидкість у перерізі радіусом r .

Величину dl знайдемо з елементарного трикутника

$$dl = \frac{dr}{\sin \alpha/2}.$$

Величину v можна знайти з рівняння нерозривності:

$$v = v_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2,$$

де v_1 – швидкість на вході в дифузор.

Тоді

$$dh_m = \lambda \frac{dr}{2r \cdot \sin \alpha/2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Інтегруючи вздовж дифузора від r_1 до r_2 , одержуємо

$$\begin{aligned} \Delta h_m &= \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{v_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{v_1^2}{2g} r_1^4 \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{r_1^4}{r_2^4} \right). \end{aligned}$$

Якщо ступінь розширення дифузора $n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$,

то

$$\frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Остаточно втрати на тертя в дифузорі

$$\Delta h_m = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_1^2}{2g}. \quad (3.55)$$

Друга складова повної втрати енергії в дифузорі $\Delta h_{\text{розши}}$ (втрати на вихороутворення) має таку саму структуру, як і в разі раптового розширення, лише меншу за величиною. Тому для визначення $\Delta h_{\text{розши}}$ використовують формулу (3.46), але з уточнювальним коефіцієнтом k ($k < 1$):

$$\Delta h_{\text{розши}} = k \left(\frac{v_1 - v_2}{2g} \right)^2 = k \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Остаточно

$$\Delta h_{\text{розши}} = k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (3.56)$$

Для дифузорів із кутами розширення α від 5 до 20° величину коефіцієнта k можна визначати за формулою

$$k = \sin \alpha. \quad (3.57)$$

Загальна втрата напору в дифузорі

$$\Delta h_{\text{диф}} = \left[\frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} = \xi_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}. \quad (3.58)$$

Тому

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (3.59)$$

Тобто коефіцієнт опору дифузора залежить від кута розширення дифузора α , коефіцієнта λ і ступеня розширення дифузора n : $\xi_{\text{диф}} = f(\alpha, \lambda, n)$. За умови незмінних значень λ і n , якщо кут розширення дифузора збільшується, втрати напору на тертя Δh_m зменшуються, але втрати від вихороутворення $\Delta h_{\text{рози}}$ зростають. У разі зменшення кута розширення дифузора навпаки: втрати $\Delta h_{\text{рози}}$ зменшуються, але втрати Δh_m зростають. Існує оптимальне значення кута α , для якого коефіцієнт $\xi_{\text{диф}}$ мінімальний. Графік залежності $\xi_{\text{диф}} = f(\alpha)$ подано на рисунку 3.35.

Для $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$ виконується рівняння

$$\frac{d\xi_{\text{диф}}}{d\alpha} = 0.$$

Звідси

$$\alpha_{opt} = \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\lambda}{4}}. \quad (3.60)$$

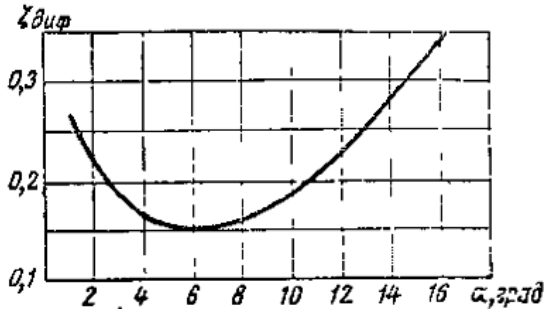


Рисунок 3.35 – Графік залежності $\xi_{diff} = f(\alpha)$

Якщо величина λ змінюється в діапазоні від 0,015 до 0,025, а величина n змінюється від 2 до 4, то оптимальний кут дифузора α_{opt} буде дорівнювати 6° . Це відповідає експериментальним даним.

На практиці для зменшення довжини дифузора за заданого n зазвичай беруть кут розширення дифузора α в діапазоні від 7° до 9° . Це значення кута α є оптимальним для дифузорові із прямою віссю круглого й квадратного перерізів. Для прямокутних дифузорові із розширенням в одній площині оптимальний кут α_{opt} знаходиться в діапазоні від 10° до 12° .

Якщо габарити не дозволяють брати кут α оптимальним, доцільно перейти до спеціальних дифузорові (при α більше ніж 15°). До останніх належать ступінчасті й профільовані дифузори (рис. 3.36).

Ступінчастий дифузор складається зі звичайного дифузора з оптимальним кутом розширення та кутом

раптового розширення. Профільований дифузор забезпечує постійний градієнт тиску вздовж осі дифузора ($dp/dx = const$).

Загальні втрати енергії спеціальних дифузорів значно менші, ніж звичайних, тієї самої довжини та ступеня розширення.

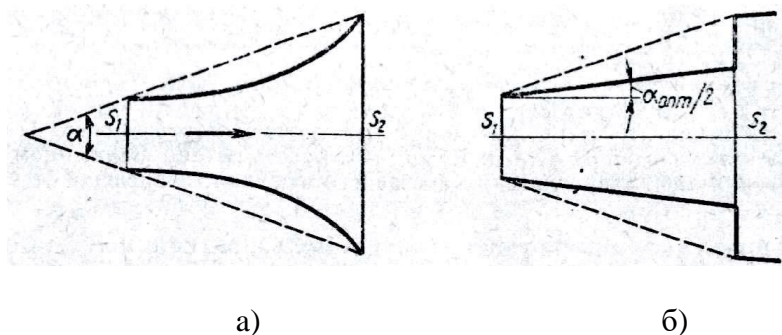


Рисунок 3.36 – Спеціальні дифузори:
а) ступінчастий дифузор;
б) профільований дифузор

3.13.3.5 Поступове звуження каналу

Відрізок каналу, що поступово звужується, називають конфузором (рис. 3.37).

Течія рідини в конфузорі супроводжується зростанням швидкості та зменшенням тиску ($v_1 < v_2$, $p_1 > p_2$), тому немає причин для виникнення вихороутворення й зриву потоку. Тобто в конфузорі актуальні лише втрати на тертя. У зв'язку з цим утрати напору в конфузорі завжди менші від утрат напору в дифузорі за однакових розмірів.

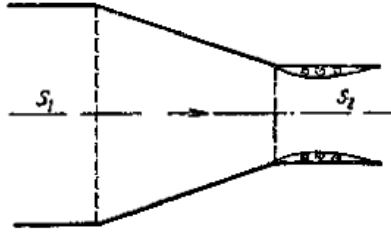


Рисунок 3.37 – Конфузор

Утрату напору на тертя в конфузорі визначають так само, як і для дифузора, за формулою

$$\Delta h_m = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{v_2^2}{2g}. \quad (3.61)$$

Незначні втрати енергії від вихороутворення виникають на виході з конфузора на ділянці з'єднання конічної та циліндричної частин. Для усунення цього явища рекомендують конічну частину з'єднувати з циліндричною плавно.

Плавне звуження потоку називають соплом (рис. 3.38).

Сопло дозволяє мати значний ступінь звуження n за умови незначної довжини конфузора й невеликих втратах. Коефіцієнт опору сопла $\xi_{\text{сопла}}$ змінюється від 0,03 до 0,10 ($\xi_{\text{сопла}} = 0,03 - 0,1$) і залежить від ступеня звуження й числа Re: більшим значенням числа Re відповідають менші величини $\xi_{\text{сопла}}$ та навпаки.

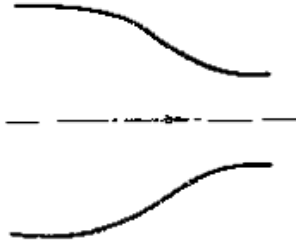


Рисунок 3.38 – Сопло

3.13.3.6 Поворот потоку

Поворот потоку може бути раптовим і поступовим (плавним). Раптовий поворот потоку обумовлює значні втрати енергії (рис. 3.39).

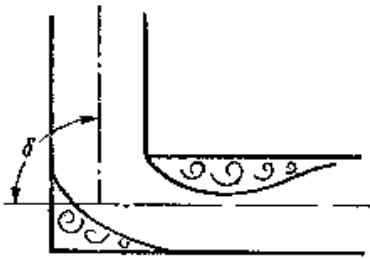


Рисунок 3.39 – Раптовий поворот потоку

Причина втрат енергії – зони вихороутворення й тертя (внутрішнього та зовнішнього). Утрати енергії визначають за формулою

$$\Delta h_{нов} = \xi_{нов} \frac{v^2}{2g}, \quad (3.62)$$

де $\xi_{нов}$ – коефіцієнт опору під час повороту потоку.

Коефіцієнт опору $\xi_{нов}$ залежить від кута повороту потоку δ : чим більший кут δ , тим більше значення $\xi_{нов}$.

Для круглого перерізу коефіцієнт опору $\xi_{нов}$ зростає зі збільшенням кута δ до значення $\xi_{нов} = 1,0$ за $\delta = 90^\circ$ (рис. 3.40).

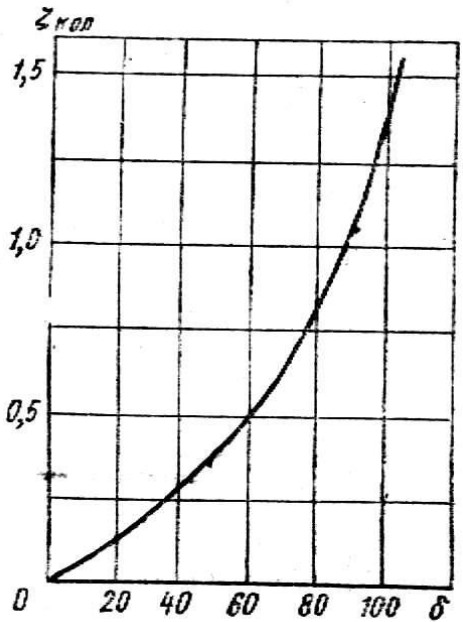


Рисунок 3.40 – Графік залежності $\xi_{нов} = f(\delta)$

Поступовий поворот потоку називають відводом (рис. 3.41).

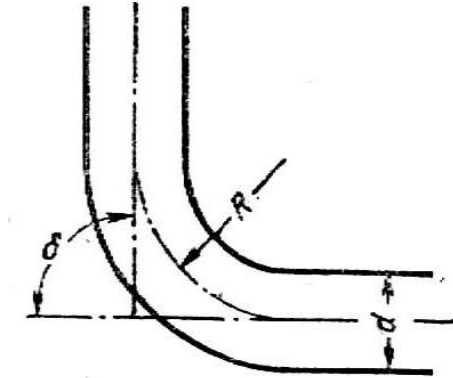


Рисунок 3.41 – Відвід

Поступовий (плавний) поворот потоку значно зменшує вихороутворення щодо раптового повороту, тому $\zeta_{пов. пл.} < \zeta_{пов}$. Величина коефіцієнта опору відводу $\zeta_{пов. пл}$ залежить від співвідношення R/d , величини кута α і форми перерізу каналу.

Для відводу круглого перерізу з кутом повороту $\alpha = 90^\circ$ і $R/d \gg 1$ за умови турбулентного режиму можна користуватися емпіричною формулою:

$$\zeta'_{пов. пл} = 0,051 + \frac{d}{R}. \quad (3.63)$$

Для кутів $\alpha \leq 70^\circ$ коефіцієнт опору $\zeta_{пов. пл}$ визначають за формулою

$$\zeta_{пов. пл} = 0,9 \sin \alpha \zeta'_{пов. пл}. \quad (3.64)$$

Для кутів $\alpha \geq 100^\circ$ коефіцієнт опору $\xi_{пов. пл}$ визначають за формулою

$$\xi_{пов. пл} = \left(0,7 + \frac{\alpha}{90} 0,35 \right) \xi'_{пов. пл}. \quad (3.65)$$

Утрата напору, що визначається коефіцієнтом $\xi_{пов. пл}$, урахує лише додатковий опір, що обумовлює поворот потоку. Тому для розрахунків трубопроводів, що мають відводи, їх довжину необхідно врахувати в загальну довжину трубопроводу, для якої визначають утрати на тертя, і до них додати втрати відводу.

Необхідно зауважити, що в разі ламінарного потоку теорема Борда – Карно не виконується; у разі турбулентного потоку вона надійно виконується за умови чисел Рейнольдса, більших від 500 ($Re \geq 3\,500$).

Коефіцієнти місцевого опору за ламінарного потоку ми не розглядаємо, оскільки в інженерній практиці такі ситуації майже не трапляються. Загалом залежності будуть іншими.

Інколи величину втрат на місцевих опорах замінюють довжиною еквівалентної труби $l_{екв}$, на якій утрати по довжині дорівнюють очікуваним утратам на місцевих опорах.

Тоді розрахункова довжина трубопроводу

$$l_{розр} = l_{факт} + l_{екв}. \quad (3.66)$$

Числові значення $l_{екв}$ наводять у довідниках.

3.14 Ламінарна течія в круглій циліндричній трубі

Під час ламінарної течії частинки рідини рухаються шарами, паралельно одна одній без перемішування, рух упорядкований. У круглій циліндричній трубі ламінарний режим руху встановлюється за умови чисел Рейнольдса, менших від 2320 ($Re \leq 2320$). Теорія ламінарної течії ґрунтується на законі тертя Ньютона:

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dn}.$$

Розглянемо ustalений ламінарний рух рідини в прямій горизонтальній круглій циліндричній трубі з внутрішнім діаметром $d = 2r_0$. Виділимо відрізок потоку довжиною l між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 3.42).

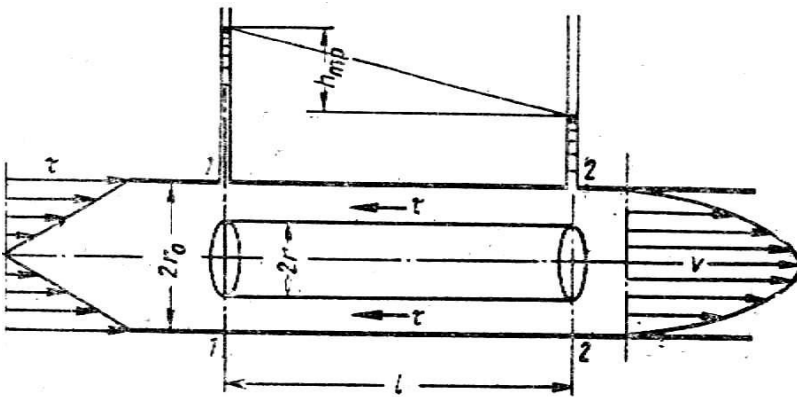


Рисунок 3.42 – Усталений ламінарний рух

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{no}.$$

У цьому разі $z_1 = z_2$, $\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$ (труба

горизонтальна, діаметр труби однаковий для перерізів 1-1 і 2-2), тому

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \Delta h_{no}.$$

Тобто втрати напору Δh_{no} на тертя визначають за формулою

$$\Delta h_{no} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \quad (3.67)$$

У потоці рідини вздовж осі труби виділимо циліндричний об'єм радіусом r , довжиною l з основами в перерізах 1-1 і 2-2. Складемо рівняння рівноваги (сума сил тиску й тертя дорівнює нулю) для виділеного об'єму:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0.$$

Звідси знайдемо τ :

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} r. \quad (3.68)$$

Тобто дотичне напруження в перерізі труби змінюється за лінійною функцією від радіуса r :
 $\tau = f(r)$.

Із (3.68) випливає таке: якщо $r = 0$, то $\tau = 0$; якщо $r = r_0$, то

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} = \tau_{\max}.$$

Епюру дотичних напружень зображено на рисунку 3.42.

