

УДК 537.624

КП

№ держреєстрації 0116U002622.

Інв. №

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
(СумДУ)

40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2;  
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи  
д-р фіз.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_ А. М. Чорноус

ЗВІТ  
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ  
МАГНІТНІ, ТЕПЛОВІ ТА ТРАНСПОРТНІ ВЛАСТИВОСТІ  
ПЕРІОДИЧНО ЗБУДЖЕНИХ СИСТЕМ ФЕРОМАГНІТНИХ  
НАНОЧАСТИНОК  
(проміжний)

Начальник НДЧ  
канд. фіз.-мат. наук,  
старш. наук. співроб.

Д. І. Курбатов

Керівник НДР  
д-р фіз.-мат. наук, проф.

С. І. Денисов

(2017.12.11)

2017

Рукопис завершено 11 грудня 2017 г.  
Результати роботи розглянуті на засідання наукової ради СумДУ,  
протокол № 4 от 2017.12.28

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, голов. наук. співроб. д-р фіз.-мат. наук, проф.	2017.12.11	С. І. Денисов (реферат, вступ, розділ 1, висновки)
Зав. лаб. канд. фіз. -мат. наук, доцент	2017.12.11	Т. В. Лютий (вступ, розділ 2, висновки)
Мол. наук. співроб.	2017.12.11	Ю. С. Бистрик (підрозділи 1.1 1.2, 2.2)
Старш. наук. співроб. канд. фіз. - мат. наук, доцент	2017.12.11	О. С. Денисова (підрозділи 1.3, 2.2, 2.3)
Мол. наук. співроб., аспірант	2017.12.11	В. В. Рева (підрозділи 1.5, 2.1)
Лаборант, аспірант	2017.12.11	Б. О. Педченко (підрозділи 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 56 с., 22 рис., 45 джерел.

ДРЕЙФОВИЙ РУХ, ЕФЕКТ МАГНУСА, МАГНІТНА ТА МЕХАНІЧНА ДИНАМІКА, ПОТУЖНІСТЬ ВТРАТ, ФЕРОМАГНІТНА НАНОЧАСТИНКА.

Об'єкт дослідження – динаміка намагніченості наночастинок та їх поступальний і обертальний рухи в детермінованих і випадкових (теплових) магнітних полях.

Предмет дослідження – магнітні, теплові та транспортні властивості періодично збуджених систем феромагнітних наночастинок.

Мета дослідження – визначення індукованої намагніченості, дисипації енергії та швидкості дрейфу в періодично збуджених системах феромагнітних наночастинок.

Методи дослідження – методи мікромагнетизму, статистичної фізики та стохастичних рівнянь, чисельні методи.

На другому етапі НДР теоретично передбачено та чисельно підтверджено існування принципово нового механізму дрейфового руху феромагнітних наночастинок у в'язкій рідині, який виникає внаслідок дії на них сили Магнуса. Запропоновано точно розв'язувану детерміністичну модель дрейфу наночастинок, в рамках якої знайдено точні вирази для швидкості дрейфу, що відповідають всім можливим режимам поступального та обертального рухів наночастинок. Встановлено, що шляхом зміни зовнішніх параметрів (наприклад, частоти, амплітуди та початкової фази магнітного поля) можна змінювати як величину швидкості дрейфу наночастинок, так і напрямок їх дрейфу на протилежний. Вивчено також ефекти скінченності анізотропії в динаміці намагніченості і обертальній динаміці наночастинок. Показано, зокрема, що при певних умовах сумарна потужність втрат енергії магнітного поля, які відбуваються внаслідок прецесії намагніченості та обертання наночастинок, може суттєво залежати від величини поля анізотропії.

Результати даного етапу НДР можуть бути покладені в основу нового методу сепарації феромагнітних наночастинок в суспензіях, що базується на ефекті Магнуса.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
1 СПРЯМОВАНИЙ ТРАНСПОРТ ПЕРІОДИЧНО ЗБУДЖЕНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК, ІНДУКОВАНИЙ СИЛОЮ МАГНУСА В РІДКІЙ МАТРИЦІ .....	10
1.1 Мінімальний набір рівнянь руху .....	10
1.2 Траєкторія частинок і швидкість дрейфу .....	12
1.3 Точні аналітичні результати .....	13
1.3.1 Дрейф при $\kappa < 1$ .....	15
1.3.2 Дрейф при $\kappa = 1$ .....	19
1.3.3 Дрейф при $\kappa > 1$ .....	20
2 ВПЛИВ СКІНЧЕННОСТІ АНІЗОТРОПІЇ НА ОБЕРТАЛЬНУ ДИНАМІКУ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК .....	25
2.1 Опис моделі .....	25
2.1.1 Рівняння руху у випадку сумісної динаміки .....	26
2.1.2 Межі застосування динамічного наближення .....	28
2.2 Результати .....	30
2.2.1 Зв'язані коливання намагніченості та легкої вісі .....	31
2.2.2 Коливання намагніченості у нерухомій наночастинці .....	34
2.2.3 Коливання усієї наночастинки із зафіксованим магнітним моментом .....	37
2.2.4 Прецесійний режим руху наночастинки та її магнітного моменту .....	38
2.3 Обговорення та висновки .....	40
2.3.1 Коливальний режим руху наночастинки та її магнітного моменту .....	40
2.3.2 Прецесійний режим руху наночастинки та її магнітного моменту .....	48

ВИСНОВКИ .....	49
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....	52

## ВСТУП

Ефект Магнуса – це відхилення траєкторії тіла, що рухається в середовищі з обертанням, від траєкторії цього ж тіла, що рухається без обертання. Цей ефект відіграє важливу роль, наприклад, у спорті [1, 2], аеронавтиці [3] та формуванні планет [4, 5]. Зазначимо, що ефект Магнуса може існувати і у випадку локалізованих утворень середовища, таких як вихори у магнетиках, надпровідниках і надплинних рідинах, але його природа в кожному такому випадку своя (див., наприклад, [6, 7]).

Силу, яка викликає зміну траєкторії тіла що рухається з обертанням, зазвичай називають силою Магнуса. Оскільки ця сила залежить від багатьох факторів, таких як розмір тіла, його форми та шорсткості поверхні, від характеристик його поступального та обертального рухів, динаміки навколишнього середовища тощо, її розрахунок не є простою задачею. Більше того, за певних умов (наприклад при русі в розрідженому газі сфери що обертається [8, 9]), може існувати зворотний, а не класичний, ефект Магнуса, в якому напрямок сили Магнуса є протилежним до того, що визначається принципом Бернуллі. Однак у випадку гладких сферичних частинок, чиї поступальні та обертальні рухи характеризуються малими числами Рейнольдса, ефект Магнуса є класичним, а силу Магнуса можна визначити аналітично [10]. Хоч загалом ці умови є досить обмежувальними, їх можна легко реалізувати для малих частинок, диспергованих у в'язкій рідині.

Цей підхід особливо корисний при вивченні трансляційної та обертальної динаміки однодомених феромагнітних часток у суспензіях. Такі частинки можуть бути використані в таких біомедичних технологіях, як сепарація клітин, доставка ліків та лікування гіпертермією [11, 12]. Для гіпертермії найважливішу роль відіграють обертальні властивості частинок та їх намагніченість, тому вони є предметом багатьох досліджень. Зокрема, обертальні властивості, викликані лінійними та циркулярно поляризованими магнітними полями, вже добре вивчені в роботах [13, 14] та [15, 16] відповідно.

На відміну від цього, особливості трансляційної динаміки феромагнітних частинок під дією гармонічної сили та коливального магнітного поля не викликали такого інтересу. Це пояснюється тим, що

через відносно невелику силу Магнуса, зміщення часток, спричинене цією силою протягом періоду поля, також незначне. Однак, якщо зовнішня сила і магнітне поле належним чином синхронізовані, сила Магнуса може індукувати спрямований транспорт (дрейф) частинок. Цей ефект, який був передбачений і чисельно підтверджений в роботах [17, 18], представляє особливий інтерес для сепарації частинок, оскільки величину швидкості дрейфу та напрямок дрейфу можна легко керувати зовнішніми параметрами. На цьому етапі НДР ми представляємо повний аналітичний розв'язок мінімального набору рівнянь, які описують трансляційні та обертальні рухи диспергованих феромагнітних частинок, а також проводимо комплексний аналіз дрейфової швидкості.

Коректний опис динаміки феромагнітної наночастинки у в'язкій рідині є важливим для розуміння динаміки ферорідини під час її застосування. До сьогодні відгук ферорідин, що містять достатньо малі наночастинки, на зовнішнє змінне магнітне поле досліджується в першу чергу в рамках поняття комплексної магнітної сприйнятливості, що добре описана в роботі [19]. Однак, якщо магнітна енергія порівняна з термічною, відгук наночастинок буде визначатись в першу чергу індивідуальними траєкторіями наночастинок. Так, наприклад, детерміністичне обертання наночастинки у вязкому середовищі розглядається як основний канал дисипації для достатньо великих наночастинок, що здійснюють вимушене обертання під дією зовнішнього змінного поля [20]. Це дає підстави припускати, що детальний опис руху окремої наночастинки є актуальним.

Дві компоненти динаміки наночастинки слід розглядати одночасно для точного опису траєкторії: 1) механічне обертання (або так званий сферичний рух) наночастинки відносно в'язкої рідини; 2) внутрішня динаміка намагніченості наночастинки в кристалічній решітці. Оскільки одночасний опис двох зазначених рухів стикається з деякими труднощами, замість цього використовуються два наближення: 1) модель жорсткого диполя [21], коли магнітний момент наночастинки зафіксований в кристалічній решітці наночастинки завдяки сильній анізотропії, 2) модель фіксованої наночастинки [22], коли наночастинка вважається нерухомою завдяки жорсткому зв'язку з середовищем-носієм. Незважаючи на обмеження, обидва підходи широко використовуються для опису відгуку

ферромагнітної частинки в в'язкій рідині на змінний поле, включаючи проблему розрахунку втрат потужності, яка тісно пов'язана з таким методом терапії онкологічних захворювань як магнітна гіпертермія [23,24]. Так, модель жорсткого диполя була успішно застосована у динамічному та стохастичному наближеннях: було знайдено втрату потужності для циркулярно-поляризованого [25–27] та лінійно-поляризованого [27, 28]. Ефективне рівняння Ланжевена та ключові характеристики динаміки обертання були встановлені в [15]. Розрахунок втрат потужності в рамках моделі фіксованої наночастинки, де враховується тільки внутрішня загасаюча прецесія магнітного моменту, був зроблений в роботах [29–31]. Нарешті, ця проблема була досліджена в роботах [32, 33] для ансамблю наночастинок.

Зв'язана динаміка наночастинки не може бути описана простою суперпозицією цих двох типів руху через істотні зміни у рівняннях руху. Вперше такий вид руху: одночасного руху магнітного моменту частинки і всієї частинки, був описаний в роботі [34]). Незважаючи на це, дискусія про основні рівняння руху продовжується до цих пір [13, 14, 35, 36]. Це особливо важливо в контексті нагрівання ферорідин змінним полем, коли обидва ці типи руху репрезентують канали дисипації енергії. Одна з перших успішних спроб щодо опису поглинання енергії була описана в роботі [37]. Там втрата потужності була отримана в динамічному наближенні шляхом лінеаризації рівняння Лагранжа в деяких конкретних випадках. Але в рамках цього підходу рівняння руху не використовувалися. Вивчення зв'язаної динаміки в циркулярно-поляризованому магнітному полі за допомогою спрощених рівнянь руху подано в [38], однак проблема абсорбції енергії не була розглянута. Потужність втрати була розрахована в останніх дослідженнях [35, 36]. На жаль, тут не застосовувався правильний явний вигляд рівнянь руху, що стимулює подальшу дискусію щодо базових моделей рівнянь [13, 14]. І лише нещодавно досягнуто суттєвого прогресу в описі поглинання енергії в'язко-зв'язаною наночастинкою зі скінченою кінцевою анізотропією [39]. Тут досліджувався спектр поглинання мікрохвиль з використанням методу лінійного відгуку. Але в'язкий доданок не враховувався у зазначеній роботі, що мотивує подальші дослідження.



В даному дослідженні ми використовуємо коректні рівняння руху, представлені в роботі [13] для дослідження відгуку наночастинок на зовнішнє змінний поле. Основною метою є вивчення аспектів, пов'язаних з поглинанням енергії поля, з подальшою трансформацією в тепло. Зокрема, розглядається вплив рухливості легкої осі на резонансні залежності втрати потужності від частоти поля. Результати порівнюються з аналогами, отриманими за таких самих умов з використанням наближень жорсткого диполя та фіксованої наночастинок. У такий спосіб ми розкриваємо роль як в'язкого обертання цілої частки, так і загасаючої внутрішньої прецесії її магнітного моменту в процесі дисипації енергії. Робиться висновок про складний характер зв'язаної динаміки та неможливості розрізнити внесок кожного типу руху в сумісне нагрівання в динамічному наближенні.

# 1 СПРЯМОВАНИЙ ТРАНСПОРТ ПЕРІОДИЧНО ЗБУДЖЕНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК, ІНДУКОВАНИЙ СИЛОЮ МАГНУСА В РІДКІЙ МАТРИЦІ

## 1.1 Мінімальний набір рівнянь руху

Розглянемо достатньо розріджену суспензію однодоменних феромагнітних частинок сферичної форми, кожна з яких має радіус  $a$  і характеризується намагніченістю  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$  ( $M = |\mathbf{M}| = \text{const}$ ). Передбачається, що вектор намагніченості в заморожений вздовж легкої осі частинки (тобто, величина поля анізотропії досить велика), а також відбуваються поступальні та обертальні рухи, що викликані зовнішньою рушійною силою  $\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_d(t)$  та магнітним полем  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ . При цьому відповідні числа Рейнольдса, що характеризують даний рух, є достатньо малими. З цього випливає, що інерційними ефектами в динаміці часток можна знехтувати, а поступальні та обертальні рівняння можуть бути зведені до рівнянь сили та моменту –  $\mathbf{F} = 0$  і  $\mathbf{T} = 0$  відповідно. У найпростішому випадку ми маємо  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f + \mathbf{f}_l$  і  $\mathbf{T} = \mathbf{t}_m + \mathbf{t}_f$ , де  $\mathbf{f}_f$  – сила тертя,  $\mathbf{f}_l$  – підйомна сила Магнуса,  $\mathbf{t}_m$  – зовнішній механічний момент, і  $\mathbf{t}_f$  – момент сил тертя. З урахуванням вищеописаних припущень, сила тертя визначається законом Стокса  $\mathbf{f}_f = -6\pi\eta a \mathbf{v}$  ( $\eta$  – динамічна в'язкість рідини суспензії,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  – лінійна швидкість частинки), а зовнішній механічний крутний момент дорівнює обертальному моменту магнітного поля, тобто  $\mathbf{t}_m = (4\pi a^3/3)\mathbf{M} \times \mathbf{H}$  (знак  $\times$  означає векторний добуток). Нарешті, відповідно до [10], сила Магнуса та момент сил тертя, що діють на частинку при обертанні, задаються формулами  $\mathbf{f}_l = \pi \rho a^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  і  $\mathbf{t}_f = -8\pi\eta a^3 \boldsymbol{\omega}$ , де  $\rho$  – щільність рідини, а  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість частинки.