Для визначення закону розподілу швидкості в перерізі круглої труби під час ламінарної течії підставимо значення τ з виразу (3.68) у закон тертя Ньютона. Тоді

$$\frac{p_1 - p_2}{2l} r = -\mu \frac{dv}{dr},$$

або

$$\frac{\Delta p}{2l} r = -\mu \frac{dv}{dr}.$$

Звідси

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr.$$

Після інтегрування одержуємо

$$v = \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} \cdot \frac{r^2}{2} + c,$$

або

$$v = \frac{\Delta p}{2\mu l} \cdot \frac{r^2}{2} + c. \quad (3.69)$$

Знайдемо сталу інтегрування c . Якщо $r = r_0$, то $v = 0$. Тому

$$-\frac{\Delta p}{4\mu l} r_0^2 + c = 0.$$

Звідси

$$c = \frac{\Delta p}{4\mu l} r_0^2. \quad (3.70)$$

Підставляючи (3.70) в (3.69), одержимо

$$v = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + \frac{\Delta p}{4\mu l} r_0^2. \quad (3.71)$$

Вираз (3.71) є законом розподілу швидкості в круглій циліндричній трубі під час ламінарного руху рідини. Графічно цей закон зображують параболою другого ступеня.

Максимальна швидкість актуальна в центрі перерізу за умови $r = 0$, її визначають за формулою

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} r_0^2. \quad (3.72)$$

Відношення $\Delta p/l$ – це гідравлічний (п'єзометричний) похил, помножений на γ . Ця величина є сталою вздовж труби однакового діаметра.

Використаємо знайдений закон розподілу швидкості (3.71) для визначення витрати Q .

Елементарна витрата dQ через елементарну площу dS :

$$dQ = v dS.$$

Розглянемо випадок, коли dS становить кільце радіусом r і товщиною dr (рис. 3.43).

Тоді елементарну витрату dQ можна визначити за формулою

$$dQ = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

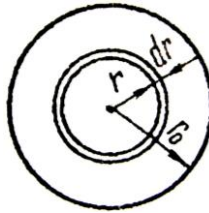


Рисунок 3.43 – До визначення витрати Q

Інтегруючи по площі перерізу від $r = 0$ до $r = r_0$, одержуємо

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr.$$

Остаточно

$$Q = \frac{\Delta p}{8\mu l} \pi r_0^4. \quad (3.73)$$

Середня швидкість у перерізі

$$v_{\text{сер}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\Delta p \pi r_0^4}{8 \mu l \pi r_0^2}.$$

Остаточно

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta p}{8 \mu l} r_0^2. \quad (3.74)$$

Якщо порівняти вирази (3.72) й (3.74), можна зробити висновок, що

$$v_{\text{сер}} = \frac{1}{2} v_{\text{макс}}. \quad (3.75)$$

Визначимо величину втрат енергії по довжині $\Delta h_{\text{нд}}$. Раніше з рівняння Бернуллі було встановлено, що

$$\Delta h_{\text{нд}} = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

З формули (3.73) знайдемо величину Δp :

$$\Delta p = \frac{8 \mu l Q}{\pi r_0^4}.$$

Тоді

$$\Delta h_{\text{нд}} = \frac{8 \mu l Q}{\pi r_0^4 \rho g}. \quad (3.76)$$

Підставляючи в (3.76) кінематичну в'язкість $\nu = \mu\rho$ і діаметр $d_0 = 2r_0$, одержуємо вираз

$$\Delta h_{nd} = \frac{128\nu l Q}{\pi g d_0^4}. \quad (3.77)$$

Аналізуючи (3.77), можна зробити висновок: у разі ламінарної течії в циліндричній трубі круглого перерізу втрати енергії пропорційні довжині труби l , витраті Q , кінематичній в'язкості ν та обернено пропорційні діаметру труби d_0 , піднесеному до четвертого степеня. Вираз (3.77) називають законом Пуазейля й використовують для розрахунків трубопроводу під час ламінарної течії.

Раніше ми одержали вираз для визначення втрат по довжині:

$$\Delta h_{nd} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cep}^2}{2g}.$$

Витрату Q для труби діаметром d_0 визначають за формулою

$$Q = v_{cep} \frac{\pi d_0^2}{4}.$$

Підставляючи у вираз (3.77) значення Q , знайдемо коефіцієнт λ :

$$\begin{aligned} \Delta h_{\text{но}} &= \frac{128\nu l \frac{\pi d_0^2}{4} v_{\text{сеп}}}{\pi d_0^4 g} = \frac{64\nu l v_{\text{сеп}}}{2g d_0^2} = \frac{64\nu l v_{\text{сеп}}^2}{2g d_0^2 v_{\text{сеп}}} = \\ &= \frac{64\nu}{v_{\text{сеп}} d_0} \frac{l}{d_0} \frac{v_{\text{сеп}}^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re } d_0} \frac{l}{2g} \frac{v_{\text{сеп}}^2}{2g} = \lambda_{\text{л}} \frac{l}{d_0} \frac{v_{\text{сеп}}^2}{2g} . \end{aligned}$$

Тобто

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{64}{\text{Re}} . \quad (3.78)$$

Вираз (3.78) є формулою Дарсі – Вейсбаха для визначення коефіцієнта опору по довжині за ламінарної течії.

Знаючи закон розподілу швидкості по перерізу трубки (рівняння (3.71) і зв'язок між середньою швидкістю $v_{\text{сеп}}$ та втратою напору Δp (рівняння (3.74)), знайдемо коефіцієнт Коріоліса α , що дозволяє враховувати нерівномірність розподілу швидкості для ламінарної течії в круглій циліндричній трубці:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E_{\text{к.в}}}{E_{\text{к.}v_{\text{сеп}}}} = \frac{mv^2 \cdot 2}{2mv_{\text{сеп}}^2} = \frac{\rho Q v^2}{\rho Q v_{\text{сеп}}^2} = \\ &= \frac{\int_{\omega} \rho v d\omega}{\rho \omega v_{\text{сеп}} v_{\text{сеп}}^2} = \frac{1}{\omega v_{\text{сеп}}^3} \int_{\omega} v^3 d\omega . \end{aligned}$$

Ураховуючи $\omega = \pi r_0^2$, $d\omega = 2\pi r dr$ і вирази (3.71), (3.74) для визначення υ і $\upsilon_{\text{сер}}$, одержуємо

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} \left[\frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \right]^3 2\pi r dr}{\pi r_0^2 \left(\frac{\Delta p}{8\mu l} r_0^2 \right)^3} = 16 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^3 \frac{r dr}{r_0^2}.$$

Уведемо заміну

$$1 - \frac{r^2}{r_0^2} = z.$$

Тоді

$$\alpha = -8 \int_1^0 z^3 dz = 2 \left| z^4 \right|_0^1 = 2.$$

Тобто кінетична енергія ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкості вдвічі більша від кінетичної енергії того самого потоку, але з рівномірним розподілом швидкості:

$$\alpha_{\text{лам}} = 2. \quad (3.79)$$

Необхідно зауважити, що одержані результати добре відповідають експериментальним дослідженням. Тобто відповідають дійсності й не вимагають ніяких поправок, за винятком таких ситуацій:

а) у разі дуже великих змін тиску Δp (ламінарна течія в зазорах і капілярах);

б) за наявності інтенсивного теплообміну із зовнішнім середовищем під час руху рідини

трубопроводом (якщо температура рідини, що рухається, значно відрізняється від температури зовнішнього середовища);

в) у коротких трубах.

Під час ламінарної течії рідини з резервуара в трубу розподіл швидкості на вході в трубу є рівномірним. Перерозподіл швидкості в параболу відбувається під дією сил в'язкості та зумовлене необхідністю проходження через незмінну площу цієї витрати (рис. 3.44).

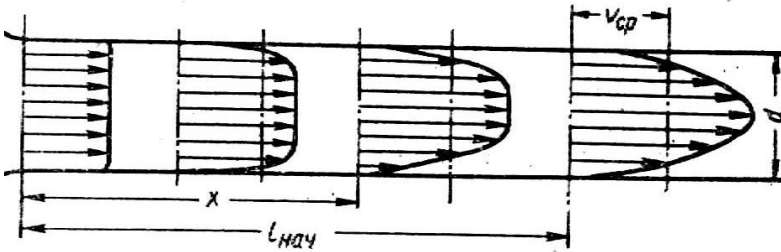


Рисунок 3.44 – Розподіл швидкості під час ламінарної течії

Ділянку труби, де встановлений параболічний розподіл швидкості, називають початковою ділянкою ламінарної течії. Для визначення довжини початкової ділянки користуються формулою Шіллера:

$$l_{\text{поч}} = 0,029d \text{ Re} . \quad (3.80)$$

У разі якщо $\text{Re} = 2\,320$, одержуємо максимально можливу довжину початкової ділянки

$$l_{\text{поч.маx}} = 66,5d . \quad (3.81)$$

Утрату напору для ділянки труби довжиною $l \leq l_{\text{поч}}$ визначають за формулами (3.77) і (3.78), але з уточнювальним коефіцієнтом k , що враховує збільшення опору на початковій ділянці труби. Для коротких труб величина коефіцієнта k значно відрізняється від одиниці.

Коефіцієнт опору λ для початкової ділянки труби визначають за формулою

$$\lambda_{\text{поч}} = k \frac{64}{\text{Re}} . \quad (3.82)$$

3.15 Втрати енергії по довжині під час турбулентного руху рідини

Раніше було визначено, що втрати енергії під час руху рідини між перерізами 1-1 і 2-2 складаються з утрат на місцевих опорах і втрат по довжині:

$$\Delta h_{1-2} = \Delta h_{\text{м}} + \Delta h_{\text{нд}} .$$

Утрати на місцевих опорах визначають за формулою

$$\Delta h_{\text{м}} = \xi_{\text{м}} \frac{v_{\text{сеп}}^2}{2g} ,$$

де $\xi_{\text{м}}$ – коефіцієнт утрат енергії на місцевих опорах.

Утрати енергії по довжині визначають за формулою

$$\Delta h_{no} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cep}^2}{2g},$$

де λ – коефіцієнт утрат енергії по довжині.

Для ламінарної течії в круглій циліндричній трубі

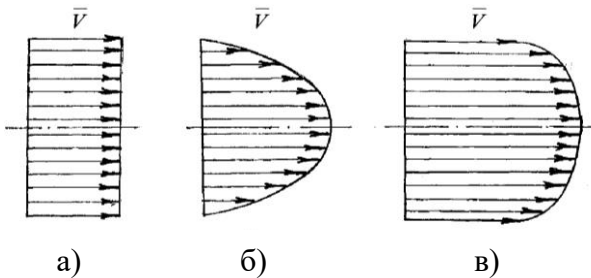
$$\lambda_l = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Закон розподілу швидкості за ламінарної течії

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2).$$

Для турбулентної течії характерне перемішування частинок рідини, пульсації швидкості й тиску. Якщо виконується умова, що середні значення швидкості, тиску й повної витрати не змінюються з часом, турбулентний рух рідини можна вважати усталеним.

Раніше було встановлено, що між профілем швидкості й законом опору існує прямий зв'язок. На рисунку 3.45 зображені профілі швидкості для ідеальної, ламінарної та турбулентної течій.



Рисунк 3.45 – Профілі швидкості: а) ідеальної течії; б) ламінарної течії; в) турбулентної течії

Якщо порівняти профілі швидкості для ламінарної й турбулентної течій, можна зробити висновок: розподіл швидкості під час турбулентної течії більш рівномірний, ніж під час ламінарної. Зростання швидкості біля стінок трубопроводу відбувається швидше, ніж у разі ламінарної течії. Тому коефіцієнт α_T , що враховує нерівномірність розподілу швидкості по перерізу потоку, за умови турбулентної течії значно менший. Він залежить від числа Рейнольдса ($\alpha_T = f(Re)$) і має значення від $\alpha_T = 1,13$, якщо $Re = Re_{кр}$, до $\alpha_T = 1,025$ за умови $Re = 3 \cdot 10^6$. Графік залежності коефіцієнта α від числа Re подано на рисунку 3.46.

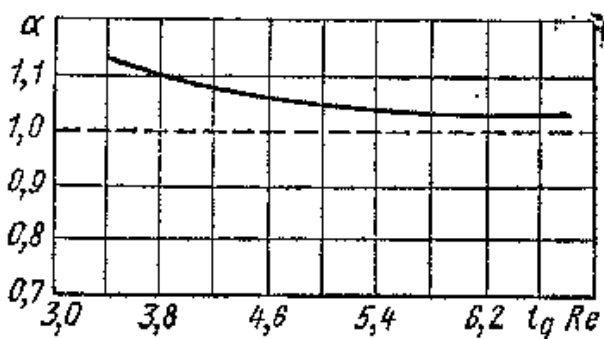


Рисунок 3.46 – Залежність $\alpha_T = f(Re)$

Втрати енергії під час турбулентної течії рідини теж відрізняються від утрат енергії за умови ламінарної течії – для однакових параметрів потоку втрати енергії на тертя по довжині в турбулентному потоці значно більші. Збільшення втрат пов'язано з вихороутворенням. Якщо під час ламінарної течії втрати енергії по довжині зростають

пропорційно швидкості в першому ступені, то в разі турбулентної течії – у другому (рис. 3.47).

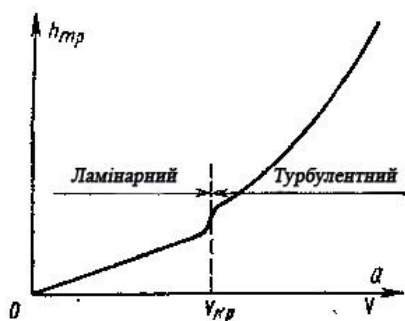


Рисунок 3.47 – Втрати енергії по довжині залежно від режиму течії

Для практичних розрахунків турбулентного потоку в круглих трубах користуються систематизованими експериментальними даними. Існує декілька емпіричних і напівемпіричних формул для визначення коефіцієнта втрат енергії для турбулентної течії λ_T .

Методом оброблення численних експериментальних даних для турбулентної течії, якщо число Рейнольдса $Re_{кр} < Re < 5 \cdot 10^4$, Блазіус запропонував таку формулу:

$$\lambda_T = \frac{a}{Re^m} . \quad (3.83)$$

Для гідравлічно гладких труб $a = 0,3164$; $m = 0,25$. Тоді формула Блазіуса матиме такий вигляд:

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} . \quad (3.84)$$

Пізніше дослідження показали, що величина показника m залежить від числа Рейнольдса Re й показника ступеня параболи епюри швидкості n (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Залежність $m = f(Re, n)$

Re	n	m
$4 \cdot 10^3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$
$1,14 \cdot 10^5$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$
$4 \cdot 10^5$	$\frac{1}{8,5}$	$\frac{2}{9,5}$
$3,2 \cdot 10^6$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{11}$

Для визначення коефіцієнтів m і a користуються емпіричними формулами:

$$m = \frac{2n}{n+1}, \quad (3.85)$$

$$a = 2^{\frac{5n+1}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \left[(n+1)(n+2) \right]^{\frac{2}{n+1}}. \quad (3.86)$$

Дослідник П. К. Конаков запропонував більш універсальну формулу:

$$\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}. \quad (3.87)$$

Формулою (3.87) можна користуватися за чисел Рейнольдса $Re_{кр} \leq Re < 10^6$, тобто практично без обмежень.

Аналізуючи формули (3.83), (3.84) і (3.85), можна зробити висновок, що в разі збільшення числа Рейнольдса коефіцієнт утрат енергії λ_T зменшується значно повільніше, ніж коефіцієнт утрат енергії λ_L за ламінарної течії (рис. 3.48).

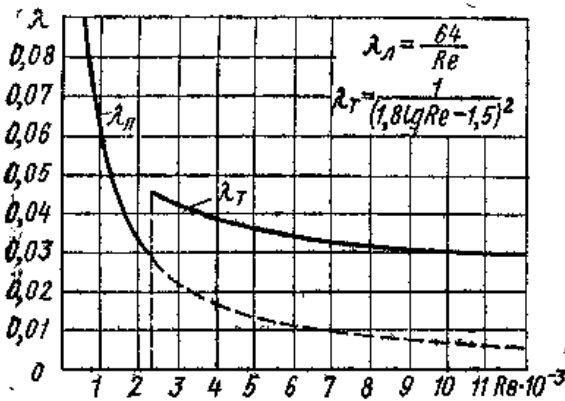


Рисунок 3.48 – Залежності $\lambda_L = f(Re)$ і $\lambda_T = f(Re)$

Різниця в законах зміни коефіцієнтів λ_L і λ_T пов'язана зі значно меншим впливом в'язкості рідини на опір у турбулентному потоці. Утрати енергії в разі турбулентної течії обумовлені перемішуванням і перенесенням кількості руху кожної частинки рідини.

Необхідно зауважити, що наведені формули для визначення λ_T справедливі для гідравлічно гладких труб, тобто таких, шорсткість поверхонь яких практично не впливає на величину втрат енергії Δh_{no} .

До гідравлічно гладких труб відносять суцільнотягнуті труби з кольорових металів, високоякісні безшовні сталеві труби, тобто труби, які використовують як паливопроводи й гідросистеми, у звичайних умовах їх можна вважати гідравлічно гладкими й для їх розрахунків користуватися вищенаведеними формулами.

Дослідження багатьох учених (Нікурадзе, Гурнієнко, Рейхардта та ін.) доводять, що в разі турбулентної течії рідини поблизу стінок труби виникає в'язкий примежовий шар δ (рис. 3.49).

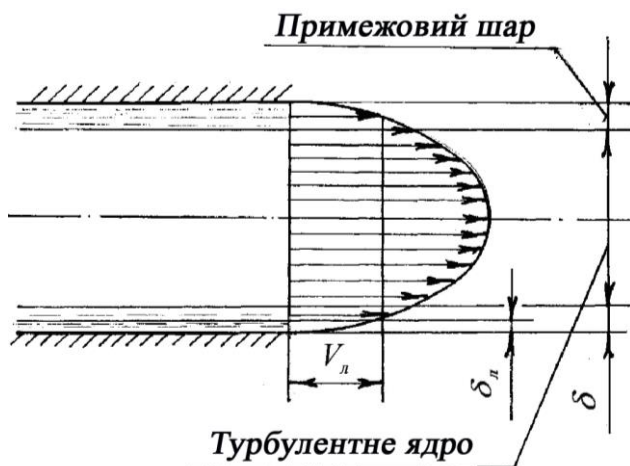


Рисунок 3.49 – В'язкий примежовий шар

Примежовий шар δ_n – це шар рідини чи газу, що прилягає до поверхні твердого тіла і в якому

спостерігається різке зростання швидкості від нуля ($v = 0$) до швидкості потоку ($v_{\lambda} = (0,95 - 0,97)v_{\text{поток}}$). Товщина примежового шару δ_{λ} дуже мала. Рух рідини в ньому відбувається без перемішування, повільно, шарами, тобто ламінарно. Важливо, що число Рейнольдса, яке розраховане по товщині δ_{λ} , за швидкістю v_{λ} і кінематичним коефіцієнтом ν , є величиною сталою:

$$Re = \frac{\delta_{\lambda} \cdot v_{\lambda}}{\nu} = const . \quad (3.88)$$

З (3.88) випливає: якщо швидкість потоку збільшується (збільшується Re), також зростає швидкість v_{λ} , а товщина ламінарного шару δ_{λ} зменшується. Тому за великих чисел Рейнольдса ламінарний шар δ_{λ} практично зникає.

У межах примежового шару напруження в'язкого тертя значно більше від напружень, що виникають під дією сил інерції. Інше відбувається в турбулентному ядрі, де дотичні напруження від турбулентного перемішування в багато разів більші, ніж напруження в'язкого тертя. У межах від δ_{λ} до δ зменшуються напруження в'язкого тертя та збільшуються дотичні напруження.

Будь-яка тверда поверхня має ту чи іншу шорсткість Δ (рис. 3.50).

Якщо $\delta_{\lambda} > \Delta$, то поверхню вважають гідравлічно гладкою.

Якщо $\delta_{\lambda} < \Delta$ – гідравлічно шорсткою.

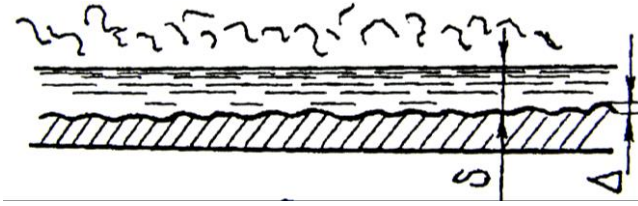


Рисунок 3.50 – До визначення гідравлічної гладкості поверхні

Для розрахунків трубопроводів важливо знати не абсолютну шорсткість Δ , а відносну Δ/d_0 , оскільки та сама абсолютна шорсткість може не впливати на опір труби великого діаметра, а, навпаки, значно збільшувати опір труби малого діаметра.

Крім того, на опір поверхні труби впливає характер шорсткості – рівномірний чи нерівномірний розподіл виступів шорсткості.

Отже, для рівномірного розподілу виступів шорсткості коефіцієнт λ_r залежить не лише від числа Re , а й від відносної шорсткості Δ/d_0 :

$$\lambda_r = f\left(Re, \frac{\Delta}{d_0}\right).$$

Нікурадзе провів дослідження впливу на опір труб зміни величини відносної шорсткості й числа Рейнольдса в широкому діапазоні: Δ/r_0 – від 1/500 до 1/15, Re – від 500 до 10^6 .

Дослідження Нікурадзе проводили в трубах зі штучною рівномірною шорсткістю, наклеєною на стінки труби у вигляді піщинок однакового розміру.

Результати дослідження Нікурадзе показано у вигляді графіка на рисунку 3.51.

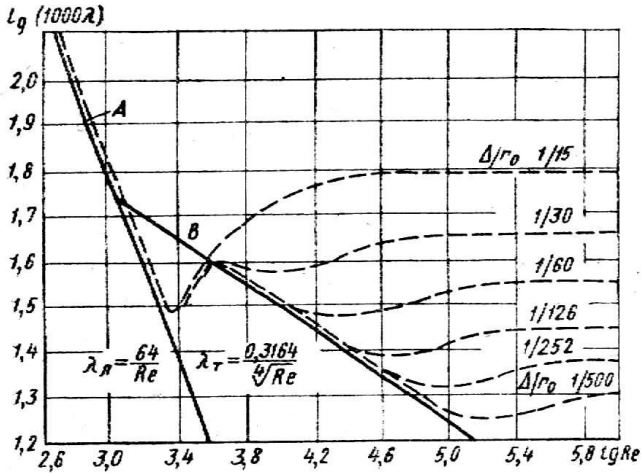


Рисунок 3.51 – Графіки Нікурадзе

Аналізуючи графік із рисунка 3.51, можна зробити такі висновки:

а) під час ламінарної течії шорсткість на опір не впливає (область А на рис. 3.51):

$$\lambda_n = \frac{64}{Re};$$

б) критичне число Рейнольдса практично не залежить від шорсткості;

в) в області турбулентної течії за малих значень Re і Δ/r_0 шорсткість на опір не впливає:

$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}};$$

г) під час збільшення числа Рейнольдса Re шорсткість починає впливати на опір труб (область В на рис. 3.51):

$$\lambda_T = f \left(Re, \frac{\Delta}{d_0} \right);$$

г) за великих значень числа Рейнольдса і відносної шорсткості коефіцієнт λ_T не залежить від числа Re й стає сталою величиною для конкретної відносної шорсткості:

$$\lambda_T = f \left(\frac{\Delta}{d_0} \right).$$

Таку область також називають областю автотельності, або областю квадратичної залежності втрат енергії від швидкості:

$$\Delta h_{no} = \lambda \frac{l v_{cep}^2}{d 2g}.$$

Для визначення λ_T квадратичної зони найбільш достовірною формулою

$$\frac{1}{\lambda_T} = 2 \lg \frac{r}{\Delta} + 1,74.$$

Для практичних розрахунків значення коефіцієнта λ_T визначають за допомогою експериментальних графіків І. Нікурадзе і Г. Муріна.

Оскільки фактична висота виступів шорсткості неоднакова, уводять поняття еквівалентної шорсткості $\Delta_{екв}$, тобто такої рівномірної шорсткості, що дає під час розрахунків однакове із заданою шорсткістю значення коефіцієнта λ_T . Для визначення λ_T шорстких труб можна рекомендувати також універсальну формулу Альтшуля:

$$\lambda_T = 0,1 \left(\frac{1,46\Delta_{екв}}{d_0} + \frac{100}{Re} \right)^{0,25} \approx 0,11 \left(\frac{\Delta_{екв}}{d_0} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}.$$

За умови чисел Рейнольдса $Re < 10 \frac{d_0}{\Delta_{екв}}$ використовують формулу Блазіуса:

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}.$$

Для режиму автомодельності за умови $Re > 500 \frac{d_0}{\Delta_{екв}}$ коефіцієнт опору λ_T визначають за формулою Шифрінсона:

$$\lambda_T = 0,11 \left(\frac{\Delta_{екв}}{d_0} \right)^{0,25}.$$

Отже, порівнюючи величини відношення $\frac{d_0}{\Delta_{екв}}$ з числом Рейнольдса Re , можна встановити область

турбулентної течії в шорстких трубах і вирішити питання вибору залежності для розрахунку трубопроводів.

Довгий час єдиним способом розрахунку втрат енергії за умови турбулентної сталої течії був спосіб розрахунку за допомогою формули Шезі (французький інженер Шезі узагальнив численні експерименти та опублікував свою формулу в 1790 році).

Унаслідок того, що розрахунки для області автомодельності значно простіші, а в разі проектування гідросистем рідина зазвичай має досить великі швидкості, на практиці будемо цікавитися квадратичною областю турбулентної течії.

Для квадратичної області турбулентної течії втрати енергії по довжині

$$\Delta h_{no} = \lambda \frac{l}{R_r} \frac{v^2}{2g},$$

звідси

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda} R_r \frac{\Delta h_{no}}{l}}.$$

Відомо, що відношення $\Delta h/l$ є гідравлічним похилом I .

Підставляючи $\frac{\Delta h}{l} = I$, одержуємо

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \cdot \sqrt{R_r \cdot I},$$

або

$$v = C\sqrt{R_r \cdot I},$$

де v – середня швидкість у живому перерізі;

R_r – гідравлічний радіус;

I – гідравлічний похил;

C – коефіцієнт опору Шезі.

На практиці коефіцієнт опору C прийнято визначати за формулою Павловського:

$$C = \frac{1}{n} R_r^y,$$

де $y = f(R_r, n)$.

Величину y визначають за емпіричною формулою:

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R_r}(\sqrt{n} - 0,1),$$

де n – коефіцієнт шорсткості.

Величину n визначають із довідників. Наприклад, для нових чавунних труб $n = 0,011$; для водопровідних труб у нормальних умовах $n = 0,012$.

3.16 Гідравлічний розрахунок трубопроводів

Трубопровід – це інженерна споруда, побудована для забезпечення подання рідини або газу з одного місця (джерела) в інше до споживача.

Трубопроводи бувають таких видів:

а) короткий – це трубопровід, для якого втрати напору на місцевих опорах становлять не менше ніж 5–10 % від загальних утрат;

б) довгий – це трубопровід, для якого втрати напору по довжині становлять не менше ніж 90–95 % від загальних утрат, тобто втрати енергії по довжині значно більші за втрати на місцевих опорах;

в) простий – це трубопровід без розгалуження. Тобто всі частини трубопроводу розміщені послідовно (рис. 3.52);

г) складний – це трубопровід, що має хоча б одне розгалуження. Наприклад, трубопровід із паралельним розгалуженням (рис. 3.53).

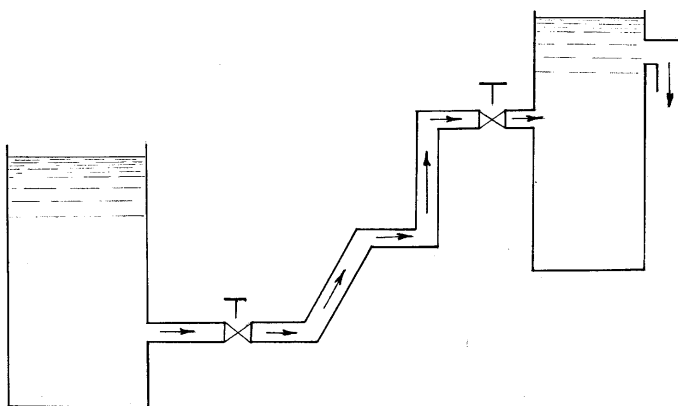


Рисунок 3.52 – Простий трубопровід

Мета гідравлічного розрахунку трубопроводу є двох видів:

а) визначення геометричних розмірів трубопроводу, що забезпечують задану витрату Q . У цьому разі задається витрата трубопроводу Q , напір на вході в

трубопровід H_1 , напір на виході з трубопроводу H_2 , місцеві опори та їх розміщення;

б) розрахунок параметрів трубопроводу – визначення витрати Q , напору на вході H_1 і виході H_2 за заданими геометричними параметрами (конфігурацією трубопроводу, довжиною ділянок, розміщенням місцевих опорів).

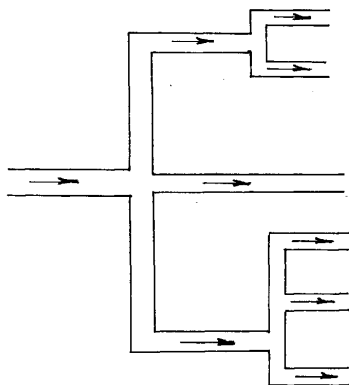


Рисунок 3.53 – Складний трубопровід

Характеристика трубопроводу – це залежність його сумарного опору від величини витрати рідини, що буде проходити через цей трубопровід.

На рисунку 3.54 зображені характеристики різних трубопроводів за турбулентної течії ($\sum \Delta h = f(Q)$).

Опір трубопроводу складається із втрат по довжині Δh_{no} і втрат на місцевих опорах Δh_m :

$$\Delta h_{no} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

$$\Delta h_m = \xi_m \frac{v^2}{2g}.$$

Тоді сумарний опір трубопроводу

$$\sum \Delta h = \left(\sum \xi_i + \sum \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}.$$

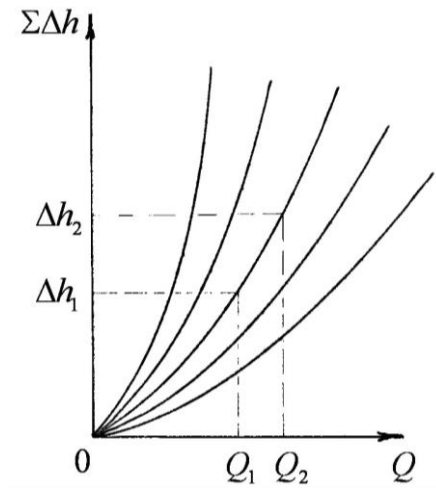


Рисунок 3.54 – Характеристики трубопроводів

Водночас витрата Q залежить від швидкості руху рідини по трубопроводу v та площі перерізу трубопроводу ω :

$$Q = v \cdot \omega.$$

Тому характеристика трубопроводу в разі турбулентної течії має вигляд параболи другого ступеня.

Той самий трубопровід може пропускати різну витрату Q , але зі зростанням витрати Q зростає й опір трубопроводу. Щоб подолати опір, рідині необхідно надати необхідної енергії. Останнє забезпечується величиною напору на вході в трубопровід H_1 або за рахунок зміни величини місцевого опору ξ_m (наприклад, за рахунок відкриття засувки).

Розрахунок трубопроводів ґрунтується на використанні рівняння Бернуллі й рівняння нерозривності потоку.

Для прикладу виконаємо розрахунок трубопроводу, схему якого подано на рисунку 3.55.