Рівняння  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{T} = 0$  і кінематичне диференціальне рівняння  $d\mathbf{M}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$  формують систему рівнянь, що визначає  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  та  $\mathbf{M}$  як функції від часу. Підставляючи розв'язок  $\boldsymbol{\omega} = (1/6\eta)\mathbf{M} \times \mathbf{H}$  рівняння  $\mathbf{T} = 0$  в інші рівняння системи, та припускаючи, що  $\mathbf{f}_d = f_m \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x$  ( $f_m$

і  $\Omega$  – амплітудна і кутова частоти рушійної сили,  $\mathbf{e}_x$  – одиничний вектор, що лежить вздовж осі  $x$ ), отримуємо

$$\mathbf{u} + \gamma \mathbf{u} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) = \sin(2\pi\tau) \mathbf{e}_x, \quad (1.1a)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = -\alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}). \quad (1.1b)$$

Тут  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/v_m$ ,  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$  і  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H_m$  – безрозмірні швидкість, намагніченість та магнітне поле частинки відповідно,  $v_m = f_m/6\pi a\eta$ ,  $H_m = \max|\mathbf{H}|$ , крапка над вектором означає похідну відносно безрозмірного часу  $\tau = \Omega t/2\pi$ . Безрозмірні параметри  $\gamma$  і  $\alpha$  визначаються як

$$\gamma = \frac{\rho a^2 M H_m}{36\eta^2}, \quad \alpha = \frac{\pi M H_m}{3\eta\Omega}. \quad (1.2)$$

Відповідно до рівнянь Eqs. (1.1), параметр  $\gamma$  характеризує величину сили Магнуса, а параметр  $\alpha$  може бути пов'язаний зі зворотним часом обертального релаксації.

Для подальшого спрощення ми припускаємо, що магнітне поле  $\mathbf{h}$  та намагніченість  $\mathbf{m}$  неоднорідно обертаються в площині  $xy$  і можуть бути представлені у вигляді

$$\mathbf{h} = \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (1.3b)$$

де азимутальний кут магнітного поля,  $\psi = \psi(\tau + \phi/2\pi)$ , є заданою періодичною функцією  $\tau$ , що задовольняє умовам  $\psi|_{1/2+\tau} = -\psi|_{\tau}$  (і таким чином  $\psi|_{1+\tau} = \psi|_{\tau}$ ),  $\phi \in [0, 2\pi]$  – початкова фаза, а  $\varphi = \varphi(\tau)$  – азимутальний кут вектора намагнічування. Виходячи з вищеприписаного, ми знаходимо  $\mathbf{m} \times \mathbf{h} = \sin \chi \mathbf{e}_z$  ( $\chi = \psi - \varphi$  – кут відставання),  $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) = \sin \chi (\sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y)$ , і  $\dot{\mathbf{m}} = -\dot{\varphi} (\sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y)$ . Тому з рівнянь Eqs. (1.1) та  $\gamma \ll 1$  (оскільки  $\gamma \sim a^2$ , ця умова не є надто сильною для

диспергованих частинок), ми отримуємо потрібний нам набір рівнянь:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{e}_x + \gamma \sin \chi \mathbf{e}_y) \sin (2\pi\tau), \quad (1.4a)$$

$$\dot{\chi} + \alpha \sin \chi = \dot{\psi} \quad (1.4b)$$

(для визначеності ми обрали  $\chi|_{\tau=0} = 0$ ). Цей набір рівнянь мінімальний в тому сенсі, що він є найпростішим, який описує поступальний рух часток, що нерівномірно обертаються у в'язкій рідині.

Таким чином, щоб знайти характеристики поступального руху суспендованих феромагнітних частинок, що визначається швидкістю частинки (1.4a), спочатку потрібно вирішити рівняння (1.4b), що відповідає за динаміку періодично керованого перевантаженого маятника. Деякі властивості його розв'язків вже вивчалися, наприклад, у контексті джозефсоновських з'єднань [40, 41]. Однак, наскільки нам відомо, не існує відомих стаціонарних рішень цього рівняння. Оскільки швидкість дрейфу визначається в стаціонарному стані (див. нижче), то пошук точних стаціонарних рішень рівняння (1.4b) має велике значення при аналітичному вивченні транспортних властивостей диспергованих частинок.

## 1.2 Траєкторія частинок і швидкість дрейфу

Відповідно до (1.4a), рівняння положення частинки  $\mathbf{S}(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{u}(\tau') d\tau'$  в момент часу  $\tau$  може бути записане в наступній формі:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau) = & \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\pi\tau)] \mathbf{e}_x \\ & + \gamma \int_0^\tau \sin[\chi(\tau' + \phi/2\pi)] \sin(2\pi\tau') d\tau' \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Представимо безрозмірний час  $\tau$  як  $\tau = n + \xi$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$  і  $\xi \in [0, 1]$  та введемо формулу для відносного положення частинки  $\mathbf{R}_n(\xi) = \mathbf{S}(n + \xi) - \mathbf{S}(n)$ . Далі записавши формулу для траєкторії частинок в

стаціонарному стані  $\mathbf{R}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_n(\xi)$ , одержуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\pi\xi)] \mathbf{e}_x \\ &+ \gamma \int_{\phi/2\pi}^{\xi+\phi/2\pi} \sin[\chi_{\text{st}}(\xi')] \sin(2\pi\xi' - \phi) d\xi' \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де  $\chi_{\text{st}}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(n + \xi)$  – стаціонарний розв'язок рівняння (1.4b) при  $\phi = 0$ .

Безрозмірне зміщення частинок протягом одного періоду зовнішньої сили (нагадаємо, у нашій моделі магнітне поле має той самий період) задається  $\mathbf{s} = \mathbf{R}(1)$ . Використавши (1.6), ми отримуємо  $s_x = 0$ , а також з умов  $\chi_{\text{st}}(0) = \chi_{\text{st}}(1)$  і  $\sin[\chi_{\text{st}}(1/2 + \xi)] = -\sin[\chi_{\text{st}}(\xi)]$  отримуємо

$$s_y = 2\gamma \int_0^{1/2} \sin[\chi_{\text{st}}(\xi)] \sin(2\pi\xi - \phi) d\xi. \quad (1.7)$$

Останній результат показує, що спільна дія гармонічної сили та нерівномірно обертається магнітного поля викликає дрейф частинки вздовж частинок вздовж осі  $y$ . Завдяки своєму визначенню, сила зсуву  $s_y$  може також розглядатися як безрозмірна дрейфова швидкість частинок (розмірна швидкість дрейфу записується як  $v_{\text{dr}} = v_m s_y$ ) [18]. Нашою метою є пошук точного аналітичного рішення рівняння (1.4b) у стаціонарному стані та вивчення залежності  $s_y$  від параметрів моделі.

### 1.3 Точні аналітичні результати

Далі ми розглянемо випадок, в якому азимутальний кут  $\psi(\tau)$  магнітного поля задається періодичною тригонометричною функцією:

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\pi} \psi_m \arcsin[\cos(2\pi\tau)] \quad (1.8)$$

( $\psi_m > 0$ , див рис. 1.1). Головною перевагою вибору  $\psi(\tau)$  є можливість аналітичного знаходження безперервного стаціонарного рішення рівняння (1.4b). Дійсно, згідно з (1.8),  $\dot{\psi}(\tau)$  є квадратною хвилею, тобто  $\dot{\psi}(\tau) = \mp 4\psi_m$ , де верхній знак відповідає  $\tau \in [n, n + 1/2)$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а нижній –  $\tau \in [n + 1/2, n + 1)$ . Тому в цьому випадку рівняння (1.4b) (нагадуємо, ми обрали  $\phi = 0$ ) може бути записане в диференційній формі:

$$\frac{d\chi}{\sin \chi \pm \kappa} = -\alpha d\tau. \quad (1.9)$$

Тут  $\kappa = 4\psi_m/\alpha$  – безрозмірний параметр, що характеризує амплітуду квадратної хвилі. З визначення (1.7), стаціонарне рішення рівняння (1.9),  $\chi_{st}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(n + \xi)$ , є для нас найбільш цікавим. Враховуючи той факт, що функція  $\chi_{st}(\xi)$  є періодичною з періодом 1, ми обмежемо безрозмірний час  $\xi$  інтервалом  $[0, 1]$ . Далі з рівняння (1.9) знаходимо наступні рівняння для  $\chi_{st}(\xi)$ :

$$\int_{\chi_{st}(0)}^{\chi_{st}(\xi)} \frac{dx}{\sin x + \kappa} = -\alpha \xi \quad \text{as } \xi \in [0, 1/2), \quad (1.10a)$$

$$\int_{\chi_{st}(1/2)}^{\chi_{st}(\xi)} \frac{dx}{\sin x - \kappa} = -\alpha \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \quad \text{as } \xi \in [1/2, 1). \quad (1.10b)$$

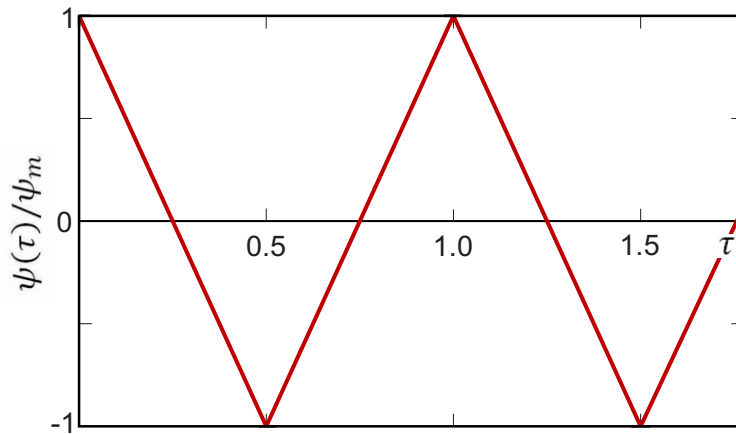


Рисунок 1.1 – Графік функції  $\psi(\tau)/\psi_m$  визначається (1.8). Ця функція періодична з періодом 1 і задовольняє умовам антисиметрії  $\psi(1/2 + \tau) = -\psi(\tau)$ .

Використавши той факт, що  $\dot{\psi}(1/2 + \xi) = -\dot{\psi}(\xi)$ , легко показати в

рівнянні (1.4b), що умова

$$\chi_{st}(1/2 + \xi) = -2\pi l - \chi_{st}(\xi) \quad (1.11)$$

має виконуватись, при цілих значеннях  $l$ , які визначаються параметрами  $\alpha$  та  $\kappa$  (див. нижче). Це означає, що рівняння (1.10b) може бути виключене з подальшого аналізу і для знаходження  $\chi_{st}(\xi)$  на інтервалі  $[0, 1]$  ми можемо використати рівняння (1.10a) та умову (1.11). Оскільки інтеграл в рівнянні (1.10a) залежить від того, чи є параметр  $\kappa$  більшим, меншим чи рівним одиниці, ми розглядаємо рух дрейфу частинок для цих випадків окремо.

### 1.3.1 Дрейф при $\kappa < 1$

Поверхневий аналіз рівняння (1.10) показує, що у випадку  $\kappa < 1$  стаціонарне рішення рівняння (1.9) має задовільняти наступні нерівності:  $-\arcsin \kappa < \chi_{st}(\xi) < \arcsin \kappa$ . З цього випливає, що  $l = 0$  і що умова (1.11) при  $\kappa < 1$  зводиться до  $\chi_{st}(1/2 + \xi) = -\chi_{st}(\xi)$ . Щоб знайти  $\chi_{st}(\xi)$  для  $\xi \in [0, 1/2)$ , ми використаємо рівняння (1.10a) і стандартний інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x + \kappa} = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \ln \frac{\kappa \tan(x/2) + 1 - \sqrt{1 - \kappa^2}}{\kappa \tan(x/2) + 1 + \sqrt{1 - \kappa^2}} \quad (1.12)$$

(див. рівняння (1.5.9.14) в [42]). Вводимо наступні позначення:

$$Q(\xi) = \kappa \tan \frac{\chi_{st}(\xi)}{2} + 1 \quad (1.13)$$

і

$$\sigma = \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (1.14)$$

та використавши (1.12), рівняння (1.10a) може бути представлене у формі

$$\frac{Q(\xi) - \sqrt{1 - \kappa^2}}{Q(\xi) + \sqrt{1 - \kappa^2}} = \frac{Q(0) - \sqrt{1 - \kappa^2}}{Q(0) + \sqrt{1 - \kappa^2}} e^{-4\sigma\xi}. \quad (1.15)$$

Розв'язок цього рівняння відносно  $Q(\xi)$  дає

$$Q(\xi) = \sqrt{1 - \kappa^2} \frac{Q(0) + \sqrt{1 - \kappa^2} \tanh(2\sigma\xi)}{Q(0) \tanh(2\sigma\xi) + \sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad (1.16)$$

де  $Q(0)$  також може бути визначений з рівняння (1.15). Дійсно, підставивши в це рівняння  $\xi = 1/2$  і замінивши  $Q(1/2)$  на  $2 - Q(0)$  [це можливо через те, що  $\chi_{st}(1/2) = -\chi_{st}(0)$ ], отримуємо

$$Q(0) = \kappa^2 \frac{\tanh \sigma}{\sqrt{1 - \kappa^2} / \cosh^2 \sigma + \sqrt{1 - \kappa^2}} + 1. \quad (1.17)$$

Тепер, використовуючи позначення (1.13), кут відставання в стаціонарному стані може бути представлений наступним чином:

$$\chi_{st}(\xi) = 2 \arctan \frac{Q(\xi) - 1}{\kappa}, \quad (1.18)$$

де  $\arctan x$  відповідає основному значенню арктангенса, тобто  $\arctan x$  належить інтервалу  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Зазначимо також, що в конкретному випадку, коли  $\xi = 0$ , вирази (1.18) і (1.17) дають наступний результат:

$$\chi_{st}(0) = \arctan \left( \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \tanh \sigma \right). \quad (1.19)$$

Це означає, що умова  $\chi_{st}(0) \in [0, \pi/2)$  виконується завжди.

Аналітичні графіки  $\chi_{st}(\xi)$  на інтервалі  $[0, 1]$ , які отримані з (1.16)–(1.18) та умови  $\chi_{st}(1/2 + \xi) = -\chi_{st}(\xi)$ , показані на рис. 1.2 суцільною на пунктирною лініями відповідно. Чисельний результат, який представлений на рисунку квадратними та трикутними символами, підтверджує результат теоретичний. Вплив сили Магнуса на траєкторії магнітних частинок, що призведе до їх дрейфу, проілюстровано на рис. 1.3. Як і раніше, наші теоретичні та числові результати повністю узгоджуються.

Нарешті, розрахуємо дрейфову швидкість ферромагнітних частинок, викликану силою Магнуса. Враховуючи що  $\sin(2 \arctan x) = 2x/(1 + x^2)$ ,



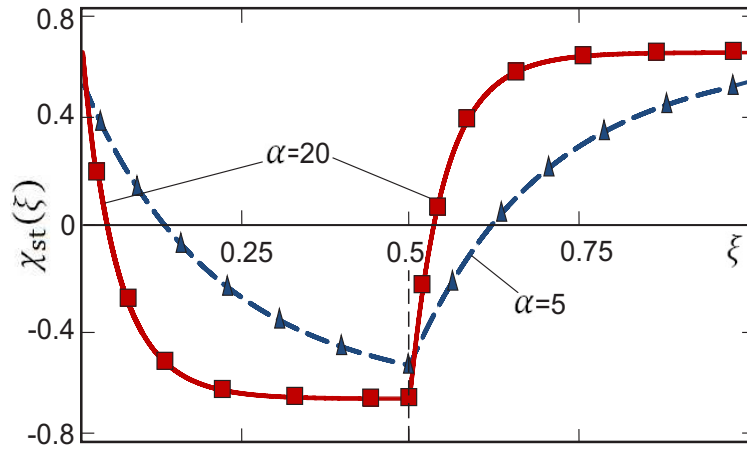


Рисунок 1.2 – Часова залежність кута відставання в стаціонарному стані при  $\kappa = 0.6$ . Суцільна та пунктирна лінії представляють теоретично отриманий результат (1.18) для  $\alpha = 20$  і  $\alpha = 5$  відповідно. Для цих же значень  $\alpha$ , чисельне рішення рівняння (1.4b) на  $n$ -ному періоді функції (1.8) (для досягнення стаціонарного стану, було обрано  $n = 10^2$ ) представлені квадратними та трикутними символами.