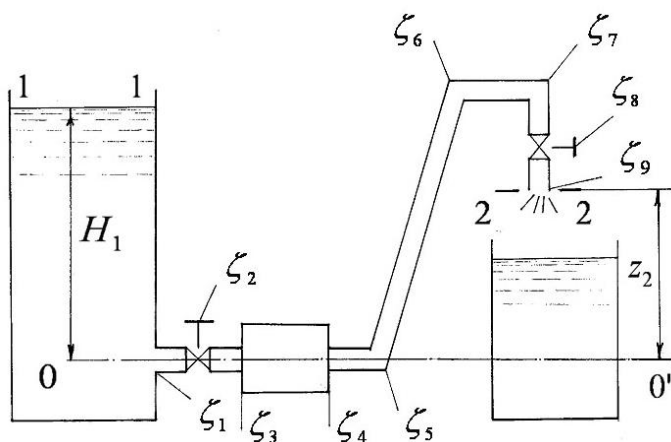


Рисунок 3.55 – До використання рівняння Бернуллі для розрахунку трубопроводів

Розглянемо приклад, коли величина напору на початку трубопроводу H_1 відома. Крім того, відомі геометричні параметри трубопроводу й розміщення

місцевих опорів. Необхідно визначити витрату Q , що буде забезпечувати цей трубопровід. Розрахунок проводять у такому порядку:

а) вибирають площину порівняння. У цьому разі це горизонтальна площина $0-0$;

б) вибирають характерні перерізи $1-1$ (ω_1) і $2-2$ (ω_2) так, щоб для них були максимально відомі величини тиску та швидкості;

в) складають рівняння Бернуллі для перерізів $1-1$ (ω_1) і $2-2$ (ω_2):

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}.$$

У цьому разі $v_1 = 0$, $p_1 = p_2 = p_{атм}$. Тому рівняння можна записати у вигляді

$$H_1 = z_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2};$$

г) визначають сумарні втрати енергії між перерізами $1-1$ і $2-2$ (опір трубопроводу):

$$\sum \Delta h_{1-2} = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 + \xi_9 + \sum \lambda \frac{l_i}{d_i}) \frac{v_2^2}{2g};$$

г) визначають величину швидкості v_2 ;

д) визначають величину витрати Q .

Розглянемо інший приклад, коли необхідно визначити, за якої величини напору на початку трубопроводу H_1 можна буде забезпечити задану витрату Q .

У цьому разі розрахунок проводять у такому порядку:

а) як і в першому випадку, вибирають площину порівняння, характерні перерізи й складають рівняння Бернуллі для обраних перерізів;

б) визначають усі коефіцієнти втрат на місцевих опорах і по довжині (ξ_i і $\lambda_i \frac{l_i}{d_i}$);

в) для різних значень витрати Q ($Q = Q_1, Q_2, Q_3, \dots$) підраховують відповідні значення швидкості v ($v = v_1, v_2, v_3, \dots$) і будують характеристику трубопроводу $\sum \Delta h_{1-2} = f(Q)$.

Для прикладу турбулентної течії характеристику трубопроводу зображено на рисунку 3.56.

Характеристику трубопроводу з урахуванням геометричної висоти розміщення характерних перерізів 1-1 (ω_1) і 2-2 (ω_2) доцільно подати у вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum \Delta h_{1-2}.$$

Або, вважаючи, що $\alpha_1 = \alpha_2$, і не враховуючи швидкісних напорів, у вигляді

$$\frac{p_1}{\gamma} = (z_2 - z_1) + \frac{p_2}{\gamma} + \sum \Delta h_{1-2}.$$

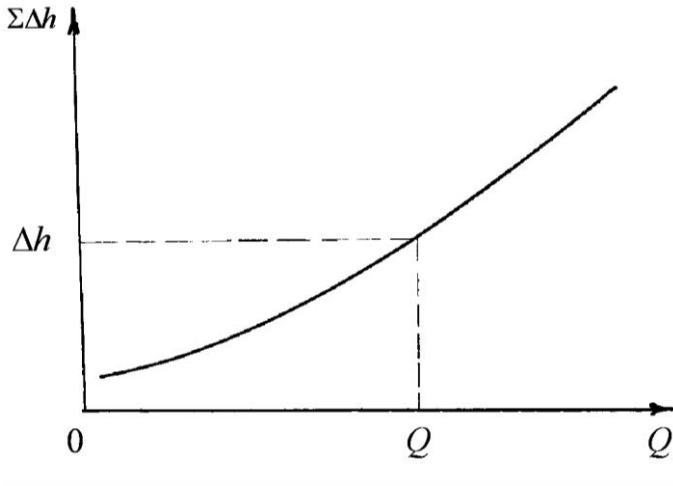


Рисунок 3.56 – Характеристика трубопроводу

П'езометричну висоту p_1/γ у лівій частині рівняння називають потрібним напором $H_{номп}$. У правій частині рівняння перші два додатки – це гідростатичний напір, який необхідно створити на вході в трубопровід, щоб рідина подолала відстань $(z_2 - z_1)$ і мала в кінці тиск p_2/γ . Утрати напору між перерізами 1-1 і 2-2 можна подати як степеневу функцію від витрати. Тоді

$$H_{номп} = (z_1 - z_2) + \frac{p_2}{\gamma} + k \cdot Q^m,$$

або

$$H_{номп} = H_{см} + k \cdot Q^m, \quad (3.89)$$

де H_{cm} – статичний напір;

k – сумарний опір мережі (трубопроводу);

m – показник ступеня, що залежить від конкретного трубопроводу і режиму течії:

$$m = f\left(\xi, \lambda \frac{l}{d}, \text{Re}, Q, \nu\right).$$

Для ламінарної течії

$$\sum \Delta h_{1-2} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l_{\text{розр}}}{d} \cdot \frac{\nu^2}{2g} = \frac{128M_{\text{розр}}Q}{\pi g d^4}.$$

Тобто коефіцієнт k й показник m для ламінарної течії визначають за формулами

$$k = \frac{128M_{\text{розр}}}{\pi d^4 g} \text{ та } m = 1. \quad (3.90)$$

Для турбулентної течії

$$\sum \Delta h_{1-2} = \left(\xi_m + \lambda_T \frac{l}{d}\right) \frac{\nu^2}{2g} = \left(\sum \xi_m + \lambda_T \frac{l}{d}\right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4}.$$

Тобто коефіцієнт k й показник m для турбулентної течії визначають за формулами

$$k = \left(\sum \xi_m + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{16}{2g\pi^2 d^4} \text{ та } m = 2. \quad (3.91)$$

Формула (3.89) з урахуванням виразів (3.90) і (3.91) є основною для розрахунків простих трубопроводів. На рисунку 3.57 зображені характеристики потрібного напору для ламінарної (а) й турбулентної (б) течій.

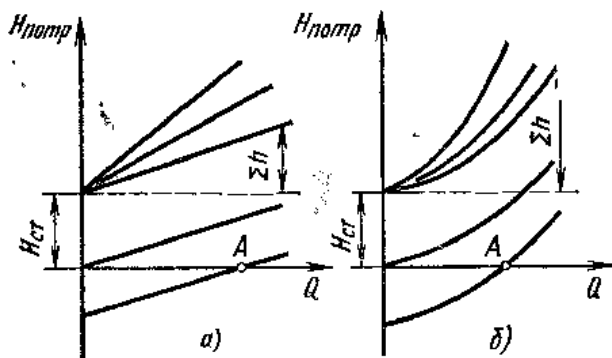


Рисунок 3.57 – Характеристики потрібного напору

Чим більша витрата Q , яку необхідно подавати трубопроводом, тим більший потрібний напір $H_{потр}$. Для ламінарної течії характеристика $H_{потр} = f(Q)$ є прямою лінією, для турбулентної течії – параболою другого ступеня.

Величина статичного напору більша від нуля, якщо рідина рухається вгору або в область підвищеного тиску. Якщо рідина рухається вниз або в область низького тиску, статичний напір менший від нуля.

Нахил характеристики $H_{потр} = f(Q)$ для ламінарної й турбулентної течій залежить від опору трубопроводу k й зростає в разі збільшення довжини трубопроводу та зменшення його діаметра або зі зростанням місцевих гідравлічних опорів. Крім того, за умови ламінарної течії

нахил характеристики $H_{номр} = f(Q)$ змінюється пропорційно в'язкості рідини.

Точка перетину характеристики $H_{номр} = f(Q)$ з віссю абсцис визначає витрату Q під час руху рідини лише за рахунок геометричних відміток Δz . Потрібний напір у цьому разі дорівнює нулю, а трубопровід називають самотечійним (рис. 3.58).

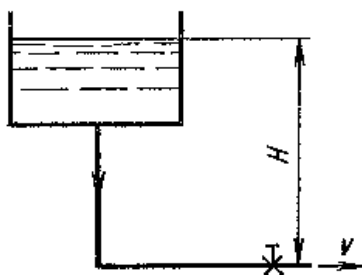


Рисунок 3.58 – Самотечійний трубопровід

Іноді замість характеристики потрібного напору зручніше користуватися характеристикою трубопроводу. Характеристика трубопроводу – це залежність сумарної втрати напору в трубопроводі від витрати: $\sum \Delta h = f(Q)$. Характеристика трубопроводу збігається з характеристикою потрібного напору в разі, якщо $H_{см} = 0$, наприклад, коли трубопровід розміщений у горизонтальній площині й тиск p_2 відсутній.

3.17 Послідовне з'єднання трубопроводів

Розглянемо простий трубопровід змінного перерізу з різними місцевими опорами (рис. 3.59).

Під час руху рідини трубопроводом від M до N (див. рис. 3.59) для всіх ділянок трубопроводу виконується залежність $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$.

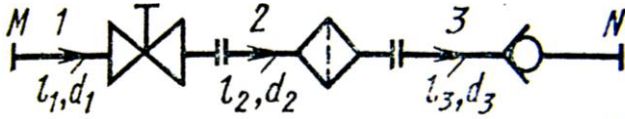


Рисунок 3.59 – Трубопровід змінного перерізу з різними місцевими опорами

Утрати напору під час руху рідини від M до N складаються із втрат напору на кожному з послідовно з'єднаних трубопроводів:

$$\sum \Delta h_{MN} = \sum \Delta h_1 + \sum \Delta h_2 + \sum \Delta h_3 .$$

Для побудови характеристики послідовного з'єднання трубопроводів необхідно скласти втрати напору на кожній ділянці за однакової витрати Q (рис. 3.60).

Загалом швидкості на початку і в кінці трубопроводу будуть різними.

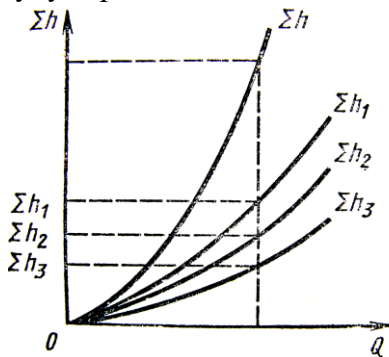


Рисунок 3.60 – Характеристика послідовного з'єднання трубопроводів

Тому

$$H_{nomp} = z_N - z_M + \frac{\alpha_N v_N^2 - \alpha_M v_M^2}{2g} + \sum \Delta h_{MN} + \frac{p_N}{\gamma},$$

або

$$H_{nomp} = H_{cm} + CQ^2 + kQ^m. \quad (3.92)$$

Коефіцієнт C в (3.92) визначають за формулою

$$C = \frac{1}{2} g \left(\frac{\alpha_N}{\omega_N^2} - \frac{\alpha_M}{\omega_M^2} \right).$$

Величину H_{cm} в (3.92) визначають за формулою

$$H_{cm} = z_N - z_M + \frac{p_N}{\gamma}.$$

3.18 Трубопровід із паралельним розгалуженням

Розглянемо трубопровід із паралельним розгалуженням на ділянці MN (рис. 3.61).

Повний напір до та після розгалуження позначимо H_M і H_N ; витрату в трубопроводі до та після розгалуження – Q ; витрати в паралельних трубопроводах – Q_1 , Q_2 , Q_3 ; сумарні втрати напору в паралельних трубопроводах – $\sum \Delta h_1$, $\sum \Delta h_2$, $\sum \Delta h_3$.

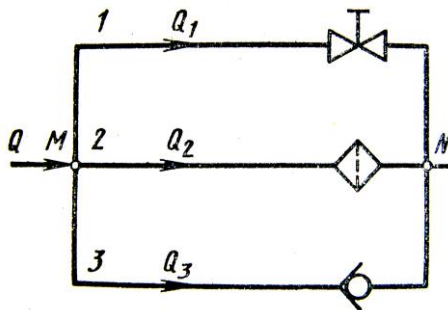


Рисунок 3.61 – Трубопровід із паралельним розгалуженням

У цьому разі під час руху рідини трубопроводом виконується рівняння

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (3.93)$$

Для кожного паралельного трубопроводу сумарні втрати напору можна знайти через повні напори в точках M і N :

$$\begin{aligned} \sum \Delta h_1 &= H_M - H_N, \\ \sum \Delta h_2 &= H_M - H_N, \\ \sum \Delta h_3 &= H_M - H_N. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum \Delta h_1 = \sum \Delta h_2 = \sum \Delta h_3. \quad (3.94)$$

Тобто втрати напору в паралельних трубопроводах однакові.

У загальному випадку втрати в паралельних трубопроводах можна визначати через відповідні витрати:

$$\begin{aligned}\sum \Delta h_1 &= k_1 Q_1^{m_1}, \\ \sum \Delta h_2 &= k_2 Q_2^{m_2}, \\ \sum \Delta h_3 &= k_3 Q_3^{m_3}.\end{aligned}$$

Тобто на додаток до рівняння (3.93) можна записати таке рівняння:

$$k_1 Q_1^{m_1} = k_2 Q_2^{m_2} = k_3 Q_3^{m_3}. \quad (3.95)$$

Рівняння (3.93), (3.94) і (3.95) дозволяють проводити розрахунки трубопроводів із паралельним розгалуженням. Наприклад: нехай для трубопроводу з рисунка 3.61 відомі витрата Q в основній магістралі трубопроводу й усі розміри трубопроводів; необхідно знайти витрати Q_1 , Q_2 і Q_3 в паралельних трубопроводах.

Для побудови характеристики трубопроводу з паралельним розгалуженням необхідно додати витрати всіх паралельних трубопроводів за однакових значень утрат напору $\sum \Delta h$ (рис. 3.62).

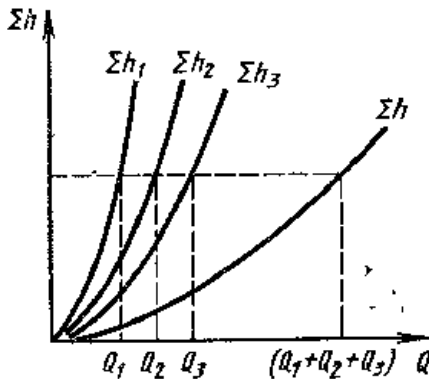


Рисунок 3.62 – Характеристика трубопроводу з паралельним розгалуженням

3.19 Розгалужений трубопровід

Розгалужений трубопровід – це сукупність декількох трубопроводів, що мають спільний поперечний переріз (точку розгалуження або точку зімкнення).

Нехай основний трубопровід має розгалуження в перерізі $M-M$ на три трубопроводи, що мають різні розміри, різні місцеві опори, різні геометричні висоти z_1 , z_2 і z_3 кінцевих перерізів і різні тиски p_1 , p_2 і p_3 (рис. 3.63).

Знайдемо зв'язок між тиском p_M у перерізі $M-M$ і витратами Q_1 , Q_2 і Q_3 у трубопроводах.

Як і в разі паралельного розгалуження трубопроводів, для даного трубопроводу виконується рівняння

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

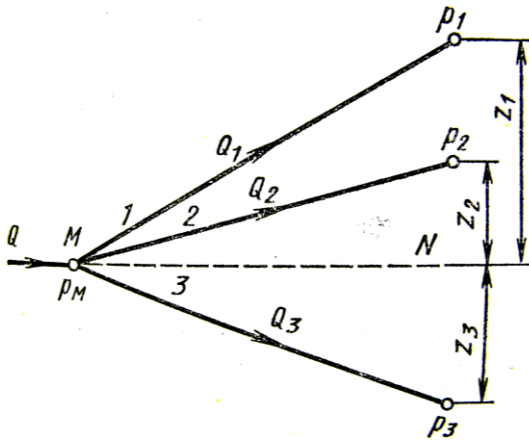


Рисунок 3.63 – Розгалужений трубопровід

Складемо рівняння Бернуллі для перерізу $M-M$ і кінцевих перерізів трубопроводів:

$$\frac{P_M}{\gamma} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \sum \Delta h_1,$$

$$\frac{P_M}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \sum \Delta h_2,$$

$$\frac{P_M}{\gamma} = z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \sum \Delta h_3.$$

Позначимо суму перших двох членів у правій частині кожного рівняння через H_{cm1} , H_{cm2} і H_{cm3} , а втрати напору в кожному трубопроводі – через відповідні витрати Q_1 , Q_2 і Q_3 .

Тоді

$$\frac{P_M}{\gamma} = H_{cm1} + k_1 Q_1^{m1},$$

$$\frac{P_M}{\gamma} = H_{cm2} + k_2 Q_2^{m2},$$

$$\frac{P_M}{\gamma} = H_{cm3} + k_3 Q_3^{m3}.$$

Тобто для розрахунку трубопроводу з розгалуженням на три трубопроводи маємо систему з чотирьох рівнянь із чотирма невідомими (Q_1, Q_2, Q_3, P_M):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_M}{\gamma} = H_{cm1} + k_1 Q_1^{m1}, \\ \frac{P_M}{\gamma} = H_{cm2} + k_2 Q_2^{m2}, \\ \frac{P_M}{\gamma} = H_{cm3} + k_3 Q_3^{m3}, \\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{array} \right. \quad (3.96)$$

Якщо кількість розгалужень n , тоді для розрахунку трубопроводу необхідно скласти $(n + 1)$ рівняння із $(n + 1)$ невідомим.

Характеристику розгалуженого трубопроводу будують за правилами побудови характеристики трубопроводу з паралельним розгалуженням.

На практиці рідина до трубопроводу подається насосом. Розглянемо сумісну роботу трубопроводу з насосом і приклад розрахунку трубопроводу в разі насосного подання рідини (рис. 3.64).

Розрахунок проводять графоаналітичним способом. Для виконання розрахунку розгалуженого трубопроводу необхідно:

а) виконати розрахунок і побудувати характеристику для кожної ділянки трубопроводу (лінії 1, 2 і 3 на рис. 3.65);

б) побудувати характеристику насоса $H = f(Q)$ сумісно з характеристикою трубопроводів;

в) побудувати характеристику для паралельного розгалуження трубопроводу – сумісну характеристику для ділянок 2 і 3 (лінія (2 + 3) на рис. 3.65). Тобто скласти значення Q за умови однакових значень H ;

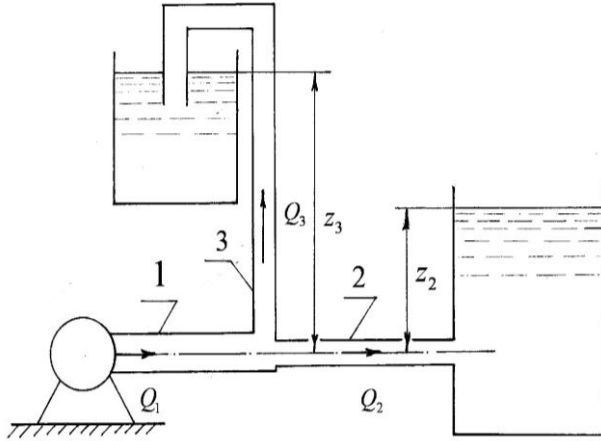


Рисунок 3.64 – До розрахунку трубопроводу в разі насосного подання рідини

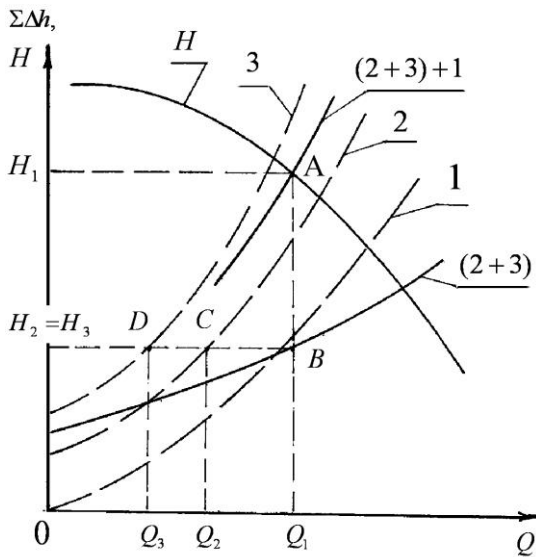


Рисунок 3.65 – Характеристики ділянок трубопроводу

г) побудувати характеристику для послідовного з'єднання трубопроводів – сумісну характеристику для ділянки 1 і паралельного розгалуження ділянок 2 і 3 (лінія $1 + (2 + 3)$) на рис. 3.65). Тобто скласти значення H за однакових значень Q ;

г) знайти точку перетину A лінії $1 + (2 + 3)$ із характеристикою насоса $H = f(Q)$: $A(Q_1, H_1)$;

д) знайти точку перетину B на лінії $(2 + 3)$ за умови $Q = Q_1$;

е) із точки B провести горизонталь і знайти точки перетину C і D з лініями 2 і 3 відповідно $C(Q_2, H_2)$; $D(Q_3, H_3)$. У цьому разі $H_2 = H_3$ (див. рис. 3.65).

3.20 Розрахунок сифона

Сифон – це простий самопливний трубопровід, частина якого знаходиться вище від вихідного резервуара (рис. 3.66).

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 0–0 і 2–2:

$$z_1 + \frac{P_a}{\gamma} + 0 = z_2 + \frac{P_a}{\gamma} + 0 + \sum \Delta h_{1-2}.$$

Звідси

$$z_1 - z_2 = \sum \Delta h_{1-2},$$

або

$$H = kQ^m.$$

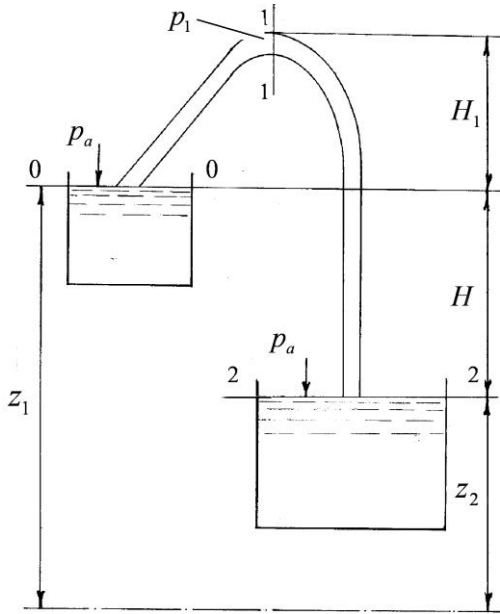


Рисунок 3.66 – До розрахунку сифона

Отже, величина витрати Q через сифон залежить від напору H та опору трубопроводу $\sum \Delta h_{1-2}$ від перерізу $1-1$ до перерізу $2-2$ й не залежить від величини напору H_1 . Але останнє справедливо до того часу, поки величина тиску у верхній частині p_1 не стане меншою за тиск насиченої пари. Тому визначимо допустиму величину напору H_1 .

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів $0-0$ і $1-1$:

$$\frac{p_a}{\gamma} = H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + \sum \Delta h_{0-1},$$

або

$$\frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = H_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + \sum \Delta h_{0-1}.$$

З урахуванням, що вираз у лівій частині рівняння $(p_a / \gamma - p_1 / \gamma)$ є вакуумметричною висотою $H_{\text{вак}}$, одержуємо

$$H_{\text{вак}} = H_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + \sum \Delta h_{0-1},$$

або

$$H_{\text{вак}} = H_1 + \frac{\alpha v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi_m + \lambda \frac{l}{d} \right).$$

Тоді

$$H_1 = H_{\text{вак}} - \frac{\alpha v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi_m + \lambda \frac{l}{d} \right). \quad (3.97)$$

На практиці величину $H_{\text{вак}}$ для води за нормального тиску беруть від шести до семи метрів ($H_{\text{вак}} = 6-7$ м вод. ст.) для забезпечення стійкої роботи сифона.

У разі, якщо $H_{\text{вак}} > 7$ м, виникає загроза зриву вакууму, тому для усунення цього недоліку змінюють геометричні параметри сифона (здебільшого, величину H_1 або H).

3.21 Гідравлічний удар у трубах

Гідравлічним ударом називають різку зміну тиску в потоці рідини внаслідок різкої зміни її швидкості руху.

Вивчати гідравлічний удар почали у зв'язку з частими аваріями на мережах московського водопроводу

наприкінці XIX століття. Російський учений М. Є. Жуковський проаналізував причини аварій та опублікував у 1899 році результати теоретичних та експериментальних досліджень у фундаментальній науковій праці «Про гідравлічний удар».

Гідравлічний удар являє собою коливальний процес, що виникає в пружному трубопроводі з краплинною рідиною з урахуванням стисливості рідини за значних тисків.

Цей процес є швидкоплинним, характеризується швидким підвищенням тиску в трубі на величину $\Delta p_{уд}$ і миттєвим зниженням тиску на ту саму величину $\Delta p_{уд}$ (рис. 3.67).

Зміна тиску водночас пов'язана з пружними деформаціями рідини та стінок трубопроводу. Підвищення тиску під час гідравлічного удару може бути настільки значним, що це може призвести до розриву трубопроводу.

Нехай на трубопроводі, яким протікає вода зі швидкістю v_0 , різко закрили засувку (див. рис. 3.67 а). У разі швидкого закриття засувки швидкість руху в трубопроводі зменшується до нуля, і відбувається перехід кінетичної енергії потоку в потенціальну, що призводить до різкого збільшення тиску. Завдяки пружним властивостям рідини й матеріалу труби рідина трохи стискається, а труба розширюється. Тому рух рідини зупиниться спочатку не в усій трубі, а безпосередньо перед засувкою. Виникає фронт ударної хвилі $n-n$, що пересувається вліво зі швидкістю \bar{a} (див. рис. 3.67 б). Ударна хвиля пройде усім трубопроводом і після того, як на мить в усій трубі тиск підвищиться на величину $\Delta p_{уд}$ (див. рис. 3.67 в), рідина почне виходити із зони підвищеного тиску назад у резервуар. Тиск у трубі знижуватиметься, фронт $n-n$ почне рухатися вправо,

залишивши за собою область із тиском p_0 (див. рис. 3.67 г).

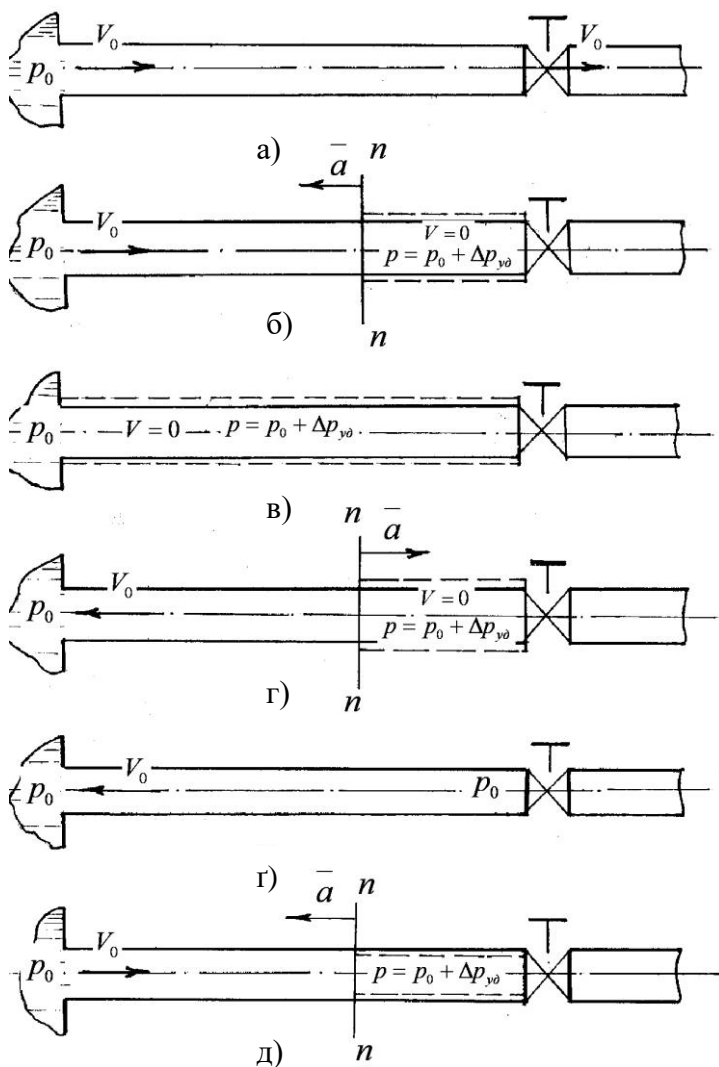


Рисунок 3.67 – Гідравлічний удар у трубопроводі

Робота деформації повністю перетворюється на кінетичну енергію й рідина в трубі знову починає рухатися зі швидкістю v_0 , але у зворотному напрямку – вліво, за інерцією (див. рис. 3.67 д). За останнім шаром рідини виникає розрядження $\Delta p_{y\delta}$ (як за поршнем) і відбувається зворотна деформація трубопроводу. Коли фронт $n-n$ досягне кінця трубопроводу, рідина під дією тиску $-\Delta p_{y\delta}$ (розрідження) знову починає рухатися вправо, доходить до засувки, зупиняється, з'являється тиск $+\Delta p_{y\delta}$ і, як наслідок, виникає зворотна деформація трубопроводу. Фронт $n-n$ починає рухатися вліво тощо.

Цей коливальний процес буде відбуватися, поки не загасне. У дослідах М. Є. Жуковського було зареєстровано до дванадцяти повних циклів із поступовим зменшенням величини $\Delta p_{y\delta}$ унаслідок тертя в трубі та втрати енергії в резервуарі.

Метою розрахунку гідравлічного удару в трубах є визначення насамперед величини $\Delta p_{y\delta}$, а вже потім – усіх інших параметрів (частоти й швидкості загасання ударної хвилі, деформації та міцності трубопроводу та ін.).

Фізичний зміст процесу гідравлічного удару в трубах – кінетична енергія рідини витрачається на роботу з деформації стінок трубопроводу й стискування об'єму рідини:

$$E_{\kappa} = A_{\text{деф.ст}} + A_{\text{деф.рід}}.$$

Кінетична енергія об'єму рідини $V = \pi R^2 l$:

$$E_{\kappa} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 l v_0^2. \quad (3.98)$$

Робота з деформації стінок трубопроводу силою $\Delta p_{y\theta} \cdot 2\pi Rl$ на величину ΔR

$$A_{\text{деф. см}} = \frac{1}{2} \Delta p_{y\theta} \cdot 2\pi Rl \cdot \Delta R.$$

З механіки пружних тіл відомо, що напруження в матеріалі труби σ можна визначити через відносну деформацію трубопроводу $\Delta R/R$ і модуль пружності матеріалу труби E за законом Гука:

$$\sigma = \frac{\Delta R}{R} E.$$

З іншого боку, напруження σ , спричинені ударною хвилею в стінках труби:

$$\sigma = \frac{\Delta p_{y\theta}}{\delta} R,$$

де δ – товщина стінки труби.