з (1.18) отримуємо

$$\sin [\chi_{st}(\xi)] = 2\kappa \frac{Q(\xi) - 1}{\kappa^2 + (Q(\xi) - 1)^2}. \quad (1.20)$$

Підставляючи праву частину цього співвідношення в (1.7), ми приходимо до наступного виразу для швидкості дрейфу:

$$s_y = 4\gamma\kappa \int_0^{1/2} \frac{Q(\xi) - 1}{\kappa^2 + (Q(\xi) - 1)^2} \sin(2\pi\xi - \phi) d\xi, \quad (1.21)$$

що відповідає  $\kappa < 1$ . У граничному випадку, коли  $\alpha \rightarrow \infty$ , ми отримуємо відповідно до виразів (1.16) і (1.21) що  $Q(\xi)|_{\alpha=\infty} = \sqrt{1 - \kappa^2}$  ( $\xi \neq 0$ ) і

$$s_y|_{\alpha=\infty} = -\frac{2}{\pi} \gamma\kappa \cos \phi. \quad (1.22)$$

У протилежному граничному випадку, коли  $\alpha \rightarrow 0$ , ми маємо  $Q(\xi) \sim 1 + (\kappa^2/8)(1 - 4\xi)\alpha$  і

$$s_y|_{\alpha \rightarrow 0} \sim -\frac{1}{\pi^2} \gamma\kappa\alpha \sin \phi. \quad (1.23)$$

На рис. 1.4 показані залежності швидкості дрейфу (1.21) від

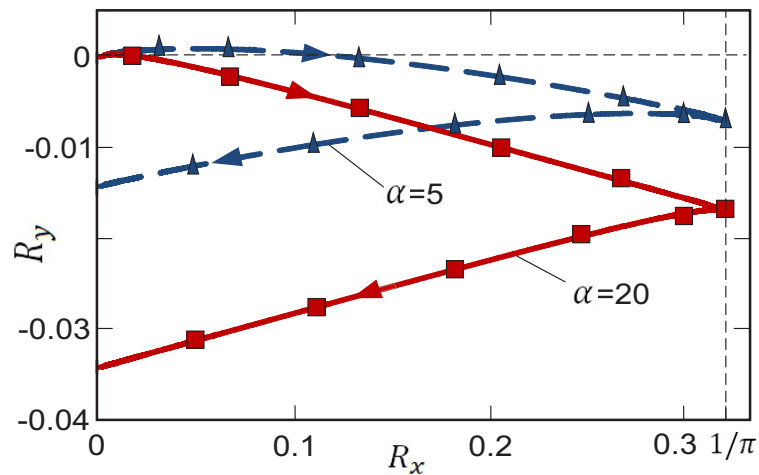


Рисунок 1.3 – Фрагменти стаціонарних траєкторій частинок, що отримані при  $\kappa = 0.6$ ,  $\gamma = 0.1$  і  $\phi = 0$  для одного періода рушійної сили. Суцільною та пунктирною лініями представлений теоретичний вигляд траєкторій, отриманий з (1.6) і (1.20) для  $\alpha = 20$  і  $\alpha = 5$ . Початкова точка цих траєкторій відповідає  $\xi = 0$  ( $R_x|_{\xi=0} = R_y|_{\xi=0} = 0$ ), а кінцеві точки відповідають  $\xi = 1$  і визначають швидкості дрейфу ( $R_x|_{\xi=1} = 0$ ,  $R_y|_{\xi=1} = s_y$ ). Символами квадрата та трикутника позначені позиції частинок, знайдені при чисельному рішенні рівнянь (1.6) і (1.4b).

параметра  $\alpha$  для різних значень початкової фази  $\phi$ . Їх особливістю є наявність локальних максимумів або мінімумів. Оскільки  $\alpha$  залежить від кутової частоти  $\Omega$ , див. (1.2), це означає, що існує така частота, при якій абсолютна величина швидкості дрейфу досягає максимуму. Інша важлива особливість полягає в тому, що дрейф різних частинок (тобто частинок, що характеризуються різними значеннями параметра  $\alpha$ ), може відбуватися в протилежних напрямках, залежно від початкової фази. Саме така ситуація представлена на рисунку 1.4, теоретично та чисельно отриманими даними для  $\phi = 0.6 \text{ rad}$ . Для цього випадку всі частинки з  $\alpha < \alpha_{cr}$ , де  $\alpha_{cr} \approx 20.58$  є розв'язком рівняння  $s_y = 0$ , дрейфують проти осі  $y$  ( $s_y < 0$ ), а всі частинки з  $\alpha > \alpha_{cr}$  дрейфують вздовж цієї осі ( $s_y > 0$ ). У роботі [?] нами було запропоноване використання цього явища для розділення ферромагнітних "core-shell" частинок у розведених суспензіях. Слід також підкреслити, що згідно з (1.21) початкова фаза магнітного поля сильно впливає на швидкість дрейфу. Як видно на рис. 1.5, початкова фаза визначає як величину, так і напрямок.

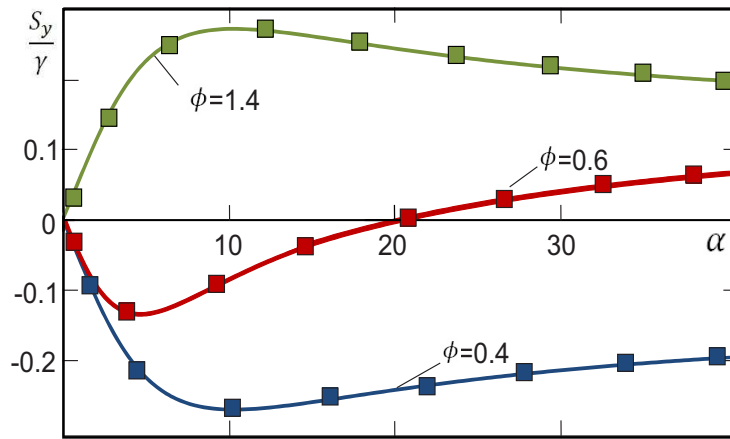


Рисунок 1.4 – Швидкість дрейфу  $s_y/\gamma$  як функція від параметру  $\alpha$ . Суцільні лінії, що зображують залежність цієї функції від початкової фази  $\phi$  (вимірюється в радіанах), представляє теоретичний результат (1.21) при  $\kappa = 0.6$ . Чисельні результати отримані з (1.7) і рівняння (1.4b) зображені квадратними символами

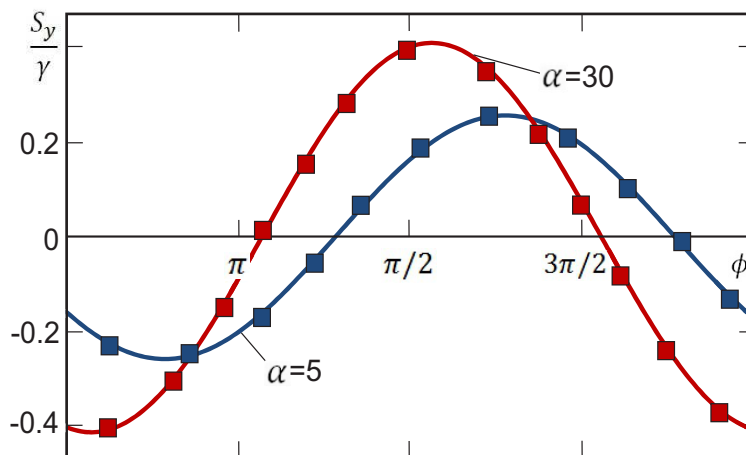


Рисунок 1.5 – Швидкість дрейфу  $s_y/\gamma$  як функція від початкової фази  $\phi$  при  $\kappa = 0.6$  і різних значеннях  $\alpha$ . Теоретичні та чисельні результати визначаються так само як і на рис. 1.4.

### 1.3.2 Дрейф при $\kappa = 1$

Для того, щоб знайти швидкість дрейфу при  $\kappa = 1$ , спочатку знайдемо границю  $\kappa \rightarrow 1$  для вищенаведених виразів. Оскільки  $\tanh x \sim x$  та  $\cosh x \sim 1$  при  $x \rightarrow 0$ , з (1.16) та (1.17) отримуємо

$$Q(\xi)|_{\kappa=1} = \frac{2 Q(0)|_{\kappa=1}}{\alpha Q(0)|_{\kappa=1} \xi + 2} \quad (1.24)$$

i

$$Q(0)|_{\kappa=1} = \frac{1 + \alpha/4 + \sqrt{1 + (\alpha/4)^2}}{1 + \sqrt{1 + (\alpha/4)^2}} \quad (1.25)$$

[в додаток, формула (1.19) включає в себе  $\chi_{st}(0)|_{\kappa=1} = \arctan(\alpha/4)$ ]. Далі, використовуючи (1.24) і (1.25), ми можемо записати з (1.20)

$$\sin[\chi_{st}(\xi)]|_{\kappa=1} = -1 + \frac{2}{1 + q^2(\xi)}, \quad (1.26)$$

де

$$q(\xi) = \alpha\xi - \frac{\alpha}{4} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2}, \quad (1.27)$$

і, як наслідок, представляють собою швидкість дрейфу частинок (1.21) при  $\kappa = 1$  в формі

$$s_y|_{\kappa=1} = -\frac{2\gamma}{\pi} \cos \phi + 4\gamma \int_0^{1/2} \frac{\sin(2\pi\xi - \phi)}{1 + q^2(\xi)} d\xi. \quad (1.28)$$

Відзначимо, що аналогічний результат слідує з прямого рішення рівняння (1.4b) при  $\kappa = 1$  [18].

### 1.3.3 Дрейф при $\kappa > 1$

За таких умов, рішення рівняння (1.10a) може сильно відрізнитися від отриманого виразу для  $\kappa \leq 1$ . Причиною є те, що інтегральний вираз у (1.10a) є обмеженим по  $x$ , і, як наслідок, кут відставання  $\chi_{st}(\xi)$  може змінюватися у достатньо широкому інтервалі. Іншими словами, якщо параметри  $\alpha$  та  $\kappa$  є достатньо великими (див. нижче), то  $l$  в (1.11) може бути ненульовим. Щоб у цьому випадку знайти  $\chi_{st}(\xi)$ , ми використовуємо стандартний інтеграл (див. формулу (1.5.9.13) у [42]).

$$\int \frac{dx}{\sin x + \kappa} = \frac{2}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \arctan \frac{\kappa \tan(x/2) + 1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \quad (1.29)$$

( $\kappa > 1$ ). З цим результатом, рівняння (1.10а) може бути зведене до

$$\tan \left( \arctan \frac{R(0)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} - \arctan \frac{R(\xi)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \right) = \tan (2\nu\xi), \quad (1.30)$$

де, за визначенням

$$R(\xi) = \kappa \tan \frac{\chi_{\text{st}}(\xi)}{2} + 1 \quad (1.31)$$

(тобто  $R(\xi)$  це  $Q(\xi)$  при  $\kappa > 1$ ) і

$$\nu = \frac{\alpha}{4} \sqrt{\kappa^2 - 1}. \quad (1.32)$$

Вирішуючи рівняння

$$\sqrt{\kappa^2 - 1} \frac{R(0) - R(\xi)}{\kappa^2 - 1 + R(0)R(\xi)} = \tan (2\nu\xi) \quad (1.33)$$

відносно  $R(\xi)$ , що слідує з рівняння (1.13), знаходимо

$$R(\xi) = \sqrt{\kappa^2 - 1} \frac{R(0) - \sqrt{\kappa^2 - 1} \tan (2\nu\xi)}{R(0) \tan (2\nu\xi) + \sqrt{\kappa^2 - 1}}. \quad (1.34)$$

Початкове значення цієї функції,  $R(0)$ , підпорядковується рівнянню

$$\frac{2\sqrt{\kappa^2 - 1} [R(0) - 1]}{\kappa^2 - 1 + R(0)[2 - R(0)]} = \tan \nu, \quad (1.35)$$

які можуть бути отримані з рівняння (1.33) при  $\xi = 1/2$ , використавши умови (1.11). Припускаючи, що  $\chi_{\text{st}}(0) \in (0, \pi)$ , рішення рівняння (1.35), що задовільняє умову  $R(0) > 1$  матиме вигляд

$$R(0) = 1 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\tan \nu} + \sqrt{\frac{\kappa^2 - 1}{\tan^2 \nu} + \kappa^2}. \quad (1.36)$$

Якщо параметр  $\nu$  є обмеженим

$$p\pi < \nu < (p+1)\pi \quad (1.37)$$

( $p = 0, 1, 2, \dots$ ), тоді з (1.31), (1.36) та  $\tan x = 2 \tan(x/2)/[1 - \tan^2(x/2)]$  ми отримуємо

$$\chi_{\text{st}}(0) = \arctan\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \tan \nu\right) \quad (1.38)$$

при  $p\pi < \nu < p\pi + \pi/2$  і

$$\chi_{\text{st}}(0) = \pi + \arctan\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \tan \nu\right) \quad (1.39)$$

при  $p\pi + \pi/2 < \nu < p\pi + \pi$ . Зауважте, що, оскільки відповідно до (1.38) і (1.39)  $\chi_{\text{st}}(0)|_{\nu=p\pi+\pi/2-0} = \chi_{\text{st}}(0)|_{\nu=p\pi+\pi/2+0}$ ,  $\chi_{\text{st}}(0)$  це безперервна функція параметрів  $\alpha$  і  $\kappa$ .

Як це слідує з визначення (1.31) і той факт, що кут відставання в стаціонарному стані  $\chi_{\text{st}}(\xi)$  монотонно зменшується в інтервалі  $[0, 1/2)$ , функція  $\chi_{\text{st}}(\xi)$  за умов (1.37) може бути виражено через  $R(\xi)$  в наступному вигляді:

$$\chi_{\text{st}}(\xi) = -2\pi p(\xi) + 2 \arctan \frac{R(\xi) - 1}{\kappa} \quad (1.40)$$

Тут,  $p(\xi)$  це цілочисельна функція змінної  $\xi$  [нагадуємо,  $\xi \in [0, 1/2]$ ], що забезпечує безперервність  $\chi_{\text{st}}(\xi)$ . Наприклад, при  $0 < \nu < \pi$  (тобто,  $p = 0$ ), тоді  $p(\xi) = 0$  для всіх допустимих значень  $\xi$ , і при  $p \geq 1$  тоді  $p(\xi)$  визначається як

$$p(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \xi_1, \\ 1, & \xi_1 < \xi < \xi_2, \\ \vdots & \vdots \\ p, & \xi_p < \xi < 1/2, \end{cases} \quad (1.41)$$

де

$$\xi_k = \frac{1}{2\nu} \left( k\pi - \arctan \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{R(0)} \right) \quad (1.42)$$

з  $k = 1, 2, \dots, p$  є рішенням рівняння  $\tan(2\nu\xi) = -\sqrt{\kappa^2 - 1}/R(0)$  що

належать інтервалу  $[0, 1/2)$ . Слід підкреслити, що, згідно з (1.34),  $|R(\xi_k)| = \infty$  і  $p(1/2) = p$ , ціле число  $l$  в умові  $\chi_{st}(1/2) = -2\pi l - \chi_{st}(0)$ , що слідує з (1.11), дорівнює  $p$ . Для ілюстрації, на рис. 1.6 ми показуємо залежність кута відставання (1.40) від безрозмірного часу  $\xi$  при  $\alpha = 5$  для двох значень параметра  $\kappa$ . А саме, при  $\kappa = 2.5$ , тобто,  $\nu \approx 2.86 \in (0, \pi)$ , то функція  $p(\xi)$  дорівнює нулю, і при  $p = l = 0$ , в цьому випадку, кут відставання задовольняє умовам  $\chi_{st}(1/2 + \xi) = -\chi_{st}(\xi)$ . Навпаки, якщо  $\kappa = 3.5$ , тобто  $\nu \approx 4.19 \in (\pi, 2\pi)$ , то  $p(\xi) = 0$  при  $0 \leq \xi < \xi_1$  і  $p(\xi) = 1$  при  $\xi_1 < \xi < 1/2$ , де згідно з (1.42),  $\xi_1 \approx 0.28$ . Тому в цьому випадку  $p = l = 1$  і, як наслідок повинна дотримуватись умова  $\chi_{st}(1/2 + \xi) = -2\pi - \chi_{st}(\xi)$ . Числові значення для  $\chi_{st}(\xi)$ , отримані численним рішенням рівняння (1.4b) з початковою умовою  $\chi(0) = 0$ , представлені квадратними символами.

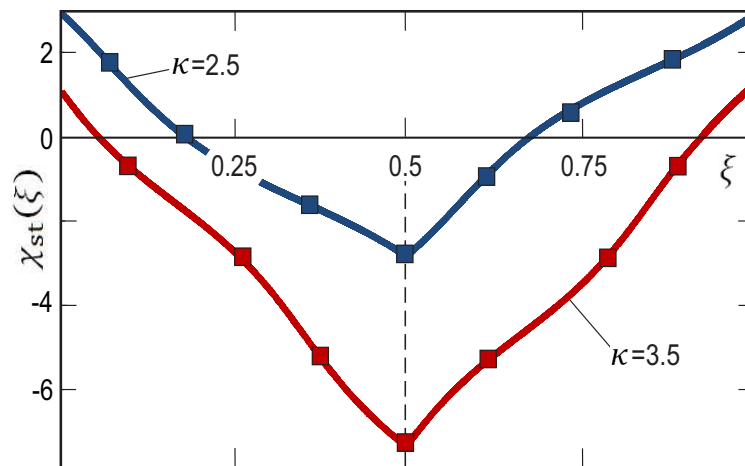


Рисунок 1.6 – Кут відставання в стаціонарному стані як функція безрозмірного часу  $\xi$  при  $\alpha = 5$ ,  $\phi = 0$  і різних  $\kappa$ . Суцільними лініями представлений теоретичний результат (1.40), квадратними символами представлений результат чисельного рішення рівняння (1.4b), що задовільняє початкову умову  $\chi(0) = 0$ . Ділянка з  $\kappa = 2.5$  відповідає умові  $p = 0$  [тому що в цьому випадку  $\nu \approx 2.86 \in (0, \pi)$ ], а ділянка з  $\kappa = 3.5$  відповідає умові  $p = 1$  [тому що в цьому випадку  $\nu \approx 4.19 \in (\pi, 2\pi)$ ].

Для розрахунку швидкості дрейфу при  $\kappa > 1$ , ми спочатку виразимо  $\sin[\chi_{st}(\xi)]$  через  $R(\xi)$ . Розраховавши аналогічно випадку при 1.3.1, отримуємо

$$\sin[\chi_{st}(\xi)] = 2\kappa \frac{R(\xi) - 1}{\kappa^2 + (R(\xi) - 1)^2}, \quad (1.43)$$

і, отже, швидкість дрейфу частинок (1.7) приймає форму

$$s_y = 4\gamma\kappa \int_0^{1/2} \frac{R(\xi) - 1}{\kappa^2 + (R(\xi) - 1)^2} \sin(2\pi\xi - \phi) d\xi. \quad (1.44)$$

Варто відзначити, що у випадку, коли  $\alpha \rightarrow 0$  і  $\kappa \rightarrow 1$  цей результат зводиться до (1.23) і (1.28) відповідно.

Наш аналіз показав, що залежності швидкості дрейфу (1.44) від параметру  $\alpha$  і початкової фази  $\phi$  якісно такі ж, як і при  $\kappa < 1$ . Тому тут ми більш детально аналізуємо залежність  $s_y$  від  $\kappa$ , що зображена на рисунку 1.7. Теоретичні результати для  $s_y$  (суцільні лінії) отримані з (1.21) (при  $\kappa < 1$ ) і (1.44) (при  $\kappa > 1$ ), а чисельні (квадратні символи) отримані з (1.7) шляхом чисельного розв'язку рівняння (1.4b). Найважливішою особливістю  $s_y$  як функції від  $\kappa$  є те, що величина швидкості дрейфу,  $|s_y|$ , має максимум при  $\kappa = \kappa_m > 1$  (since  $s_y|_{\pi+\phi} = -s_y|_{\phi}$ , а напрям швидкості залежить від  $\phi$ ). Зокрема, якщо  $\phi = 0$  і  $\alpha = 10$ , то  $\kappa_m \approx 1.25$  і  $(s_y/\gamma)|_{\kappa=\kappa_m} \approx -0.44$  (див. криву для  $\alpha = 10$  на рис. 1.7). Якщо, крім того,  $\gamma = 0.1$  і  $v_m = 10^{-2}$  см/с [18], то для розмірної швидкості дрейфу  $v_{dr} = v_m s_y$  знаходимо  $v_{dr}|_{\kappa=\kappa_m} \approx -4.4 \times 10^3$  нм/с. Слід також зазначити, що в той час як  $s_y$  при  $\kappa > \kappa_m$  є монотонною функцією від  $\kappa$ , це не так для  $ds_y/d\kappa$  (для ілюстрації див. криві при  $\alpha = 10$  і  $\alpha = 50$ ). Нарешті, використовуючи (1.21), можна показати, що  $s_y \sim (1/\pi^2)\gamma\kappa\alpha \sin \phi$  при  $\kappa \rightarrow 0$ , тобто, асимптотична формула (1.23) справедлива для обох випадків  $\alpha \rightarrow 0$  і  $\kappa \rightarrow 0$ , а асимптотична формула (1.22) добре описує залежність  $s_y$  від  $\kappa$  при  $\alpha = 50$  і  $\kappa < 1$ .



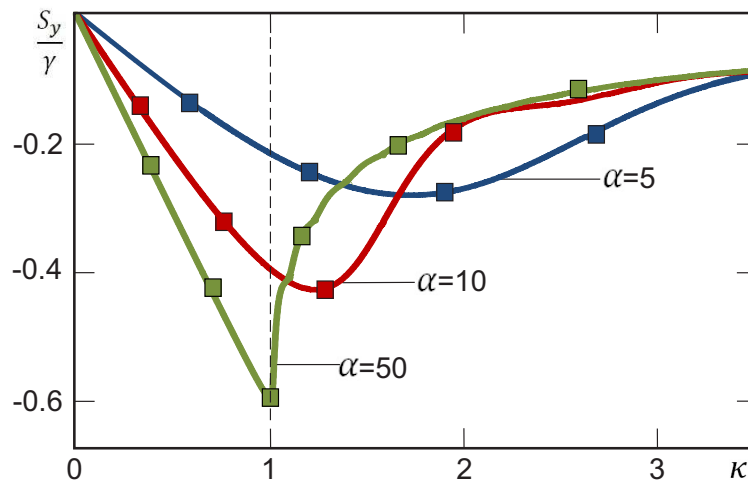


Рисунок 1.7 – Швидкість дрейфу  $s_y/\gamma$  як функція від параметру  $\kappa$  при  $\phi = 0$  і різних значеннях  $\alpha$ . Теоретичні криві при  $\kappa < 1$  і  $\kappa > 1$  розраховані за формулами (1.21) і (1.44) відповідно, а числові результати (квадратні символи) отримані з визначення (1.7) і рівняння (1.4b).

## 2 ВПЛИВ СКІНЧЕННОСТІ АНІЗОТРОПІЇ НА ОБЕРТАЛЬНУ ДИНАМІКУ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК

### 2.1 Опис моделі

Нехай наночастинка знаходиться у полі вигляду

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x H \cos(\Omega t) + \mathbf{e}_y \sigma H \sin(\Omega t), \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  - одиничні вектори декартових координат,  $H$  - амплітуда поля,  $\Omega$  - частота поля,  $t$  - час, а  $\sigma$  - коефіцієнт, який визначає тип поляризації ( $\sigma = \pm 1$  відповідає циркулярно-поляризованому полю,  $0 < |\sigma| < 1$  відповідає еліптично-поляризованому полю, а  $\sigma = 0$  відповідає лінійно поляризованому полю). Як взаємодія з в'язким середовищем, так і загасаюча прецесія магнітного моменту  $\mathbf{M}$  всередині частинки призводять до розсіювання енергії наночастинки та подальшого нагрівання навколишнього середовища. Ці втрати компенсуються поглинанням енергії зовнішнього поля типу (2.1) і можуть бути охарактеризовані безрозмірними втратами потужності за період, розрахованим як [31]

$$q = \frac{\Omega}{2\pi M H_a} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} dt \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

### 2.1.1 Рівняння руху у випадку сумісної динаміки

Будуть розглянуті три підходи: 1) модель в'язко-зв'язаної наночастинки зі скінченною (FA-модель); 2) модель фіксованої частинки (FP-модель); 3) модель жорсткого диполя (RD-модель). Почнемо з першої, як більш важливої та нової. Як випливає з [13], зв'язана магнітна динаміка та механічний рух в детерміністичному випадку підкоряються системі рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \gamma^{-1}V\dot{\mathbf{M}} + V\mathbf{M} \times \mathbf{H} - 6\eta V\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $(\mathbf{n})$  - одиничний вектор, який визначає напрямок осі анізотропії,  $\boldsymbol{\omega}$  - кутова швидкість частинки,  $J(= 8\pi\rho R^5/15)$  - момент інерції частки,  $\gamma$  - це гіромагнітне співвідношення,  $V$  - об'єм наночастинки, а точки над символами представляють похідні за часом.

Фактично, перше рівняння в множині (2.3) є умовою сферичного руху твердого тіла, а друге - класичним рівнянням обертання, де перший член являє собою основну відмінність від того ж рівняння для RD-моделі. Цей доданок походить від руху намагніченості всередині наночастинки відносно її кристалічної решітки. У свою чергу, динаміка намагніченості описується модифікованим рівнянням Ландау-Ліфшица-Гільберта (LLG)

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} + \alpha_0 M^{-1} \left( \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \right), \quad (2.4)$$

де  $\alpha_0$  - параметр затухання,  $\mathbf{H}_{eff}$  - це ефективне магнітне поле, в якому враховується поле одноосової анізотропії  $H_a$

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + H_a M^{-1} (\mathbf{Mn}) \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Тут різниця з оригінальним рівнянням ЛГГ полягає у наявності доданку, що пропорційний до  $\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ , який виключає компоненту намагніченості  $\mathbf{M}$ , що обертається разом з кристалічною решіткою. Як правило, інерційний доданок в (2.3) може бути знехтуваним навіть для досить великих наночастинок ( $R > 20 \text{ nm}$ ) у широкому діапазоні частот. Тому для подальшого аналізу ми переписуємо рівняння руху (2.3) і (2.4) до більш зручної форми

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}} &= MH_a [\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} / \Omega_r + (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n}] / 6\eta, \\ \dot{\mathbf{m}}(1 + \beta) &= -\Omega_r \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff}^1 + \alpha_0 \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $\Omega_r = \gamma H_a$  - частота феромагнітного резонансу,  $\beta = \alpha_0 M / 6\gamma\eta$ ,

$$\mathbf{h}_{eff}^1 = (\mathbf{e}_x h \cos \Omega t + \mathbf{e}_y h \sigma \sin \Omega t) (1 + \beta) + (\mathbf{mn}) \mathbf{n}, \quad (2.7)$$

і, нарешті,  $\mathbf{m} = \mathbf{M} / M$ ,  $h = H / H_a$  - безрозмірні магнітний момент та амплітуда поля, відповідно.

модель фіксованої наночастинок, або FP-модель описується відомим звичайним рівнянням ЛЛГ

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} + \alpha_0 M^{-1} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} \quad (2.8)$$

або, в безрозмірному вигляді

$$\dot{\mathbf{m}} = -\Omega_r \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff} + \alpha_0 \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}, \quad (2.9)$$

де  $\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{H}_{eff} / H_a$ .

Нарешті, модель жорсткого диполя, або RD-model описується системою рівнянь, подібною до (2.3), однак без доданка, пропорційного до  $\dot{\mathbf{M}}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= VM\mathbf{n} \times \mathbf{H} - 6\eta V\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Якщо знехтувати інерційним доданком, рівняння (2.10) трансформуються до більш простої форми

$$\dot{\mathbf{n}} = -\Omega_{cr}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{h}), \quad (2.11)$$

де  $\Omega_{cr} = MH_a/6\eta$  є характерною частотою механічного обертання наночастинки.

### 2.1.2 Межі застосування динамічного наближення

Використані системи рівнянь справедливі, якщо теплові флуктуації не впливають суттєво на отримані траєкторії. Існує два основних питання, які слід розглянути у зв'язку із цим. По перше, магнітна енергія повинна бути набагато більшою, ніж теплова енергія, або  $\Gamma \gg 1$ , де  $\Gamma = MHV/(k_B T)$ ,  $T$  - термодинамічна температура,  $k_B$  - константа Больцмана. У цьому випадку лише невеликі відхилення від детерміністичних траєкторій можуть мати місце. По-друге, існує вимога щодо часу релаксації  $\tau_N$ . Тут час релаксації - це час, протягом якого можливі поодинокі, але великі флуктуації. Якщо період зовнішнього поля набагато менший, ніж час релаксації, або  $\Omega^{-1} \ll \tau_N$ , ймовірність такої флуктуації незначна, і динамічний підхід залишається справедливим. Далі, слідуючи Брауну [22], час релаксації  $\tau_N$  можна знайти як  $\tau_N = (\Gamma/\pi)^{-1/2} \exp(\Gamma)(2\alpha_0\gamma H)^{-1}$ . Обидва ці чинники разом накладають вимоги до розміру наночастинок, а, також, до значеннях частоти та амплітуди поля. Наприклад,  $\Gamma \approx 11.9$  для

реальних наночастинок магеміта [43] з наступними параметрами: середній радіус  $R = 20 \text{ nm}$ ,  $H_a = 910 \text{ Oe}$ ,  $M = 338 \text{ G}$ , температура  $T = 315 \text{ K}$  та амплітуда зовнішнього поля  $H = 0,05H_a$ . Тоді частота повинна бути більшою, ніж  $\tau_N^{-1}$ , яка для зазначених вище параметрів і  $\alpha_0 = 0.05$  дорівнює  $\Omega_N \approx 1,11 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ .

Ці умови достатні для валідності FP-моделі. Але коли ми розглядаємо механічне обертання разом з магнітною динамікою всередині, або FA-модель, необхідно враховувати ще й умови стабільності до теплових флуктуацій для сферичного руху. Значні зміни в кутових координатах можуть відбуватися за рахунок теплового збудження, коли час спостереження набагато більше, ніж час броунівської релаксації  $\tau_B = 3\eta V/(k_B T)$  [44]. Вона зумовлює існування іншої характерної частоти  $\Omega_B = \tau_B^{-1} = k_B T/(3\eta V)$ . Для вищезгаданих наночастинок магхеміту радіуса  $R = 20 \text{ nm}$  та води за температури  $T = 315 \text{ K}$  та в'язкості  $\eta = 0.006 \text{ P}$  ця частота дорівнює  $\Omega_B \approx 2.26 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ . Ще одна вимога до частоти виникає з умови, що являє собою справедливість наближення Стокса для сили в'язкого тертя [45]:  $\text{Re} = \rho_l \Omega_S R^2 / \eta \sim 10$ . Тут  $\text{Re}$  - це так зване число Рейнольдса,  $\rho_l$  - щільність рідини,  $\Omega_S$  - відповідна характеристична частота, яка визначає верхню межу допустимої частоти поля. Прямі розрахунки дають в нашому випадку  $\Omega_S \sim 10^{12} \text{ Hz}$ . Узагальнюючи, можна отримати, що  $\max[\Omega_B, \Omega_N] \ll \Omega \ll \Omega_S$ . Отже, частотний інтервал, де динамічний підхід є справедливим для розрахунків, є  $\Omega = (10^5 - 10^{12}) \text{ Hz}$ , що включає частоти, припустимі у методі для магнітної гіпертермії.