Тому можна скласти рівняння:

$$\frac{\Delta R}{R} E = \frac{\Delta p_{y\theta}}{\delta} R,$$

звідси

$$\Delta R = \frac{\Delta p_{y\theta} R^2}{E \delta}.$$

Тоді робота з деформації стінки труби

$$A_{\text{деф. см}} = \frac{\Delta p_{\text{y}\delta} \pi R l \Delta p_{\text{y}\delta} R^2}{E \delta},$$

або

$$A_{\text{деф. см}} = \frac{\Delta p_{\text{y}\delta}^2 \pi R^3 l}{E \delta}. \quad (3.99)$$

Робота зі стискування об'єму рідини V – це робота сили від тиску $\Delta p_{\text{y}\delta}$ на шляху Δl (рис. 3.68).

Тоді

$$A_{\text{деф. рід}} = \frac{1}{2} \omega \Delta p_{\text{y}\delta} \Delta l.$$

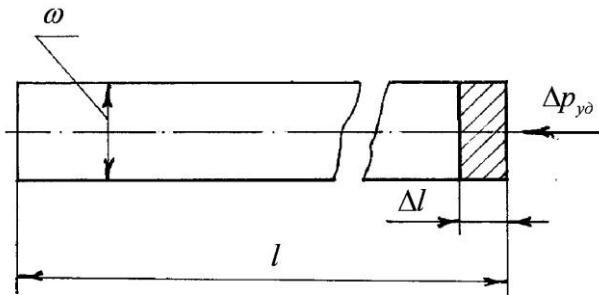


Рисунок 3.68 – До визначення роботи зі стискування об'єму рідини

З урахуванням, що $\omega \Delta l = \Delta V$, одержуємо

$$A_{\text{деф. рід}} = \frac{1}{2} \Delta p_{\text{y}\delta} \Delta V.$$

За законом Гука для лінійного подовження існує залежність між відносним зменшенням об'єму рідини $\Delta V / V$ й тиском $\Delta p_{y\partial}$:

$$\frac{\Delta V}{V} k = \Delta p_{y\partial},$$

де k – середнє значення адіабатного модуля пружності рідини для даного $\Delta p_{y\partial}$.

Звідси

$$\Delta V = \frac{V \cdot \Delta p_{y\partial}}{k}.$$

У цьому прикладі $V = \pi R^2 l$, тому робота зі стискування об'єму рідини

$$A_{\text{деф. рід}} = \frac{1}{2} \Delta p_{y\partial} \Delta V = \frac{1}{2} \Delta p_{y\partial} \frac{\pi R^2 l \Delta p_{y\partial}}{k},$$

або

$$A_{\text{деф. рід}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p_{y\partial}^2 \pi R^2 l}{k}. \quad (3.100)$$

З урахуванням (3.97), (3.98) і (3.99) можна скласти рівняння енергії для гідравлічного удару в трубах:

$$\frac{1}{2} \pi R^2 l \rho v_0^2 = \frac{\Delta p_{y\partial}^2 \pi R^3 l}{E \delta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p_{y\partial}^2 \pi R^2 l}{k}.$$

Після перетворень одержимо

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 = \Delta p_{y0}^2 \left(\frac{R}{E\delta} + \frac{1}{2k} \right).$$

Звідси

$$\Delta p_{y0} = \rho v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{2\rho R}{E\delta}}}. \quad (3.101)$$

Вираз (3.101) є формулою М. Є. Жуковського.

Величина $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{2\rho R}{E\delta}}}$ має розмірність швидкості.

Її фізичний зміст можна визначити, якщо припустити, що $E = \infty$ – труба абсолютно жорстка. Тоді залишається лише $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$ – швидкість поширення звуку в однорідному пружному середовищі з густиною ρ й модулем пружності k . Для води швидкість поширення звуку дорівнює 1 435 м/с, для бензину – 1 116 м/с, для масла – від 1 200 м/с до 1 400 м/с, для повітря – 330 м/с.

Тобто величина $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{2\rho R}{E\delta}}}$ являє собою

швидкість \bar{a} поширення ударної хвилі в рідині, що заповнює пружний трубопровід. Це можна довести, якщо розглянути елементарне переміщення ударної хвилі dx і

застосувати теорему про зміну кількості руху до елемента трубопроводу довжиною dx :

$$\left[(p_0 + \Delta p_{y\partial}) - p_0 \right] \omega dx = \omega dx \rho (v_0 - 0).$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta p_{y\partial}}{\rho v_0},$$

або

$$a = \frac{\Delta p_{y\partial}}{\rho v_0}.$$

Тоді формулу (3.101) можна записати як

$$\Delta p_{y\partial} = \rho v_0 a. \quad (3.102)$$

Прирівняємо вирази (3.101) і (3.102). Звідси

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{2\rho R}{E\delta}}}. \quad (3.103)$$

У разі якщо зменшення швидкості біля засувки відбувається не до нуля, а до значення $v_1 < v_0$, гідравлічний удар називають неповним. Тоді

$$\Delta p_{y\partial} = \rho (v_0 - v_1) a. \quad (3.104)$$

Формули М. Є. Жуковського (3.101) і (3.102) справедливі для прикладу дуже швидкого закриття засувки, коли виконується умова $t_{закр} < t_0$ (t_0 – фаза гідравлічного удару, або час проходження ударної хвилі від засувки до початку трубопроводу й назад: $t_0 = 2l/a$).

Залежно від співвідношення часу закриття засувки $t_{закр}$ і фази гідравлічного удару t_0 розрізняють прямий гідравлічний удар ($t_{закр} < t_0$) і непрямий гідравлічний удар ($t_{закр} > t_0$). Під час непрямого гідравлічного удару хвиля, що дійшла до початку трубопроводу й відштовхнулася від неї, повертається до засувки, яка ще не повністю закрита. Тобто в разі непрямого гідравлічного удару величина $\Delta p_{y\delta}$ буде меншою, ніж під час прямого гідравлічного удару.

Необхідно зауважити, що формули М. Є. Жуковського одержані під час ряду спрощень:

а) вважаються справедливими закони Гука для рідини й матеріалу труби (але на практиці використовуються поліетиленові труби й неньютонівські рідини);

б) не враховується тертя τ ;

в) не враховується розсіювання енергії в довкіллі.

Експериментальні дослідження показують, що насправді величина $\Delta p_{y\delta}$ на 10–20 % більша, ніж згідно з формулами М. Є. Жуковського.

На практиці апаратура керування гідросистемами (електромагнітні крани, клапани тощо) має час спрацювання від 0,008 с до 0,002 с, тому величина $\Delta p_{y\delta}$ може досягати десятків і сотень технічних атмосфер. Це провокує спрацювання реле тиску й гідрозамків, викликає механічне руйнування трубопроводів.

Для боротьби з гідравлічним ударом у трубах застосовують такі способи:

а) для запобігання прямому гідравлічному удару підбирають закон закриття засувки, за яким тиск не буде перевищувати допустимий, тобто збільшують час закриття засувки. Для трубопроводів великих діаметрів установлюють вентиля, що закриваються досить повільно;

б) передбачають ділянки трубопроводу з розширенням, що дає можливість зменшити швидкість v_0 , довжину труби l і, як наслідок, тиск $\Delta p_{уд}$;

в) установлюють на трубопроводі спеціальні пристрої: зрівнювальні резервуари – гідроаккумулятори (рис. 3.69 а), ділянки труби з більш еластичного матеріалу (рис. 3.69 б);

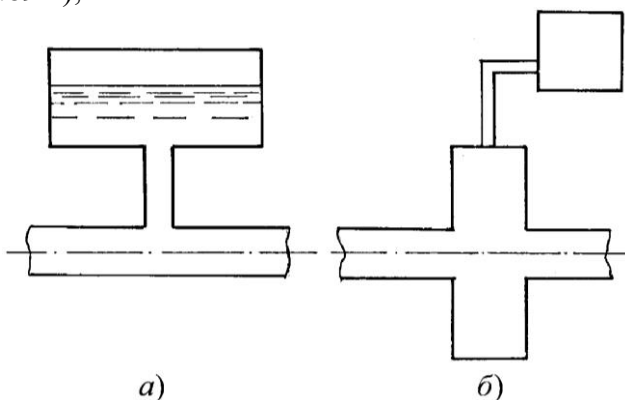


Рисунок 3.69 – Способи боротьби з гідравлічним ударом:
а) гідроаккумулятор; б) ділянка з еластичного матеріалу

г) зміцнюють «слабкі» місця трубопроводу (наприклад, фланцеві та зварні з'єднання) методом урахування ударного тиску під час розрахунків трубопроводу на міцність.

3.22 Витікання рідини через отвори й насадки

Вивчення витікання рідини через отвори й насадки зумовлено тим, що це явище досить часто відбувається в техніці та повсякденному житті, наприклад: спорожнення резервуарів; перетікання рідини з одного резервуара в інший, як у сполучену камеру; спеціальні пристрої – дроселі, де через малі отвори проштовхують рідину чи газ і, створюючи опір, гасять енергію; клапани й форсунки; струминна техніка, зокрема струминні насоси.

Під час витікання рідини через отвори й насадки запас потенціальної енергії рідини в резервуарі перетворюється на кінетичну енергію струменя.

Струмін, не обмежений жорсткими стінками, називають вільним. Зі свого боку, вільні струмені можуть бути незатопленими й затопленими.

Незатоплені вільні струмені оточені газовим (повітряним) середовищем. Наприклад, пожежні та фонтанні, струмені дощувальних апаратів.

Затопленим вільним струменем називають струмін, що витікає в середовище з тією самою густиною, що й сам струмін. Такі струмені бувають у разі спускання відпрацьованих промислових вод у басейни в системах водопостачання.

Метою розрахунків у цьому разі є визначення швидкості витікання, величини витрати й коефіцієнта опору для різних форм отворів і насадків, інколи – визначення конфігурації й дальності струменя.

3.22.1 Отвір у тонкій стінці

Якщо товщина стінки не впливає на умови витікання рідини, то такий отвір вважають отвором у тонкій стінці.

У цьому разі рідина торкається лише передньої кромки отвору, що може бути за товщини стінки δ , яка менша від половини діаметра отвору – $\delta \leq 0,5d_0$ (рис. 3.70 а), або за зрізу кромки отвору під гострим кутом (рис. 3.70 б).

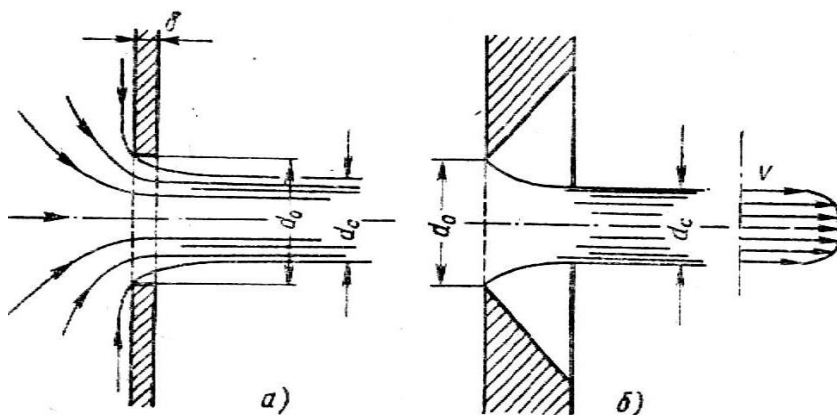


Рисунок 3.70 – Витікання через отвори:
а) з тонкими стінками; б) зі зрізаною кромкою

Умови витікання рідини в обох прикладах однакові: частинки рідини наближаються до отвору з усього об'єму рідини різними траєкторіями, струмінь відривається від стінки у кромці отвору й стискається. Стискання струменя обумовлено необхідністю переходу до осьового руху від різноманітних напрямків руху рідини в резервуарі.

Розрізняють досконале й недосконале стиснення (рис. 3.71). Якщо на формування струменя не впливають вільна поверхня, бокові стінки й дно резервуара, то стиснення вважають досконалим (див. рис. 3.71 а). Це можливо, якщо отвір знаходиться на достатній відстані від стінок і дна резервуара, тобто виконується умова

$$l > 3d,$$

де l – відстань до вільної поверхні, бокових стінок і дна резервуара;

d – розмір отвору.

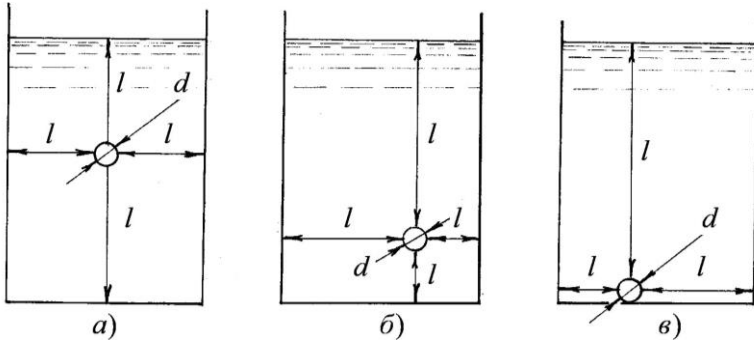


Рисунок 3.71 – Умови досконалого (а), недосконалого (б), неповного й недосконалого (в) стиснення

У разі $l < 3d$ стиснення вважають недосконалим (див. рис. 3.71 б). До того ж, якщо під час підходу до отвору потік з одного або кількох боків не має стиснення, то воно буде неповним і недосконалим (див. рис. 3.71 в).

Величину стиснення характеризують коефіцієнтом стиснення струменя ε :

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega_0},$$

де ω_c – площа живого перерізу струменя;

ω_0 – площа перерізу отвору.

Для круглого отвору

$$\varepsilon = \left(\frac{d_c}{d_0} \right)^2.$$

Коефіцієнт стиснення ε залежить від розміщення отвору щодо вільної поверхні та числа Рейнольдса.

Визначимо швидкість витікання рідини через отвір (рис. 3.72).

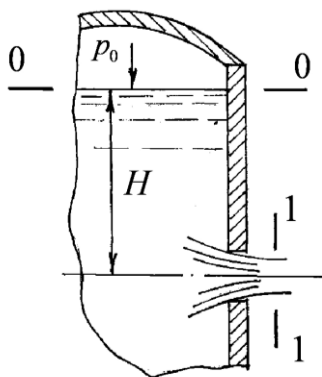


Рисунок 3.72 – До визначення швидкості витікання рідини через отвір

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів $0-0$ і $1-1$:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} + 0 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + \xi_0 \frac{v_1^2}{2g},$$

де ξ_0 – коефіцієнт опору отвору;

v_1 – швидкість витікання в перерізі струменя $1-1$.

Позначимо

$$H + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = H_p,$$

де H_p – розрахунковий напір.

Тоді

$$H_p = \frac{v_1^2}{2g} (1 + \xi_0).$$

Звідси

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_0}} \sqrt{2gH_p},$$

або

$$v_1 = \varphi \sqrt{2gH_p}, \quad (3.105)$$

де φ – коефіцієнт швидкості, що враховує втрати напору

$$\varphi = 1 / \sqrt{1 + \xi_0}.$$

Для ідеальної рідини $\xi_0 = 0$, $\varphi = 1$. Тобто для ідеальної рідини

$$v_{теор} = \sqrt{2gH_p}.$$

Звідси випливає

$$\frac{v}{v_{теор}} = \frac{\varphi \sqrt{2gH_p}}{\sqrt{2gH_p}} = \varphi.$$

Тобто коефіцієнт швидкості φ є відношенням дійсної швидкості до теоретичної, коли б рідина була ідеальною. Величина коефіцієнта φ менша за одиницю завжди: $\varphi < 1$.

Якщо витікання рідини через отвір відбувається в атмосферу, тиск по всьому периметру струменя буде дорівнювати атмосферному.