Нарешті, умови використання RD-моделі включають все викладене вище для моделі FA-моделі і додатково містять вимогу до амплітуд поля, яка повинна бути значно меншою, ніж ефективне поле анізотропії ( $H \ll H_a$ ). Остання нерівність задовольняє вищезгаданим розрахункам і відповідає обмеженням лінійного наближення, використовуваного для подальшого розв'язку рівнянь руху.

Важливість динамічного наближення не обмежується його відповідністю до дійсності в певному інтервалі системних параметрів. Динамічна апроксимація показує основні мікроскопічні механізми відгуку ферорідини до зовнішніх полів. Таким чином, ми можемо

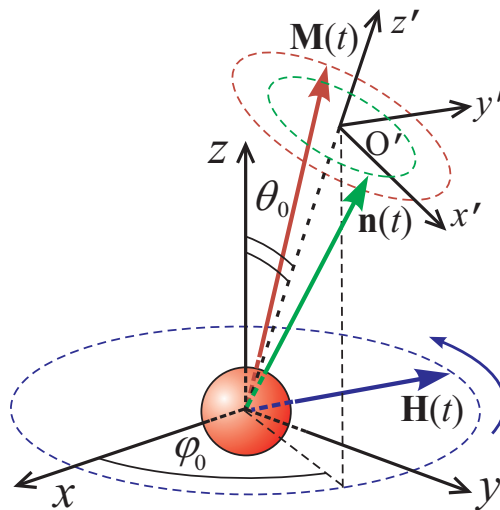


Рисунок 2.8 – Схематичне зображення наночастинки, поля що діє, та систем координат.

оцінити верхні межі таких важливих критеріїв ефективності, як магнітна сприйнятливність або втрата потужності. Це дуже важливо в світлі функціоналізації ферорідин та надання їм тих властивостей, що вимагаються в застосуваннях.

## 2.2 Результати

Розв'язок системи рівнянь (2.6), (2.11) і (2.9) можна знайти в лінійному наближенні для режиму малих коливань. У цьому режимі вектори  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  обертаються в малому околі початкового положення легкої осі, яке, у свою чергу, визначається кутами  $\theta_0$  і  $\varphi_0$  (див. рис. 2.8). Це відбувається за досить малих амплітуд поля ( $h \ll 1$ ). Процедура лінеаризації, що використовується тут, аналогічна тій, що зазначена у роботі [31] і полягає в наступному. Введемо нову систему координат  $x'y'z'$  так, як показано на рис. 2.8. Така система є повернутою відносно лабораторної системи  $xyz$  на кути  $\theta_0$  і  $\varphi_0$  відповідно. У цій новій системі координат вектори  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  можуть бути представлені в лінійному наближенні як

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_{x'} m_{x'} + \mathbf{e}_{y'} m_{y'} + \mathbf{e}_{z'}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{x'}n_{x'} + \mathbf{e}_{y'}n_{y'} + \mathbf{e}_{z'}, \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_{y'}$ ,  $\mathbf{e}_{z'}$  є одиничними векторами координатної системи  $x'y'z'$ . В цій системі, зовнішнє поле (2.1) може бути записане з використанням матриці повороту як

$$\mathbf{h}' = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} h \cos \Omega t \\ \sigma h \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 & \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & -\sin \theta_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ \sin \theta_0 \cos \varphi_0 & \sin \theta_0 \sin \varphi_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{h}' = \begin{pmatrix} h \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \Omega t + \sigma h \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \sin \Omega t \\ -h \sin \varphi_0 \cos \Omega t + \sigma h \cos \varphi_0 \sin \Omega t \\ h \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \Omega t + \sigma h \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \sin \Omega t \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Все вищевказане дозволяє аналізувати характеристики реакції наночастинки на зовнішнє поле (2.1) для усіх трьох апроксимацій у однаковий спосіб. Отримані нижче аналітичні розв'язки описують основну різницю між зв'язаним рухом магнітного моменту та усієї наночастинки і відокремленим рухом магнітного моменту, коли частинка зафіксована, та рухом усієї частинки з вмероженим магнітним моментом. Саме це й становить наші головні результати.

### 2.2.1 Зв'язані коливання намагніченості та легкої вісі

Ми починаємо з самого складного, але найцікавішого випадку: випадку, коли відбувається як механічне обертання, так і внутрішня

магнітна динаміка одночасно, або FA-модель. Використовуючи рівняння (2.16), припускаючи, що  $n_{x'}, n_{y'}, m_{x'}, m_{y'} \sim h$ , ігноруючи всі нелінійні щодо  $h$  доданки, з (2.6) можна вивести лінеаризовану систему рівнянь для  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_{x'} &= MH_a (\dot{m}_{y'}/\Omega_r + h_{x'}) / 6\eta, \\
\dot{n}_{y'} &= -MH_a (\dot{m}_{x'}/\Omega_r - h_{y'}) / 6\eta, \\
(1 + \beta)\dot{m}_{x'} &= -\Omega_r (m_{y'} - h_{y'} - n_{y'}) - \alpha_0 \dot{m}_{y'}, \\
(1 + \beta)\dot{m}_{y'} &= \Omega_r (m_{x'} - h_{x'} - n_{x'}) - \alpha_0 \dot{m}_{x'}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь може бути записаний у стандартній формі

$$\begin{aligned}
n_{x'} &= a_n \cos \Omega t + b_n \sin \Omega t, \\
n_{y'} &= c_n \cos \Omega t + d_n \sin \Omega t, \\
m_{x'} &= a_m \cos \Omega t + b_m \sin \Omega t, \\
m_{y'} &= c_m \cos \Omega t + d_m \sin \Omega t,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де  $a_n, b_n, c_n, d_n, a_m, b_m, c_m$  та  $d_m$  сталі коефіцієнти, які потрібно визначити. Підстановкою рівняння (2.18) в (2.17) та користуючись лінійною незалежністю тригонометричних функцій, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів, що відповідають за коливання вектору  $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned}
(1 + \beta)\tilde{\Omega}a_m &= d_m + \delta b_m - \alpha_0\tilde{\Omega}c_m - A_m, \\
(1 + \beta)\tilde{\Omega}b_m &= -c_m - \delta a_m - \alpha_0\tilde{\Omega}d_m + B_m, \\
(1 + \beta)\tilde{\Omega}c_m &= -b_m + \delta d_m + \alpha_0\tilde{\Omega}a_m - C_m, \\
(1 + \beta)\tilde{\Omega}d_m &= a_m - \delta c_m + \alpha_0\tilde{\Omega}b_m + D_m
\end{aligned} \tag{2.19}$$

и точні вирази для коефіцієнтів, що відповідають вектору  $\mathbf{n}$ .



$$\begin{aligned}
a_n &= \delta c_m - \sigma \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \theta_0 \sin \varphi_0, \\
b_n &= \delta d_m + \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \theta_0 \cos \varphi_0, \\
c_n &= -\delta a_m - \sigma \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \varphi_0, \\
d_n &= -\delta b_m - \tilde{\Omega}^{-1} h \sin \varphi_0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Тут  $\tilde{\Omega} = \Omega/\Omega_r$ ,  $\delta = \beta/\alpha_0$  та

$$\begin{aligned}
A_m &= \sigma h(1 + \beta) \cos \varphi_0 - \tilde{\Omega}^{-1} h \sin \varphi_0, \\
B_m &= -h(1 + \beta) \sin \varphi_0 - \sigma \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \varphi_0, \\
C_m &= -\sigma h(1 + \beta) \cos \theta_0 \sin \varphi_0 - \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \theta_0 \cos \varphi_0, \\
D_m &= -h(1 + \beta) \cos \theta_0 \cos \varphi_0 + \sigma \tilde{\Omega}^{-1} h \cos \theta_0 \sin \varphi_0.
\end{aligned}$$

З виразу (2.19) можна обчислити невідомі константи  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$ , and  $d_m$  наступним чином

$$\begin{aligned}
a_m &= Z^{-1} \left[ \tilde{\Omega}_1 D_m + \tilde{\Omega}_2 B_m + \tilde{\Omega}_3 C_m + \tilde{\Omega}_4 A_m \right], \\
b_m &= Z^{-1} \left[ \tilde{\Omega}_1 C_m + \tilde{\Omega}_2 A_m - \tilde{\Omega}_3 D_m - \tilde{\Omega}_4 B_m \right], \\
c_m &= Z^{-1} \left[ -\tilde{\Omega}_1 B_m + \tilde{\Omega}_2 D_m - \tilde{\Omega}_3 A_m + \tilde{\Omega}_4 C_m \right], \\
d_m &= Z^{-1} \left[ -\tilde{\Omega}_1 A_m + \tilde{\Omega}_2 C_m + \tilde{\Omega}_3 B_m - \tilde{\Omega}_4 D_m \right],
\end{aligned} \tag{2.21}$$

де

$$\begin{aligned}
Z &= \tilde{\Omega}^4 \alpha_0^4 + 2\tilde{\Omega}^4 \alpha_0^2 \beta^2 + \tilde{\Omega}^4 \beta^4 + 4\tilde{\Omega}^4 \alpha_0^2 \beta + \\
&+ 4\tilde{\Omega}^4 \beta^3 + 2\tilde{\Omega}^4 \alpha_0^2 + 6\tilde{\Omega}^4 \beta^2 - 2\tilde{\Omega}^2 \alpha_0^2 \delta^2 + \\
&+ 2\tilde{\Omega}^2 \beta^2 \delta^2 + 4\tilde{\Omega}^4 \beta + 8\tilde{\Omega}^2 \alpha_0 \beta \delta + \\
&+ 4\tilde{\Omega}^2 \beta \delta^2 + \tilde{\Omega}^4 + 2\tilde{\Omega}^2 \alpha_0^2 + 8\tilde{\Omega}^2 \alpha_0 \delta - \\
&- 2\tilde{\Omega}^2 \beta^2 + 2\tilde{\Omega}^2 \delta^2 + \delta^4 - 4\tilde{\Omega}^2 \beta - 2\tilde{\Omega}^2 + \\
&+ 2\delta^2 + 1,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_1 &= -\tilde{\Omega}^2\alpha_0^2 - 2\tilde{\Omega}^2\alpha_0\beta\delta - 2\tilde{\Omega}^2\alpha_0\delta + \\
&\quad + \tilde{\Omega}^2\beta^2 + 2\tilde{\Omega}^2\beta + \tilde{\Omega}^2 - \delta^2 - 1, \\
\tilde{\Omega}_2 &= -\tilde{\Omega}^2\alpha_0^2\delta + 2\tilde{\Omega}^2\alpha_0\beta + 2\tilde{\Omega}^2\alpha_0 + \\
&\quad + \tilde{\Omega}^2\beta^2\delta + 2\tilde{\Omega}^2\beta\delta + \tilde{\Omega}^2\delta + \delta^3 + \delta, \\
\tilde{\Omega}_3 &= \tilde{\Omega}^3\alpha_0^3 + \tilde{\Omega}^3\alpha_0\beta^2 + 2\tilde{\Omega}^3\alpha_0\beta + \\
&\quad + \tilde{\Omega}^3\alpha_0 - \tilde{\Omega}\alpha_0\delta^2 + \tilde{\Omega}\alpha_0 + 2\tilde{\Omega}\beta\delta + \\
&\quad + 2\tilde{\Omega}\delta, \\
\tilde{\Omega}_4 &= -\tilde{\Omega}^3\alpha_0^2\beta - \tilde{\Omega}^3\alpha_0^2 - \tilde{\Omega}^3\beta^3 - \\
&\quad - 3\tilde{\Omega}^3\beta^2 - 3\tilde{\Omega}^3\beta - \tilde{\Omega}^3 - 2\tilde{\Omega}\alpha_0\delta - \\
&\quad - \tilde{\Omega}\beta\delta^2 + \tilde{\Omega}\beta - \tilde{\Omega}\delta^2 + \tilde{\Omega}.
\end{aligned}$$

Використовуюючи рівняння (2.21), можна встановити явний вигляд констант у виразі (2.20), які визначають обертальну динаміку частинки як цілого.

Отримані вирази для траєкторій наночастинки дозволяють записати аналітичне співвідношення для питомої потужності втрат  $q$ . Безпосереднє інтегрування виразу (2.2) з підстановкою (2.18), (2.21) та (2.20) дає нам наступну формулу:

$$\begin{aligned}
q &= 0.5\tilde{\Omega}\Omega_r(b_m h \cos \theta_0 \cos \varphi_0 - a_m \rho h \cos \theta_0 \sin \varphi_0 - \\
&\quad - d_m h \sin \varphi_0 - c_m \rho h \cos \varphi_0 + b_m a_n - a_m b_n + d_m c_n - \\
&\quad - c_m d_n). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Залежність  $q$  від параметрів системи, особливо на частоті зовнішнього поля, являє великий інтерес і буде розглянута нижче. Але не менш цікавим є порівняння цього результату з аналогічним результатом в інших наближеннях, таких як FP-модель та RD-модель.

### 2.2.2 Коливання намагніченості у нерухомій наночастинці

На даному етапі розглянемо лише магнітну динаміку з використанням FP-моделі. Як і в попередньому випадку, лінеаризовані рівняння руху

записуються у припущенні  $m_{x'}, m_{y'} \sim h$ , а всі доданки, нелінійні відносно амплітуди поля  $h$  нехтуються. З використанням виразу (2.16), у кінцевому підсумку отримуємо з (2.9) лінеаризовану систему рівнянь для вектора  $\mathbf{m}$  у наступному вигляді

$$\begin{aligned}\dot{m}_{x'} &= -\Omega_r (\dot{m}_{y'} - h_{y'}) - \alpha_0 \dot{m}_{y'}, \\ \dot{m}_{y'} &= \Omega_r (\dot{m}_{x'} - h_{x'}) - \alpha_0 \dot{m}_{x'}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Далі, загальна форма розв'язку (2.24) може бути просто записана у стандартному вигляді

$$\begin{aligned}m_{x'} &= a_{fp} \cos \Omega t + b_{fp} \sin \Omega t, \\ m_{y'} &= c_{fp} \cos \Omega t + d_{fp} \sin \Omega t,\end{aligned}\tag{2.25}$$

де  $a_{fp}$ ,  $b_{fp}$ ,  $c_{fp}$ , та  $d_{fp}$  є амплітуди осциляцій магнітного моменту всередині нерухомої наночастинки. Підстановкою виразу (2.25) у (2.24) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язком яких є шукані амплітуди

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} a_{fp} &= (d_{fp} - \sigma h \cos \varphi_0) - \alpha_0 \tilde{\Omega} c_{fp}, \\ \tilde{\Omega} b_{fp} &= -(c_{fp} + h \sin \varphi_0) - \alpha_0 \tilde{\Omega} d_{fp}, \\ \tilde{\Omega} c_{fp} &= -(b_{fp} - \sigma h \cos \theta_0 \sin \varphi_0) + \alpha_0 \tilde{\Omega} a_{fp}, \\ \tilde{\Omega} d_{fp} &= (a_{fp} - h \cos \theta_0 \cos \varphi_0) + \alpha_0 \tilde{\Omega} b_{fp}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Після відповідних розрахунків, отримуємо розв'язок (2.26)

$$\begin{aligned}a_{fp} &= -Z_{fp}^{-1} \left[ \tilde{\Omega}_1^{fp} B_{fp} + \tilde{\Omega}_2^{fp} A_{fp} \right], \\ b_{fp} &= Z_{fp}^{-1} \left[ \tilde{\Omega}_1^{fp} C_{fp} + \tilde{\Omega}_2^{fp} D_{fp} \right], \\ a_{fp} &= Z_{fp}^{-1} \left[ \tilde{\Omega}_1^{fp} A_{fp} - \tilde{\Omega}_2^{fp} B_{fp} \right], \\ d_{fp} &= Z_{fp}^{-1} \left[ -\tilde{\Omega}_1^{fp} D_{fp} + \tilde{\Omega}_2^{fp} C_{fp} \right],\end{aligned}\tag{2.27}$$

де

$$Z_{fp} = 4\alpha_0^2 \tilde{\Omega}^4 + \left( (\alpha_0^2 - 1) \tilde{\Omega}^{-2} + 1 \right)^2, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1^{fp} &= 2\alpha_0 \tilde{\Omega}^2, \\ \Omega_2^{fp} &= (\alpha_0^2 - 1) \tilde{\Omega}^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{fp} &= \sigma h \tilde{\Omega} (\alpha_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0) - h \cos \theta_0 \cos \varphi_0, \\ B_{fp} &= \sigma h \tilde{\Omega} (\cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + \alpha_0 \cos \varphi_0) + h \sin \varphi_0, \\ C_{fp} &= h \tilde{\Omega} (\cos \theta_0 \cos \varphi_0 - \alpha_0 \sin \varphi_0) + \sigma h \cos \varphi_0, \\ D_{fp} &= h \tilde{\Omega} (\alpha_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) + \sigma h \cos \theta_0 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Потужність втрат в цьому випадку також може бути знайдена шляхом прямого інтегрування (2.2) з підстановкою (2.25) та (2.27)

$$\begin{aligned} q &= 0.5 h \tilde{\Omega} \Omega_r Z_{fp}^{-1} \{ \tilde{\Omega}_1^{fp} [2\sigma h \cos \theta_0 + \\ &+ h \tilde{\Omega} D] + \tilde{\Omega}_2^{fp} \alpha_0 h \tilde{\Omega} D \}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де

$$D = \cos^2 \theta_0 (\cos^2 \varphi_0 + \sigma^2 \sin^2 \varphi_0) + \sigma^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0. \quad (2.30)$$

Отриманий вираз (2.29) подібний до вже раніше оприлюдненого у [31], але узагальненого на випадок довільної орієнтації легкої осі наночастинки. Незважаючи на кількісну різницю, обумовлену поворотом легкої осі, залишається якісний характер частотної поведінки  $q$ .

### 2.2.3 Коливання усієї наночастинки із зафіксованим магнітним моментом

І, нарешті, ми розглядаємо в рамках єдиного підходу широко використовуваний підхід, коли магнітний момент наночастинки жорстко пов'язаний з її кристалічною решіткою. У цій так званій RD-моделі лінеаризовані рівняння мають найпростішу форму. Розширюючи векторне рівняння (2.11) та враховуючи (2.16), записуємо лінеаризовану систему рівнянь для вектора легкої вісі  $\mathbf{n}$  у такому вигляді

$$\begin{aligned}\dot{n}_{x'} &= \Omega_{cr} h_{x'}, \\ \dot{n}_{y'} &= \Omega_{cr} h_{y'}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Як і в попередньому випадку, ми використовуємо тригонометричне подання розв'язку (2.31)

$$\begin{aligned}n_{x'} &= a_{rd} \cos \Omega t + b_{rd} \sin \Omega t, \\ n_{y'} &= c_{rd} \cos \Omega t + d_{rd} \sin \Omega t.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Після прямої підстановки (2.32) в (2.31), легко можна отримати невідомі константи, які є амплітудами вектора  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned}a_{rd} &= h\Omega_{cr} \sin \varphi_0 / \Omega, \\ b_{rd} &= h\Omega_{cr} \cos \theta_0 \cos \varphi_0 / \Omega, \\ c_{rd} &= -h\Omega_{cr} \cos \varphi_0 / \Omega, \\ d_{rd} &= h\Omega_{cr} \cos \theta_0 \sin \varphi_0 / \Omega.\end{aligned}\tag{2.33}$$

І, нарешті, ми можемо відразу знайти потужність втрат за співвідношення (2.2) підставляючи у нього вирази (2.32) та (2.33)

$$q = 0.5\Omega_{cr}h^2D.\tag{2.34}$$

Примітно, що  $q$  не залежить від частоти, оскільки під час зростання частоти  $\Omega$  коефіцієнти (2.33) відразу пропорційно зменшуються, що компенсує можливий зростання втрат потужності.

#### 2.2.4 Прецесійний режим руху наночастинки та її магнітного моменту

Для випадку синхронної прецесії векторів  $\mathbf{m}$  and  $\mathbf{n}$  разом із зовнішнім циркулярно поляризованим полем (див. Рис. 2.9), стаціонарний розв'язок систем рівнянь (2.3), (2.4) може бути отриманим у формі

$$\begin{aligned}\varphi &= \sigma\Omega t - \varphi_1 & \vartheta &= \vartheta_1, \\ \phi &= \sigma\Omega t - \phi_1 & \theta &= \theta_1,\end{aligned}\tag{2.35}$$

де  $\varphi, \vartheta$  - сферичні координати вектора  $\mathbf{m}$ ,  $\phi, \theta$  сферичні координати вектора  $\mathbf{n}$ ,  $\varphi_1, \phi_1$  - кути відставання і, нарешті,  $\vartheta_1, \theta_1$  кути прецесії векторів  $\mathbf{m}$  and  $\mathbf{n}$ . Для того, щоб знайти константи  $\varphi_1, \phi_1$  and  $\vartheta_1, \theta_1$ , використаємо умови відсутності руху магнітного моменту по відношенню до кристалічної решітки наночастинки

$$\dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} = 0.\tag{2.36}$$

Після підстановки(2.36) у друге рівняння (2.3), встановлюємо

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -H_a MV(\mathbf{m} \times \mathbf{n})(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - 6\eta V \boldsymbol{\omega}.\tag{2.37}$$

Далі, вводимо двічі штриховану систему координат  $x''y''z''$ , яка обертається разом із зовнішнім полем як показано на рисунку 2.9. В цій новій системі координат, кутова швидкість має досить просту форму

$$\boldsymbol{\omega}'' = (-\sigma\Omega \sin \theta_1, 0, 0).\tag{2.38}$$

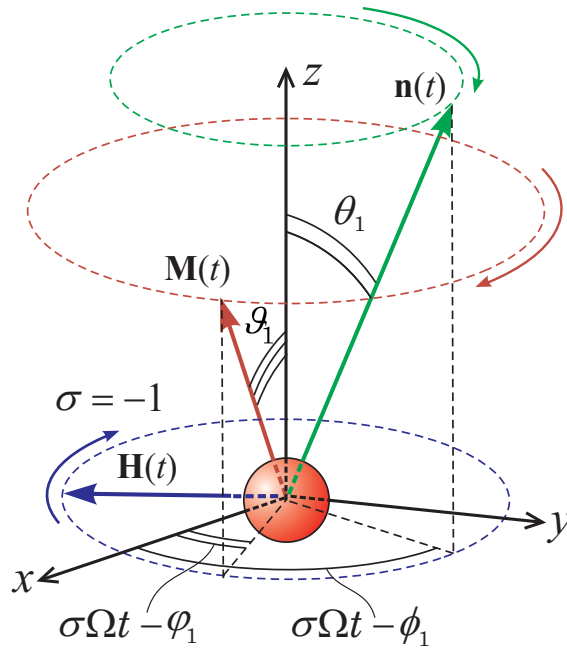


Рисунок 2.9 – Schematic representation of the behaviour of vectors  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{M}$  and the used coordinate systems for the precessional mode description

Оскільки рівняння (2.4) не може бути подано у простий спосіб у двічі штрихованій системі координат, необхідно записати явний вигляд усіх векторів у лабораторній системі координат. Щоб здійснити необхідні перетворення, необхідно використати матрицю повороту

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \Phi_1 & -\sin \Phi_1 & \sin \theta_1 \cos \Phi_1 \\ \cos \theta_1 \sin \Phi_1 & \cos \Phi_1 & \sin \theta_1 \sin \Phi_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

де  $\Phi_1 = \sigma\Omega t - \phi_1$ . З використанням позначень

$$F = M \sin \theta_1 \sin \vartheta_1 \cos(\phi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \vartheta_1 \quad (2.40)$$

та поданням векторів  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{m}$ , та  $\mathbf{n}$  в лабораторній системі координат, we straightforwardly obtain the set of algebraical equations

$$\begin{aligned}
MV \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 (\sigma \Omega \gamma^{-1} - H_{0z}) &= \\
= -\Omega \sin \theta_1 \cos \theta_1 (J \Omega \sin \phi_1 + 6\sigma V \eta \cos \phi_1), & \quad (2.41)
\end{aligned}$$

$$MH \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 = 6\eta \Omega^2 \sin^2 \theta_1, \quad (2.42)$$

$$H_a F \sin(\vartheta_1 - \theta_1) \sin \varphi_1 = \sin \vartheta_1 (\sigma \Omega \gamma^{-1} - H_{0z}), \quad (2.43)$$

$$H_a F \sin \theta_1 \sin(\varphi_1 - \phi_1) = H \sin \varphi_1, \quad (2.44)$$

де  $H_{0z}$  є постійним полем, що спрямоване вздовж вісі  $oz$ .

## 2.3 Обговорення та висновки

### 2.3.1 Коливальний режим руху наночастинки та її магнітного моменту

Ми розглянули відгук одноосьової феромагнітної наночастинки, що поміщена у в'язку рідину, до змінного поля в лінійному наближенні для трьох моделей, а саме: FA-моделі (в'язко-зв'язана наночастинка зі скінченною анізотропією), FP-модель (нерухома частинка), та RD-модель (жорсткий диполь). У результаті ми отримали вирази для траєкторій наночастинок та втрати потужності, що виникають як при обертанні наночастинки в в'язкій середовищі, так і при внутрішній загасаючій прецесії магнітного моменту наночастинки. Нашими основними цілями були розуміння 1) поведінки втрат потужності залежно від різних параметрів; 2) роль механізмів дисипації енергії, коли вони обидва присутні; 3) кореляції між механічним обертанням наночастинки та внутрішнім рухом її магнітного моменту. Аналіз трьох наближень одночасно допомагає нам зрозуміти обмеження кожного з них, що, у свою чергу, дозволяє систематизувати результати, отримані іншими авторами. Цінність наших розвідок тісно пов'язана з проблемами практичного застосування ферорідин, такими як швидкість нагріву під час магнітної гіпертермії або діапазон частот поглинання матеріалів, що поглинають мікрохвилі.



Порівняння виразів втрат потужності, отриманих в попередньому розділі, дає низку висновків, і деякі з них є досить несподіваними з першого погляду. По-перше, роль внутрішнього магнітного руху є первинною. Як впливає з виразів (2.23) та (2.29), залежність безрозмірної втрати потужності від безрозмірної частоти  $q(\tilde{\Omega})$  для FP-моделі та FA-моделі в'язко-зв'язаної наночастинки з скінченною анізотропією подібні: вони обидві демонструють резонансну поведінку. У той же час для моделі жорсткого диполя така залежність являє собою константу або пряму, що не залежить від частоти (див. (2.34)). Тому динаміка магнітного моменту, представленого одиничним вектором  $\mathbf{m}$ , визначає результуючу втрату потужності в широкому діапазоні досить реалістичних параметрів. Але кількісне порівняння цих залежностей дозволяє нам припустити, що осциляції легкої вісі можуть значно змінити втрати потужності, викликані загасаючою прецесією  $\mathbf{m}$ . Причини цього полягають в характері колективного руху легкої осі, поданої вектором  $\mathbf{n}$ , і магнітним моментом, поданого вектором  $\mathbf{m}$ . Хоча відбувається лише гармонічний рух зазначених векторів, співвідношення фаз та амплітуд може призвести до достатньо різних значень розсіювання енергії в системі. Далі ми розглянемо поведінку потужності втрат  $q(\tilde{\Omega})$  в контексті особливостей руху векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$ .

Поведінка  $q(\tilde{\Omega})$  обумовлена особливостями коефіцієнтів  $a_m(\tilde{\Omega})$ ,  $b_m(\tilde{\Omega})$ ,  $c_m(\tilde{\Omega})$ , та  $d_m(\tilde{\Omega})$ , які визначають динаміку  $\mathbf{m}$  і  $a_n(\tilde{\Omega})$ ,  $b_n(\tilde{\Omega})$ ,  $c_n(\tilde{\Omega})$ , та  $d_n(\tilde{\Omega})$ , що визначає динаміку  $\mathbf{n}$  (див. Рис. 2.10). Як видно, для частот, що знаходяться далеко від резонансної, вектори  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$  майже збігаються і обертаються синхронно. Тут модель в'язко-зв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією та модель фіксованої частинки дають дуже близькі значення втрати потужності. Але поблизу резонансу, якщо  $\tilde{\Omega} \approx 1$ , коефіцієнти  $a_m(\tilde{\Omega})$ ,  $b_m(\tilde{\Omega})$ ,  $c_m(\tilde{\Omega})$ , та  $d_m(\tilde{\Omega})$  мають виражені максимуми і змінюють знаки, тоді коли коефіцієнти  $a_n(\tilde{\Omega})$ ,  $b_n(\tilde{\Omega})$ ,  $c_n(\tilde{\Omega})$ , and  $d_n(\tilde{\Omega})$  залишаються такими самими на усьому діапазоні частоти. Тому вектори  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$  обертаються у асинхронний спосіб, що веде до більшого кута між магнітним моментом і результуючим чи ефективним полем  $\mathbf{h}_{eff}$ . Разом зі зростанням кута прецесії вектора  $\mathbf{m}$  це призводить до

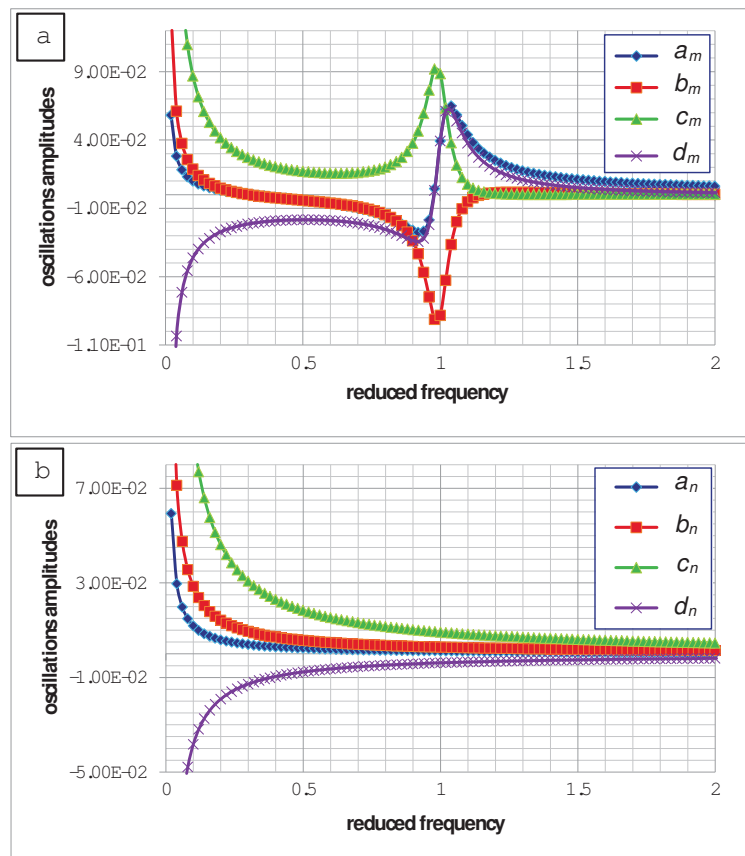


Рисунок 2.10 – Залежності амплітуд зв'язаних коливань магнітного моменту (2.21) та легкої вісі (2.20) від частоти зовнішнього поля. Використовувались такі значення параметрів  $M = 338$  G,  $H_a = 910$  Oe,  $\eta = 0.006$  P,  $\alpha_0 = 0.05$  що відповідає частникам магнетиту ( $\gamma - \text{Fe}_2\text{O}_3$ ) у воді за температури of  $42$  °C,  $\sigma = -1$ ,  $h = 0.01$ ,  $\theta_0 = 0.4\pi$ ,  $\varphi_0 = 0.125\pi$ .