Величину витрати Q визначимо як добуток площі перерізу струменя на швидкість витікання рідини через отвір:

$$Q = \omega_c v_1 = \varepsilon \omega_0 \varphi \sqrt{2gH_p}.$$

Добуток коефіцієнтів ε і φ називають коефіцієнтом витрати μ :

$$\varepsilon \cdot \varphi = \mu.$$

Тому

$$Q = \mu \omega_0 \sqrt{2gH_p}. \quad (3.106)$$

Очевидно, що

$$\mu = \frac{Q}{\omega_0 \sqrt{2gH_p}},$$

або

$$\mu = \frac{Q}{Q_{теор}}.$$

Тобто коефіцієнт витрати μ є відношенням дійсної витрати Q до витрати $Q_{теор}$, якщо б рідина була ідеальною.

Витікання рідини через отвір визначають чотири коефіцієнти: коефіцієнт втрати напору ξ , коефіцієнт стиснення струменя ε , коефіцієнт швидкості φ і коефіцієнт витрати μ . Усі вони залежать від числа Рейнольдса $Re_{теор}$, підрахованого за теоретичною швидкістю $v_{теор}$:

$$Re_{теор} = \frac{v_{теор} \cdot d_0}{\nu} = \frac{d_0 \sqrt{2gH_p}}{\nu}.$$

Для кожного типу отвору коефіцієнти знаходять експериментально. У разі чисел Рейнольдса $Re_{теор}$ від 10^5 до ∞ коефіцієнти мають значення: $\varphi = 1$; $\varepsilon = 0,64$; $\mu = 0,6$. Для орієнтовних розрахунків можна брати такі значення коефіцієнтів: $\xi = 0,065$; $\varepsilon = 0,64$; $\varphi = 0,97$; $\mu = 0,62$. Залежності коефіцієнтів ε , φ і μ від $Re_{теор}$ для круглого отвору наведені на рисунку 3.73.

За умови недосконалого стиснення коефіцієнт ε_H відрізняється від коефіцієнта ε за досконалого стиснення:

$$\frac{\varepsilon_H}{\varepsilon} = 1 + \frac{0,37}{\varepsilon} n^2,$$

де n – відношення площі перерізу отвору до площі резервуара (рис. 3.74).

Тобто

$$n = \omega_0 / \omega.$$

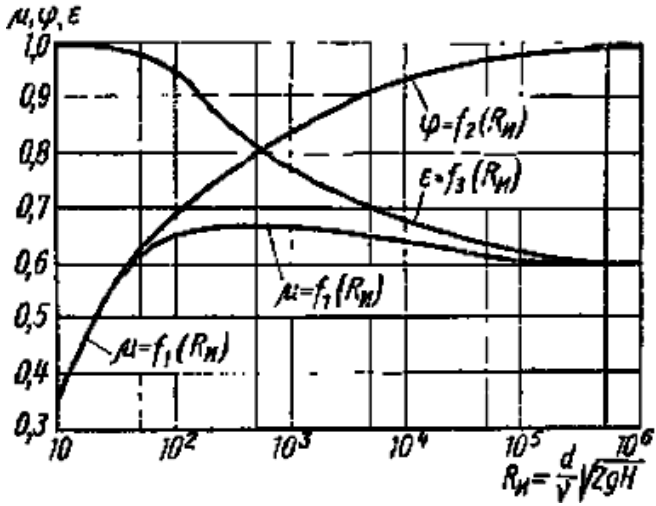


Рисунок 3.73 – Залежності $\mu, \varphi, \varepsilon = f(Re)$

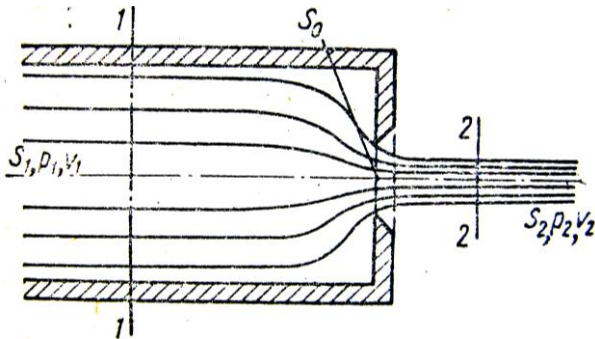


Рисунок 3.74 – До визначення коефіцієнта ε_n за недосконалого стиснення

Можна вважати, що коефіцієнти ξ і φ в разі недосконалого стиснення не залежать від співвідношення ω_0 і ω . Тому коефіцієнт витрати за умови недосконалого стиснення

$$\mu_n = \varepsilon_n \varphi .$$

Тоді витрата під час недосконалого стиснення

$$Q_n = \mu_n \omega_0 \sqrt{2gH_p} .$$

Для розрахунку H_p у цьому разі необхідно врахувати швидкісний напір у резервуарі:

$$H_p = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} .$$

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 (див. рис. 3.74):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \xi \frac{v_2^2}{2g} .$$

З іншого боку,

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_0 \varepsilon_n ,$$

звідси

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_0}{\omega_1} \varepsilon_n ,$$

або

$$v_1 = v_2 n \varepsilon_n .$$

Підставляючи вираз для v_1 у рівняння Бернуллі, одержуємо

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi - \varepsilon_n^2 n^2}} \sqrt{2g \frac{P_1 - P_2}{\gamma}} .$$

3.22.2 Витікання під рівень

Під час витікання рідини не в атмосферу або газове середовище, а в середовище з тією самою рідиною відбувається витікання через затоплений отвір або витікання під рівень (рис. 3.75).

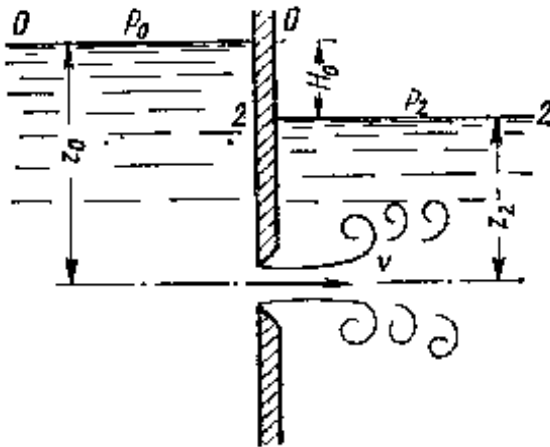


Рисунок 3.75 – Витікання під рівень

У цьому разі розрахункові перерізи 1-1 і 3-3 вибирають на поверхнях рідини в обох резервуарах, площина порівняння 0-0 проходить через центр отвору.

Складемо рівняння Бернуллі:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \sum \Delta h,$$

або

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \xi_0 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

де ξ_0 – коефіцієнт опору отвору;

v_2 – швидкість витікання в перерізі струменя 2-2 (див. рис. 3.75).

Тоді розрахунковий напір H визначимо за формулою

$$H = H_0 + \frac{p_1 - p_3}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} (1 + \xi_0).$$

Звідси швидкість під час витікання під рівень

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_0}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Тоді витрата під час витікання під рівень

$$Q = v_2 \cdot \omega_c = \varepsilon \varphi \omega_0 \sqrt{2gH} = \mu \omega_0 \sqrt{2gH}.$$

Тобто під час витікання під рівень і витікання в атмосферу розрахункові формули для визначення

швидкості однакові. Але розрахунковий напір під час витікання під рівень є різницею гідростатичних напорів з обох боків стінки, тому залежить від величини H_0 , p_1 і p_3 . Швидкість і витрата під час витікання під рівень не залежать від висоти розміщення отвору.

3.22.3 Витікання через насадки

Унаслідок стиснення струменя коефіцієнт витрати отвору зменшується, тобто зменшується пропускна здатність отвору. Її можна збільшити, якщо усунути стиснення струменя. Для збільшення пропускної здатності застосовують насадки різних типів.

Насадок – це прикріплений до отвору короткий патрубок довжиною від двох до шести діаметрів отвору. Залежно від форми прикріпленого патрубка насадки бувають різних типів: зовнішній циліндричний, внутрішній циліндричний, зовнішній дифузорний, зовнішній конфузорний, комбінований, сопло (коноїдальний) тощо. (рис. 3.76).

Розглянемо приклад витікання через зовнішній циліндричний насадок (рис. 3.77).

Під час входу в насадок потік обтікає гострі краї й струмінь стискається так само, як і під час витікання через отвори. Струмінь, протікаючи, захоплює повітря, що на початку витікання перебувало між ним і стінками насадка. У результаті в цьому просторі створюється вакуум, що притягує струмінь до стінок. Струмінь розширюється й витікає з насадка вже повним живим перерізом без стиснення на виході.

Цей режим витікання називають безвідривним, або першим режимом витікання. Розрахунок під час витікання через насадок проводять аналогічно розрахунку під час

витікання через отвір за допомогою рівняння Бернуллі для перерізів 0-0 (на поверхні резервуара) і 2-2 (на виході з насадки).

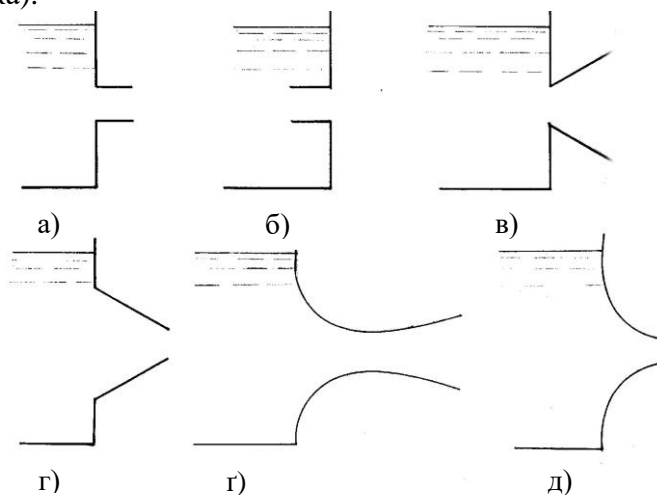


Рисунок 3.76 – Насадки: а) зовнішній циліндричний; б) внутрішній циліндричний; в) зовнішній дифузорний; г) зовнішній конфузорний; г) комбінований; д) сопло (коноїдальний)

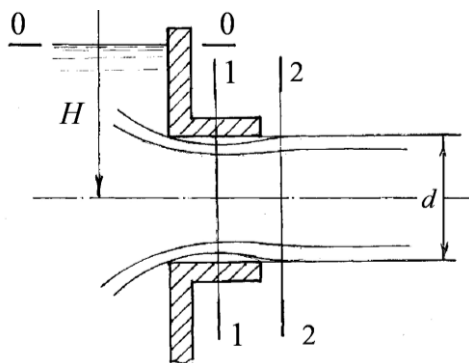


Рисунок 3.77 – Витікання через зовнішній циліндричний насадок

Розглянемо приклад витікання з відкритого резервуара, припускаючи, що $v_0 = 0$ і $H_0 = H$ (див. рис. 3.77). Тоді

$$\frac{p_{am}}{\gamma} + H = \frac{p_{am}}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum \xi \frac{v_2^2}{2g},$$

або

$$H = H_p = \frac{v_2^2}{2g} (1 + \sum \xi),$$

де $\sum \xi$ – опір насадка: $\sum \xi = \xi_{p3e} + \xi_{pp} + \lambda \frac{l}{d}$.

Звідси

$$v = v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \xi}} \sqrt{2gH_p} = \varphi \sqrt{2gH_p},$$

де φ – коефіцієнт швидкості.

Ураховуючи, що

$$\xi_{pp} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2,$$

одержуємо

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{p3e} + \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}. \quad (3.107)$$

Коефіцієнт швидкості для насадка відрізняється від коефіцієнта швидкості для отвору, оскільки, крім утрат на обтікання країв, у насадку будуть ще й втрати напору на розширення струменя після перерізу $l-l$.

У разі довжини насадка від трьох до чотирьох її діаметрів ($l \approx (3-4)d$) можна вважати, що загальний опір насадка буде як під час входу в трубу з резервуара – $\sum \xi = 0,5$, коефіцієнт швидкості насадка за цих умов – $\varphi = 0,82$.

У разі довжини насадка менше від трьох-чотирьох її діаметрів ($l < (3-4)d$) ділянка розширеного струменя насадка буде дуже короткою й неспроможною протидіяти різниці між атмосферним тиском на виході з насадка і зниженим тиском у зоні перерізу $l-l$. У цьому разі зовнішнє повітря час від часу проривається до насадка і ліквідує вакуум, течія рідини стає нестійкою, що неприпустимо в інженерних спорудах. Цей режим витікання називають другим. За умов другого режиму витікання струмінь після стискання не розширюється, зберігає циліндричну форму та рухається, не торкаючись стінок насадка. Витікання стає аналогічним витіканню через отвір у тонкій стінці: швидкість зростає, витрата зменшується завдяки стисненню струменя.

У разі довжини насадка більше від трьох-чотирьох її діаметрів ($l > (3-4)d$) необхідно враховувати опір по довжині насадка, а це зменшує коефіцієнт швидкості φ .

Знайдемо величину вакууму насадка. Вакуум установлюється тим більшим, чим більшою буде швидкість витікання, тобто чим більший напір буде перед входом до насадка. Але оскільки вакуум має граничне значення, то й напір перед насадком не може бути яким завгодно великим і теж має граничне значення.

Для визначення величини вакууму складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 з рисунка 3.77:

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g},$$

або

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

Ураховуючи $\varepsilon = \omega_1 / \omega_2$ і $\omega_1 \cdot v_1 = \omega_2 \cdot v_2$, одержуємо:

$$\varepsilon \cdot v_1 = v_2,$$

або

$$v_1 = \frac{v_2}{\varepsilon}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{\gamma} &= \frac{v_2^2}{2g\varepsilon^2} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \\ &= \frac{v_2^2}{2g} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \right] = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) = \\ &= \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2 \right) = \frac{v_2^2}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \frac{v_2^2}{g} \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Якщо $p_2 = p_{ам}$, то $(p_2 - p_1) / \gamma = h_{вак}$, тобто

$$h_{\text{вак}} = \frac{v_2^2}{g} \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} . \quad (3.108)$$

Якщо врахувати $v_2 = \varphi \sqrt{2gH_p}$, то

$$h_{\text{вак}} = \frac{\varphi^2 2gH_p}{g} \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} ,$$

або

$$h_{\text{вак}} = 2\varphi^2 H_p \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} .$$

Вважаючи, що в перерізі 1-1 коефіцієнт стиснення струменя $\varepsilon = 0,64$ й коефіцієнт швидкості $\varphi = 0,82$, одержуємо

$$h_{\text{вак}} = 0,75H_p .$$

Теоретично граничним вважають такий вакуум, за якого вода перетворюється на пару. Тобто тиск у цьому разі є тиском пароутворення. Для води теоретичні величини граничних вакууму й напору – $h_{\text{вак.теор}} = 10$ м, $H_{p,\text{теор}} = 13,5$ м. В інженерній практиці для запобігання зриву вакууму необхідно брати $h_{\text{вак.р}} = 8$ м. Тоді граничний напір буде $H_{p,\text{р}} = 10,7$ м. Тобто на практиці необхідно виконувати умову

$$H_{p,\text{р}} \leq 10,7 \text{ м.}$$

У разі $H_p > H_{p,cr}$ відбувається зрив вакууму. Зона вакууму з'єднується з довкіллям, картина течії змінюється на інший режим витікання, і насадок перестає працювати на збільшення швидкості й витрати витікання. У разі витікання під рівень режим витікання завжди буде безвідривним (перший режим витікання), але в разі $H_p > H_{p,cr}$ може виникнути кавітація в зоні вакууму й тоді величина витрати Q перестане залежати від H_p .

Недоліки циліндричного насадка:

а) підвищений загальний опір насадка за умови першого режиму витікання;

б) невеликий (як в отворі) коефіцієнт витрати μ у разі другого режиму витікання;

в) за умови великих H_p можуть бути зрив режиму течії та двозначність величини витрати Q за однакового H_p ;

г) загроза кавітації в разі витікання під рівень.