зростання втрат потужності в порівнянні з випадком фіксованої частинки (див. Рис. 2.11).

Якщо в'язкість порівняно невелика, вектор  $\mathbf{n}$  стає більш сприйнятливим до зовнішнього поля, і магнітний момент, що обертається, може легко залучати до обертання цілу наночастинку. Однак, це не викликає більш інтенсивного руху в результаті. По перше, тут відбувається значне зменшення коефіцієнтів  $a_m(\tilde{\Omega})$ ,  $b_m(\tilde{\Omega})$ ,  $c_m(\tilde{\Omega})$ , та  $d_m(\tilde{\Omega})$  біля резонансу у порівнянні з випадком більшої в'язкості. Тоді змінюються лише знаки коефіцієнтів  $b_m(\tilde{\Omega})$  and  $d_m(\tilde{\Omega})$  (див. Рис. 2.12). Нарешті, залежності  $a_n(\tilde{\Omega})$ ,  $b_n(\tilde{\Omega})$ ,  $c_n(\tilde{\Omega})$ , and  $d_n(\tilde{\Omega})$  отримують локальні максимуми (рис. 2.12) і трохи зменшують абсолютні значення в околі  $\tilde{\Omega} = 1$ . Отже, ефект вираженого асинхронного обертання  $\mathbf{n}$  і  $\mathbf{m}$ , що є актуальним для вищесказаного випадку, наразі зникає, і ці вектори

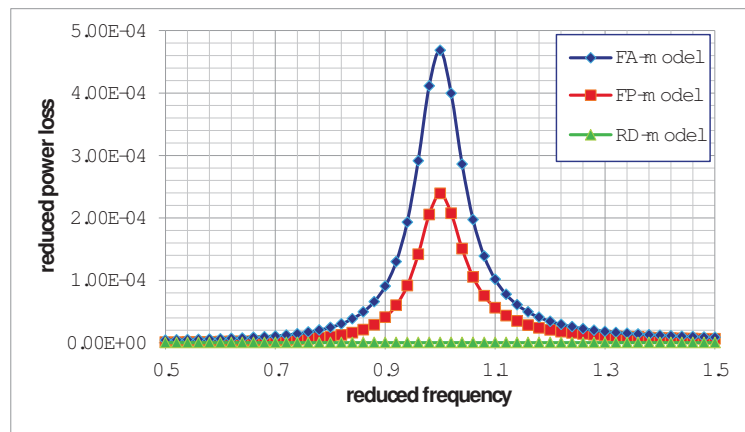


Рисунок 2.11 – Частотна залежність потужності втрат для випадку жорсткого диполя (RD-модель), фіксованої наночастинки (FP-модель), та в'язко-зв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (FA-модель). Використані параметри такі самі як і для побудови рисунка 2.10.

стають майже паралельними для усього діапазону частот. Оскільки кут між магнітним моментом і результуючим полем зменшується, модель в'язко-зв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією у цьому випадку прогнозує більш низькі значення втрат потужності, ніж модель нерухомої частинки поблизу резонансу (рис. 2.13).

Описана вище ситуація є причиною для екстремальної чутливості втрати потужності до параметрів системи, яка може бути корисною в застосуваннях і може бути використана в ряді випадків. Навпаки, в інших випадках така чутливість може бути дуже небажаною, і треба вжити заходів для запобігання. Незалежно від подальших цілей, необхідно докладно дослідити вплив основних параметрів. Це особливо важливо для проектування ансамблів наночастинок із зазначеними властивостями для таких важливих застосувань, як мікрохвильові поглиначі або магнітна гіпертермія, де основними характеристиками є нагрівання та/або поглинання.

У цьому відношенні найбільш цікавими є схожі параметри  $\alpha_0$  та  $\eta$ . На рис. 2.14а, зображено порівняння втрат потужності для двох значень  $\alpha_0$  з використанням наближення фіксованої частки та наближення в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією. Як і очікувалося, зменшення  $\alpha_0$  призводить до пропорційного збільшення втрат потужності для обох наближень. В той же час, зміна в'язкості

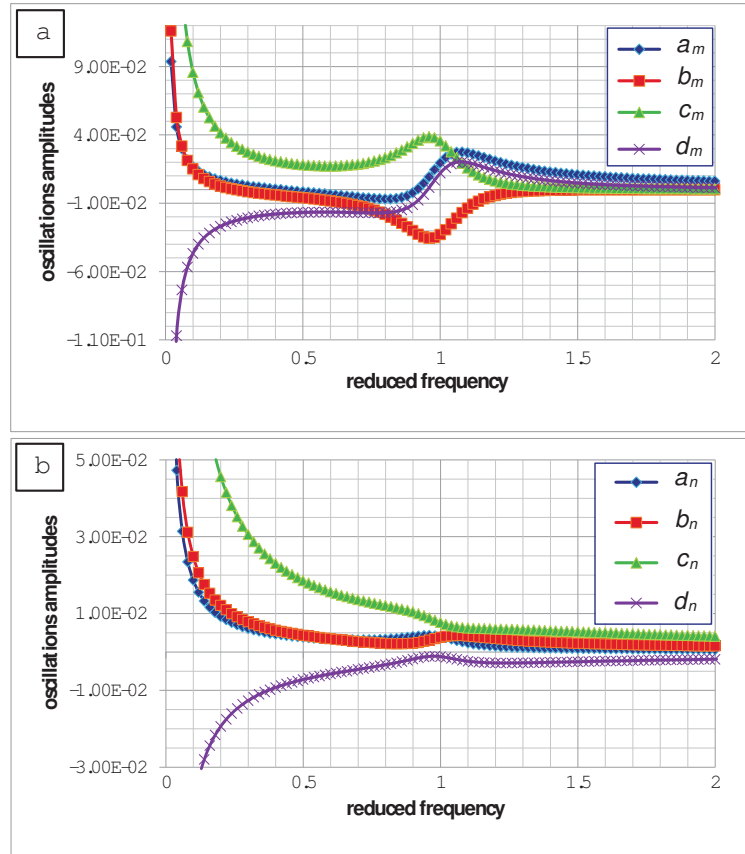


Рисунок 2.12 – Залежності амплітуд зв'язаних коливань магнітного моменту (2.21) та легкої вісі (2.20) від частоти зовнішнього поля. Використані параметри такі самі як і для побудови рисунка 2.10, однак  $\eta = 4.0^{-5}$  Р.

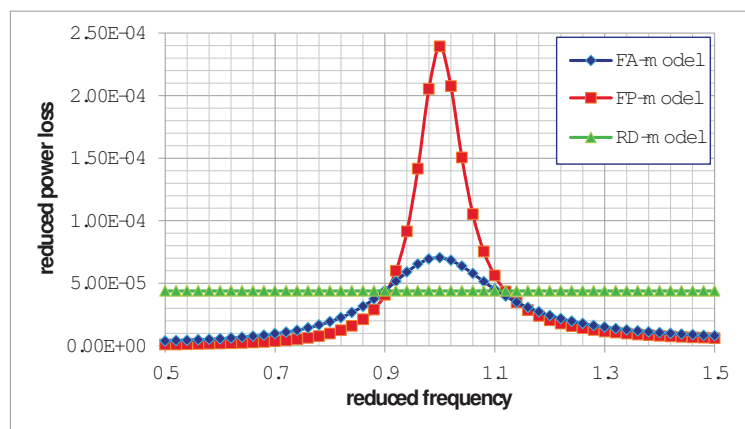


Рисунок 2.13 – Частотна залежність потужності втрат для випадку жорсткого диполя (RD-модель), фіксованої наночастинки (FP-модель), та в'язков'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (FA-модель). Використані параметри такі самі як і для побудови рисунка 2.10, але  $\eta = 4.0^{-5}$  Р.

$\eta$  призводить до різної поведінки втрат потужності, отриманої для моделей жорсткого диполя та наближення в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (див. Рис. 2.14б)) Для першого випадку відбувається пропорційний ріст  $q(\tilde{\Omega})$  зі зменшенням  $\eta$ . Але для другого випадку прийняття до уваги скінченності анізотропії призводить до протилежних результатів. Тут ми відзначаємо нелінійне зростання в  $q(\tilde{\Omega})$  зі зростаючою в'язкістю  $\eta$ . Як було пояснено вище, походження цього ефекту слід шукати у відносному русі векторів  $\mathbf{n}$  та  $\mathbf{m}$ . Далі, щоб оцінити придатність моделі жорсткого диполя, необхідно порівняти значення втрат потужності для цих двох випадків. Як видно з рисунка 2.14б, можливі різні ситуації, оскільки за умови розблокування магнітного моменту  $\mathbf{m}$  існують два різних типу поведінки. Перший тип - це асинхронні коливання  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$ , коли значення  $q(\tilde{\Omega})$  для моделі в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією може бути значно більшим, ніж значення, передбачені моделлю жорсткого диполя. Другий тип - синхронний рух магнітного моменту та легкої осі. Тут обидва механізми дисипації пригнічуються, оскільки амплітуди коливань  $\mathbf{n}$  і  $\mathbf{m}$  стають меншими. Як результат, втрата потужності для випадку скінченної анізотропії може бути значно нижчою, ніж значення, отримане для моделі жорсткого диполя. Це дозволяє зробити висновок про низьку придатність моделі жорсткого диполя для високих частот.

Ще одне важливе питання, яке необхідно враховувати, - це вплив орієнтації зовнішнього поля по відношенню до наночастинки. Як впливає з виразів (2.23), (2.29), (2.34), ця орієнтація визначається типом поляризації та початковим положенням легкої осі. Модель жорсткого диполя передбачає різницю втрат потужності не більш ніж у два рази, коли  $\sigma$  змінюється у діапазоні  $[-1...1]$ . Відповідно до двох інших моделей, залежність втрат потужності від параметру  $\sigma$  є більш сильною та складною. Як видно з рис. 2.15а величина  $q(\tilde{\Omega})$  може відрізнитися як мінімум у 10 разів в залежності від  $\sigma$  для моделі в'язкозв'язаної наночастинки з скінченною анізотропією. Тут треба зауважити, що ця залежність нелінійна, та найнижча залежність  $q(\tilde{\Omega})$  не відповідає  $\sigma = 0$  або  $\sigma = \pm 1$ . Початкове положення легкої осі, заданої кутом  $\theta_0$ ,

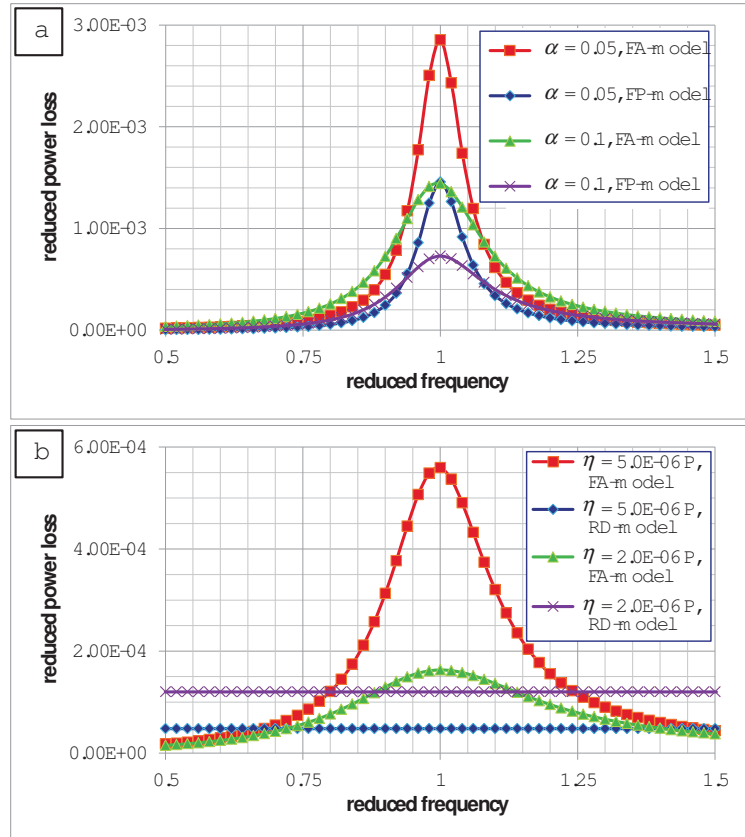


Рисунок 2.14 – Чутливість потужності втрат до параметрів загасання. Рисунок а: випадок фіксованої наночастинки (FP-модель) та випадок в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (FA-модель) для різних значень параметра  $\alpha_0$ . Рисунок б: випадок жорсткого диполя (RD-модель) випадок в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (FA-модель) для різних значень величини в'язкості  $\eta$ . Параметри, що використовуються тут, не зазначені в легенді на рисунку, такі ж, як у підпис до рисунку 2.10, але  $\theta_0 = 0.25\pi$ .

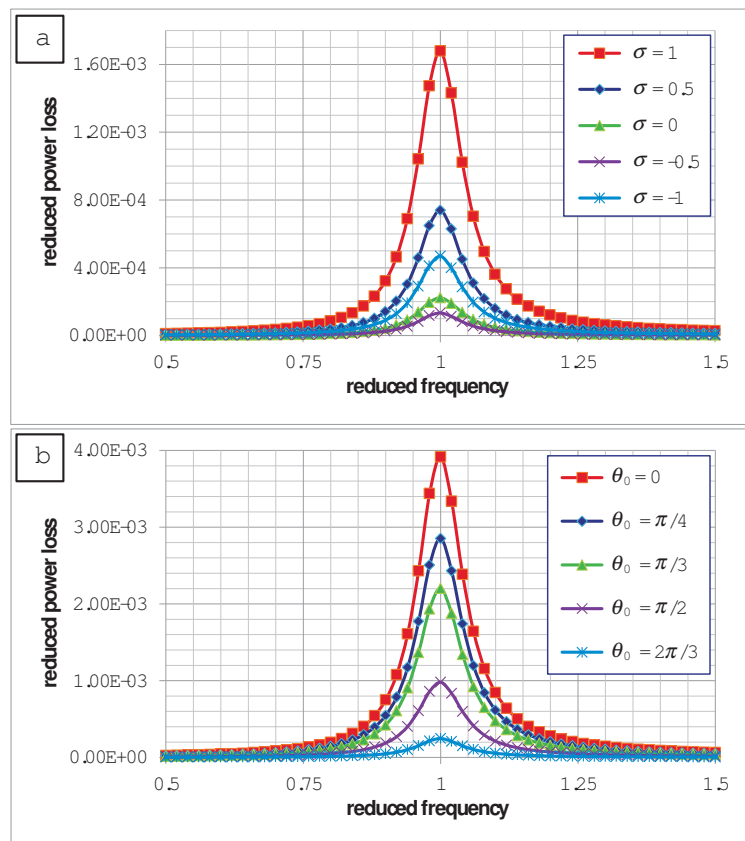


Рисунок 2.15 – Чутливість втрати потужності до орієнтації наночастинки по відношенню до зовнішнього поля для випадку в'язко-зв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією (FA-модель). Параметри, що використовуються тут, не зазначені в легенді на рисунку, такі ж, як у підпис до рисунку 2.10, однак  $\theta_0 = 0.25\pi$  для рисунку а та  $\sigma = 1$  для рисунку б.

також істотно впливає на втрату потужності. Як видно з рис. 2.15б, ця різниця може бути принаймні 20 разів. Оскільки наночастинки в реальних ферорідинах нерівномірно розподілені, можна виділити наступне. По-перше, дипольна взаємодія, яка намагається організувати ансамбль, може суттєво вплинути на втрату потужності. По-друге, зовнішній градієнт магнітного поля, який використовується для контролю нагрівання під час гіпертермії, також визначає втрату потужності. І, по-третє, ми можемо легко контролювати втрати потужності в широкому діапазоні значень завдяки постійному зовнішньому полю, яке визначає напрямок легкої осі наночастинки.