Для усунення чи зменшення цих недоліків вдаються до зміни геометрії насадка (рис. 3.78).

Наприклад, у разі плавного входу в насадок не відбувається стиснення струменя з подальшим його розширенням. У цьому разі зменшуються втрати напору та збільшуються коефіцієнти швидкості й витрати φ та μ . Тому просте округлення кромки на вході в насадок радіусом R збільшує коефіцієнти швидкості й витрати φ та μ (див. рис. 3.78 а).

Чим більший радіус округлення, тим більший коефіцієнт витрати μ і менший коефіцієнт опору ξ . За умови радіусу округлення, що дорівнює товщині стінки, циліндричний насадок наближається до коноїдального

(див. рис. 3.78 б). Коноїдальний насадок (або сопло) найвигідніший, оскільки його профіль повторює форму струменя, що витікає з отвору. Сопло забезпечує сталий режим витікання з насадки без кавітації. Значення коефіцієнта опору ξ для сопла – $\xi = 0,03 - 0,1$ (більшим числам Re відповідають менші значення ξ і навпаки). Відповідні значення коефіцієнтів витрати та швидкості – $\mu = \varphi = (0,99 - 0,96)$. Основний недолік сопла – технологічна складність.

У разі якщо необхідно забезпечити значну витрату за заданих діаметра перерізу й напору, використовують комбінований насадок (див. рис. 3.78 в). Це комбінація сопла й дифузора, що забезпечує зниження тиску у вузькому перерізі насадка, і внаслідок цього збільшує швидкість і витрату через насадок.

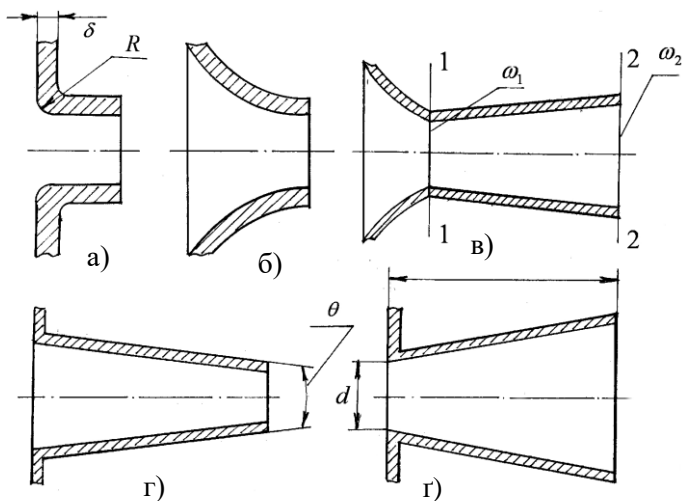


Рисунок 3.78 – Насадки спеціальної форми:
 а) зі скругленими кромками; б) коноїдальний (сопло);
 в) комбінований; г) конфузорний; г) дифузорний

Комбінований насадок за однакових діаметрів вузького перерізу й напорі збільшує витрату у 2,5 рази щодо сопла. Але за умови напорів $H_p \geq (1 - 4) m$ у вузькому перерізі виникає кавітація. Тобто комбінований насадок можна використовувати лише за невеликих напорів.

На практиці часто застосовують конфузорний насадок (див. рис. 3.78 г) із кутом конусності θ від 12° до 14° , просту у виготовленні та з дещо меншим коефіцієнтом витрати, ніж у коноїдального ($\mu = 0,94 - 0,95$). Такі насадки застосовують у пожежних брандспойтах, гідромоніторах та різних струминних апаратах.

У дифузорному насадку (див. рис. 3.78 д) після стиснення перерізу розширення потоку стає більшим, ніж у циліндричному насадку, що призводить до більших утрат напорі та зменшення коефіцієнтів швидкості й витрати. У той самий час витрата через дифузорний насадок збільшується, оскільки збільшується площа вихідного перерізу. Для запобігання відриву струменя від стінок насадка й перетворення на витікання з отвору в тонкій стінці кут конусності θ повинен бути не більшим ніж 12° . За дослідями оптимальні значення кута конусності й довжини дифузора – $\theta = 8^\circ$, $l = 9d$. У цьому разі коефіцієнти швидкості й витрати однакові – $\varphi = \mu = 0,45$, а величина витрати через насадок в 3,7 рази більша, ніж через отвір у тонкій стінці. Тобто такий насадок може пропустити велику витрату за відносно малої швидкості. Тому дифузорні насадки застосовують у коротких водопроводах для наповнення шлюзових камер, у разі випускання води на ґрунт для зменшення небезпеки розмивання.

У техніці використовують також інші види насадків. Інколи насадки конструктивно не є окремою короткою трубою, приєднаною до отвору, а являє собою свердління в товстій стінці. Свердління може бути циліндричним, конусним чи профільованим.

3.22.4 Траєкторія струменя

Розглянемо приклад, коли струмінь витікає з отвору чи насадка з горизонтальною швидкістю v (рис. 3.79).

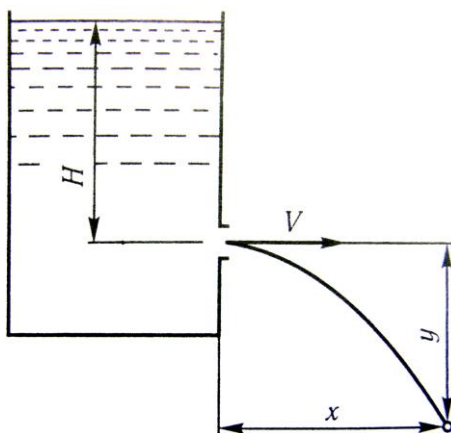


Рисунок 3.79 – Витікання струменя

За час t частина рідини в струмені подолає за горизонталлю відстань x :

$$x = v \cdot t .$$

За цей самий час t частина рідини в умовах вільного падіння пройде вертикальний шлях y :

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Ураховуючи $t = x/v$, одержуємо

$$y = \frac{gx^2}{2v^2}. \quad (3.109)$$

Вираз (3.109) є рівнянням траєкторії струменя, що рухається в повітрі. Тобто траєкторією струменя є парабола.

Координати x та y у будь-якій точці струменя можна визначити за допомогою експерименту або задати їх і потім знайти швидкість:

$$v = x \sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Витрату Q можна визначити об'ємним способом і потім знайти коефіцієнти швидкості й витрати:

$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2gH}},$$

$$\mu = \frac{Q}{\omega \sqrt{2gH}}.$$

Коефіцієнт стиснення визначають за формулою $\varepsilon = \mu/\varphi$. Він є більш точним, ніж визначений

безпосереднім вимірюванням розмірів перерізу струменя в повітрі.

3.22.5 Витікання рідини через отвори й насадки в разі змінного напору (спорожнення резервуара)

Розглянемо спорожнення відкритого резервуара довільної форми через отвір чи насадку із коефіцієнтом витрати μ (рис. 3.80).

Позначимо змінну висоту рівня рідини в резервуарі через h , площу перерізу резервуара на висоті h – через ω , площу перерізу отвору (насадка) – через ω_0 . Складемо рівняння витрати за нескінченно малий відрізок часу dt :

$$\omega dh = -Q dt ,$$

або

$$\omega dh = -\mu \omega_0 \sqrt{2gh} dt ,$$

де dh – зміна рівня рідини в резервуарі за час dt .

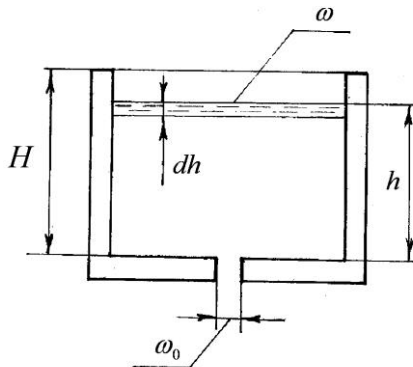


Рисунок 3.80 – СПорожнення відкритого резервуара

Знак мінус у правій частині рівняння обумовлений тим, що під час збільшення dt величина dh зменшується.

Час, потрібний для зміни рівня рідини в резервуарі на величину dh :

$$dt = - \frac{\omega dh}{\mu \omega_0 \sqrt{2gh}}.$$

Вважаючи, що $\mu = const$, після інтегрування одержуємо

$$t = - \frac{1}{\mu \omega_0 \sqrt{2g}} \int_H^0 \omega \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Час t можна визначити, якщо відомий закон зміни площі ω від висоти h . Для призматичного резервуара цей закон $\omega = const$, тому

$$t = \frac{\omega}{\mu \omega_0 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{H},$$

або

$$t = \frac{2\omega H}{\mu \omega_0 \sqrt{2gH}}. \quad (3.110)$$

У формулі (3.110) чисельник – це подвійний об'єм резервуара, знаменник – витрата через отвір чи насадок у разі початкового напору H .

Тобто час повного спорожнення резервуара вдвічі більший від часу витікання такого самого об'єму рідини за умови сталого напору, що дорівнює початковому.

Формула (3.110) показує час витікання основної маси рідини, оскільки під час зниження рівня рідини в резервуарі умови її руху змінюються. За умови малих напорів утворюється воронка, разом із рідиною проривається повітря, витрата рідини зменшується й час витікання збільшується. Наприкінці спорожнення лише окремі струминки й краплини стікатимуть уздовж кромek отвору.

3.22.6 Витікання рідини з дренованого резервуара

Дренований резервуар – це закритий резервуар, з'єднаний з атмосферою через отвір чи трубопровід.

Потік повітря під атмосферним тиском зі швидкістю U_1 потрапляє в закритий резервуар через отвір із площею ω_1 , який має опір ξ_1 (рис. 3.81).

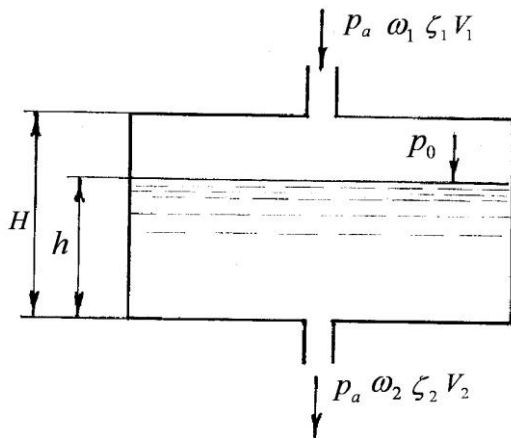


Рисунок 3.81 – Витікання з дренованого резервуара

Зі свого боку рідина під тиском p_0 зі швидкістю v_2 витікає в атмосферу через донний отвір площею ω_2 , що має опір ξ_2 .

Складемо рівняння Бернуллі для потоків повітря й рідини:

$$\begin{cases} \frac{p_{am}}{\gamma_n} = \frac{p_0}{\gamma_n} + (1 + \xi_1) \frac{v_1^1}{2g}, \\ h + \frac{p_0}{\gamma_p} = \frac{p_{am}}{\gamma_p} + (1 + \xi_2) \frac{v_2^2}{2g}. \end{cases}$$

Використаємо рівняння витрати

$$Q = v_1 \cdot \omega_1 = v_2 \cdot \omega_2.$$

Тоді, перетворюючи, одержуємо

$$\begin{cases} p_{am} = p_0 + (1 + \xi_1) \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \gamma_n, \\ \gamma_p h + p_0 = p_{am} + (1 + \xi_2) \frac{Q^2}{2g\omega_2^2} \gamma_p. \end{cases}$$

Для розв'язання системи рівнянь складемо ці рівняння й визначимо витрату Q . Тоді

$$\begin{aligned} p_{am} + \gamma_p h + p_0 &= p_0 + p_{am} + \\ &+ \left[(1 + \xi_1) \frac{\gamma_n}{2g\omega_1^2} + (1 + \xi_2) \frac{\gamma_p}{2g\omega_2^2} \right] Q^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$Q = \sqrt{\frac{2gh\gamma_p}{\frac{1+\xi_1}{\omega_1^2}\gamma_n + \frac{1+\xi_2}{\omega_2^2}\gamma_p}} . \quad (3.111)$$

Баланс витрати рідини в цьому прикладі

$$\omega dh = -Q dt .$$

Звідси

$$dt = \frac{\omega dh}{Q} .$$

Для визначення часу витікання з дренажного резервуара підставимо вираз (3.110) для витрати Q та проінтегруємо за висотою резервуара. Тоді

$$t = \frac{2\omega H}{\sqrt{2gH\gamma_p}} \sqrt{\frac{1+\xi_1}{\omega_1^2}\gamma_n + \frac{1+\xi_2}{\omega_2^2}\gamma_p} .$$

Величини $\xi_1, \xi_2, \omega_1, \omega_2, \gamma_n, \gamma_p$ відомі, тому другий добуток можна замінити на поправковий коефіцієнт k :

$$k = \sqrt{\frac{1+\xi_1}{\omega_1^2}\gamma_n + \frac{1+\xi_2}{\omega_2^2}\gamma_p} .$$

Тоді час витікання із дренажного резервуара

$$t = k \frac{2\omega H}{\sqrt{2gH\gamma_p}}. \quad (3.112)$$

Якщо доступ повітря в резервуар здійснюється через дренажний трубопровід, а витікання рідини – через спорожнюваний трубопровід, формула (3.112) теж буде справедливою. Але коефіцієнти ξ_1 і ξ_2 в цьому разі є сумарними для дренажного й спорожнюваного трубопроводів:

$$\xi_1 = \sum \xi_{1_i} + \lambda \frac{l_1}{d_1},$$

$$\xi_2 = \sum \xi_{2_i} + \lambda \frac{l_2}{d_2}.$$

Контрольні питання до розділу 3

1 Два методи вивчення руху рідини: метод Ейлера й метод Лагранжа. Різновиди руху.

2 Поле швидкостей та його геометричні характеристики. Рівняння лінії течії. Прискорення рідкої частинки.

3 Ламінарний і турбулентний режими руху рідини. Критерій Рейнольдса.

4 Рівняння Д. Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини. Фізичний зміст.

5 Рівняння Д. Бернуллі для потоку ідеальної рідини. Фізичний зміст членів рівняння.

6 Рівняння Д. Бернуллі для несталого й відносного руху.

7 Коефіцієнт утрати енергії по довжині й коефіцієнт Коріоліса за умови ламінарної течії в круглій циліндричній трубі.

8 Втрати енергії по довжині в разі турбулентного режиму руху рідини. Три зони опору.

9 Трубопроводи. Основні види. Мета й методика розрахунку. Характеристика трубопроводу.

10 Витікання рідини через отвори й насадки: приклади, фізика процесу, мета й методика розрахунків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы : учебник / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. – 2-е изд., перераб. – Москва : Машиностроение, 1982. – 423 с.
2. Чугаев Р. Р. Гидравлика (техническая механика жидкости) : учебник / Р. Р. Чугаев. – 4-е изд., доп. и перераб. – Ленинград : Энергоиздат, 1982. – 672 с.
3. Константинов Ю. М. Технічна механіка рідини і газу : підручник / Ю. М. Константинов, О. О. Гіжа. – Київ : Вища школа, 2002. – 277 с.
4. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям [Электронный ресурс] / И. Е. Идельчик ; под ред. М. О. Штейнберга. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 1992. – 672 с.
5. Вильнер Я. М. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам / Я. М. Вильнер, Я. Т. Ковалев, Б. Б. Некрасов ; под ред. Б. Б. Некрасова. – Минск : Вышэйшая школа, 1976. – 416 с.

Навчальне видання

**Ратушний Олександр Валерійович,
Гусак Олександр Григорович**

ГІДРАВЛІКА

Підручник

Видання друге, перероблене

Художнє оформлення обкладинки О. В. Ратушного
Редактор О. Ф. Дубровіна
Комп'ютерне верстання: Т. М. Мішакова, О. В. Ратушний

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 14,65. Обл.-вид. арк. 13,46. Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК 3062 від 17.12.2007.