### 2.3.2 Прецесійний режим руху наночастинки та її магнітного моменту

Розв'язок (2.44) може бути знайдений лише чисельно, однак деякі властивості прецесійного руху є очевидними та можуть бути сформульовані вже із зазначеної системи алгебраїчних рівнянь. По перше, коли  $H_{0z} = 0$  та  $\sigma = -1$ , співвідношення  $\phi_1 > \varphi_1$ ,  $\theta_1 > \vartheta_1$ , and  $\theta_1 > \pi/2$  мають бути справедливими. Таким чином, кут між векторами  $\mathbf{m}$  and  $\mathbf{h}$  є завжди меншим, ніж кут між векторами  $\mathbf{n}$  та  $\mathbf{h}$ . Оскільки результуючі втрати енергії пропорційні скалярному добутку  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{h}$ , їх величина зменшується зі зменшенням анізотропії. По-друге величина  $\sigma\Omega\gamma^{-1}$  може асоціюватися з певним ефективним магнітним полем, яке може бути порівнюваним полем анізотропії  $H_a$  у випадку високих частот.

У той самий час, питання про стабільність прецесії, можливі інші режими руху, включно з хаотичним, та перемикання між ними [31] залишається відкритим. Подальші дослідження можуть бути проведені лише чисельно, що й становить мету наших подальших досліджень.



## ВИСНОВКИ

Ми представили аналітичні результати щодо дрейфу зважених феромагнітних часток, індукованих силою Магнуса. Наш теоретичний підхід базується на мінімальному наборі рівнянь для поступальних та обертальних рухів однодомених частинок, викликаних гармонічною силою та магнітним полем, що обертається неоднорідно. В наближенні малих чисел Рейнольдса та вмороженої намагніченості, трансляційне рівняння руху являє собою миттєву швидкість частинки, яка, завдяки ефекту Магнуса, залежить від обертання частинки. На відміну від цього, обертове рівняння руху не залежить від швидкості частинки і зводиться до рівняння, що описує періодично збуджений маятник. В рамках цієї системи швидкість дрейфу, що є найважливішою характеристикою дрейфового руху частинок, повністю визначається стаціонарним розв'язком цього рівняння.

У даній роботі ми отримали точний розв'язок стаціонарного рівняння маятника, збудженого квадратною хвилею (це наш основний аналітичний результат). Він являє собою кут відставання між магнітним полем і намагніченістю частинки і залежить лише від двох безрозмірних параметрів  $\alpha$  та  $\kappa$ , які пов'язані з зворотним часом релаксації обертання та амплітудою квадратної хвилі, відповідно. Ми встановили, що існують два різних режими обертання частинок. Перший відбувається при  $\kappa \leq 1$  і характеризується кутами відстані, що належать до інтервалу  $(-\pi, \pi)$  для всіх значень параметра  $\alpha$ . На противагу цьому, інтервал кутів відставання у другому режимі, що відбувається при  $\kappa > 1$ , росте нескінченно з збільшенням  $\alpha$ . Цей режим існує, коли максимальне значення азимутального кута магнітного поля перевищує критичне значення  $\alpha/4$ .

Використовуючи аналітичні вирази для кута відставання в цих режимах, ми розраховали дрейфову швидкість частинок і проаналізували її залежність від параметрів моделі. Однією з найцікавіших особливостей швидкості дрейфу є те, що вона змінюється немонотонно з  $\alpha$ . Крім того, якщо початкова фаза магнітного поля вибрана належним чином, завжди існує критичне значення  $\alpha_{cr}$  цього параметра, при якому швидкість

дрейфу дорівнює нулю. Оскільки в цьому випадку частинки з  $\alpha < \alpha_{cr}$  та  $\alpha > \alpha_{cr}$  дрейфують в протилежних напрямках, цей феномен двонаправленого дрейфу може бути використаний для сепарації різних частинок (наприклад, частинок з різною намагніченістю) у суспензії. Ще однією важливою особливістю швидкості дрейфу є те, що її величина як функція параметра  $\kappa$  має максимум при деякому  $\kappa > 1$  (коли реалізується друга мода обертання частинок). Ми підтвердили наші теоретичні передбачення чисельними результатами, отриманими з базових рівнянь для поступального та обертального рухів феромагнітних частинок.

Підсумки наших досліджень щодо впливу скінченності анізотропії на обертальну динаміку можна підбити наступним чином. 1) Розглянуто режим малих коливань для пов'язаного магнітного та механічного руху в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією. Цей режим має місце, коли амплітуда зовнішнього змінного поля набагато менша, ніж значення поля одноосьової анізотропії наночастинок ( $H \ll H_a$ ). 2) Загасаюча прецесія магнітного моменту всередині наночастинки пріоритетним чином визначає величину втрати потужності та резонансний характер її частотної залежності. 3) Потужність втрат може бути істотно змінена рухом легкої осі наночастинки. Для реалістичних параметрів системи втрата потужності, отримана для моделі в'язкозв'язаної наночастинки зі скінченною анізотропією, перевищує значення, отримане для моделі фіксованої частинки. 4) Зниження в'язкості рідини-носія призводить до непропорційного зменшення втрати потужності, що поблизу резонансу може бути набагато меншим, ніж значення, отримане для моделі фіксованої частинки. Така складна кореляція між магнітною динамікою та механічним рухом не дозволяє відокремити внесок цих двох механізмів у дисипацію. 5) Потужність втрати надзвичайно чутлива до параметрів системи та початкового положення наночастинки. Це слід враховувати і може використовуватися, наприклад, для контролю температури нагріву та поглинання. Хоча результати отримані в динамічному наближенні, вони встановлюють обмеження для більш точних моделей, що враховують теплові коливання та міжчастинкову взаємодію.

Для прецесійного типу руху нами були записані алгебраїчні рівняння

для кутів прецесії та відставання для векторів  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$ . Методологічна особливість нашого підходу полягає в поданні вектора кутової швидкості в системі координат, що обертається з зовнішнім циркулярно-поляризованим полем, з подальшим перетворенням в лабораторну систему координат. Основними властивостями розв'язку отриманих алгебраїчних рівнянь є. По-перше, магнітний момент наночастинки завжди становить менший кут з зовнішнім полем, ніж вісь анізотропії, і, як наслідок, втрати енергії зменшуються зі зменшенням поля анізотропії. По друге, прецесійна динаміка передбачає наявність деякого ефективного поля, перпендикулярного площині поля поляризації поля, залежно від поданої частоти та напрямку поляризації. Це ефективне поле можна порівняти з полем анізотропії у випадку високих частот.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Mehta R. D. Sports Ball Aerodynamics // Sport Aerodynamics / Ed. by Helge Norstrud. — Vienna : Springer Vienna, 2008. — P. 229–331. — ISBN: 978-3-211-89297-8. — Access mode: [https://doi.org/10.1007/978-3-211-89297-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-211-89297-8_12).
2. Cross R. Physics of Baseball & Softball. — Springer, New York, 2011. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-8113-4>.
3. Seifert J. A review of the magnus effect in aeronautics // Progress in Aerospace Sciences. — 2012. — Vol. 55, no. Supplement C. — P. 17 – 45. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042112000656>.
4. Forbes J. C. Curveballs in protoplanetary discs – the effect of the magnus force on planet formation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2015. — Vol. 453, no. 2. — P. 1779–1792. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv1712>.
5. Yamaguchi M. S., Kimura S. S. Effect of lift force on the aerodynamics of dust grains in the protoplanetary disk // Earth, Planets and Space. — 2014. — Oct. — Vol. 66, no. 1. — P. 132. — Access mode: <https://doi.org/10.1186/1880-5981-66-132>.
6. Thompson L. R., Stamp P. C. E. Effective Magnus Force on a Magnetic Vortex // Quantum Magnetism / Ed. by Bernard Barbara, Yosef Imry, G. Sawatzky, P. C. E. Stamp. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2008. — P. 175–192. — ISBN: 978-1-4020-8512-3. — Access mode: [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8512-3\\_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8512-3_13).
7. Sonin E. Dynamics of Quantised Vortices in Superfluids. — Cambridge University Press, 2016. — ISBN: 9781107006683.
8. Borg K. I., Söderholm L. H., Essén H. Force on a spinning sphere moving in a rarefied gas // Physics of Fluids. — 2003. — Vol. 15, no. 3. — P. 736–741. — <https://doi.org/10.1063/1.1541026>.
9. Inverse magnus effect on a rotating sphere: when and why / Jooha Kim, Haecheon Choi, Hyungmin Park, Jung Yul Yoo // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 754.

10. Rubinow S. I., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1961. — Vol. 11, no. 3. — P. 447–459.
11. Progress in applications of magnetic nanoparticles in biomedicine / Q A Pankhurst, N T K Thanh, S K Jones, J Dobson // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2009. — Vol. 42, no. 22. — P. 224001. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0022-3727/42/i=22/a=224001>.
12. Magnetic iron oxide nanoparticles: Synthesis, stabilization, vectorization, physicochemical characterizations, and biological applications / Sophie Laurent, Delphine Forge, Marc Port et al. // *Chemical Reviews*. — 2008. — Vol. 108, no. 6. — P. 2064–2110. — PMID: 18543879. <http://dx.doi.org/10.1021/cr068445e>.
13. Usadel K. D., Usadel C. Dynamics of magnetic single domain particles embedded in a viscous liquid // *Journal of Applied Physics*. — 2015. — Vol. 118, no. 23. — P. 234303. — <http://dx.doi.org/10.1063/1.4937919>.
14. Usov N., Liubimov B. Y. Magnetic nanoparticle motion in external magnetic field // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2015. — Vol. 385. — P. 339 – 346. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885315002565>.
15. Rotational properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a precessing magnetic field in a viscous fluid / T. V. Lyutyi, S. I. Denisov, V. V. Reva, Yu. S. Bystrik // *Phys. Rev. E*. — 2015. — Oct. — Vol. 92. — P. 042312. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.042312>.
16. Usadel K. D. Dynamics of magnetic nanoparticles in a viscous fluid driven by rotating magnetic fields // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Mar. — Vol. 95. — P. 104430. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.104430>.
17. S. I. Denisov B. O. Pedchenko M. O. P. Unidirectional transport of ferromagnetic particles in a viscous liquid induced by the Magnus force // *J. Nano- Electron. Phys.* — 2016. — Vol. 8, no. 4. — P. 04087.
18. Denisov S. I., Pedchenko B. O. Drift of suspended ferromagnetic particles due to the magnus effect // *Journal of Applied Physics*. — 2017. — Vol. 121, no. 4. — P. 043912. — <https://doi.org/10.1063/1.4975031>.
19. Rosensweig R. Heating magnetic fluid with alternating magnetic field //

- Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2002. — Vol. 252. — P. 370 – 374. — Proceedings of the 9th International Conference on Magnetic Fluids. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885302007060>.
20. Andrä W., Nowak H. Magnetism in Medicine: A Handbook. — ISBN: 9783527405589. — Access mode: <http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/9783527610174>.
  21. Shliomis M. I. Magnetic fluids // Soviet Physics Uspekhi. — 1974. — Vol. 17, no. 2. — P. 153. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0038-5670/17/i=2/a=R02>.
  22. Brown W. F. Thermal fluctuations of a single-domain particle // Phys. Rev. — 1963. — Jun. — Vol. 130. — P. 1677–1686. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1677>.
  23. Magnetic fluid hyperthermia (mfh): Cancer treatment with {AC} magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles / Andreas Jordan, Regina Scholz, Peter Wust et al. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 1999. — Vol. 201, no. 1-3. — P. 413 – 419. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885399000888>.
  24. Applications of magnetic nanoparticles in biomedicine / Q A Pankhurst, J Connolly, S K Jones, J Dobson // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2003. — Vol. 36, no. 13. — P. R167. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0022-3727/36/i=13/a=201>.
  25. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Energy absorption by a magnetic nanoparticle suspension in a rotating field // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 112, no. 1. — P. 173–177. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063776110061160>.
  26. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Power losses in a suspension of magnetic dipoles under a rotating field // Phys. Rev. E. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 021401. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.021401>.
  27. Reva V. V., Lyuty T. V. Microwave absorption by a rigid dipole in a viscous fluid // 2016 II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering (YSF). — 2016. — Oct. — P. 104–107.
  28. Felderhof B. U., Jones R. B. Mean field theory of the nonlinear response of an interacting dipolar system with rotational diffusion to an oscillating field // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2003. — Vol. 15, no. 23. —

- P. 4011. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0953-8984/15/i=23/a=313>.
29. Nándori I., Rácz J. Magnetic particle hyperthermia: Power losses under circularly polarized field in anisotropic nanoparticles // *Phys. Rev. E*. — 2012. — Dec. — Vol. 86. — P. 061404. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.061404>.
  30. Improved efficiency of heat generation in nonlinear dynamics of magnetic nanoparticles / J. Rácz, P. F. de Châtel, I. A. Szabó et al. // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Jan. — Vol. 93. — P. 012607. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.012607>.
  31. Energy dissipation in single-domain ferromagnetic nanoparticles: Dynamical approach / T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, A. Yu. Peletskyi, C. Binns // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Feb. — Vol. 91. — P. 054425. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.054425>.
  32. Haase C., Nowak U. Role of dipole-dipole interactions for hyperthermia heating of magnetic nanoparticle ensembles // *Phys. Rev. B*. — 2012. — Jan. — Vol. 85. — P. 045435. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.045435>.
  33. Landi G. T. Role of dipolar interaction in magnetic hyperthermia // *Phys. Rev. B*. — 2014. — Jan. — Vol. 89. — P. 014403. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.014403>.
  34. Tsebers A. O. Simultaneous rotational diffusion of the magnetic moment and the solid matrix of a single-domain ferromagnetic particle // *Magneto-hydrodynamics*. — 1975. — Vol. 11, no. 3. — P. 273–278. — Access mode: <http://mhd.sal.lv/contents/1975/3/MG.11.3.2.R.html>.
  35. Mamiya H., Jeyadevan B. Hyperthermic effects of dissipative structures of magnetic nanoparticles in large alternating magnetic fields // *Scientific Reports*. — 2011. — Nov. — Vol. 1. — P. 157 EP. — Article. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1038/srep00157>.
  36. Usov N. A., Liubimov B. Y. Dynamics of magnetic nanoparticle in a viscous liquid: Application to magnetic nanoparticle hyperthermia // *Journal of Applied Physics*. — 2012. — Vol. 112, no. 2. — P. 023901. — <http://dx.doi.org/10.1063/1.4737126>.
  37. Precessional dynamics of single-domain magnetic nanoparticles driven

- by small ac magnetic fields / Haiwen Xi, Kai-Zhong Gao, Yiming Shi, Song Xue // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2006. — Vol. 39, no. 22. — P. 4746. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0022-3727/39/i=22/a=002>.
38. Cīmurs J., Cēbers A. Dynamics of anisotropic superparamagnetic particles in a precessing magnetic field // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Jun. — Vol. 87. — P. 062318. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.87.062318>.
39. Magnetomechanical coupling and ferromagnetic resonance in magnetic nanoparticles / Hedyeh Keshtgar, Simon Streib, Akashdeep Kamra et al. // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Apr. — Vol. 95. — P. 134447. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.134447>.
40. Kim J., Sosso A., Clark A. F. Dynamics of overdamped josephson junctions driven by a square-wave pulse // *Journal of Applied Physics*. — 1998. — Vol. 83, no. 6. — P. 3225–3232. — <https://doi.org/10.1063/1.367089>.
41. Isohätälä J., Alekseev K. N. Stability properties of periodically driven overdamped pendula and their implications to physics of semiconductor superlattices and josephson junctions // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 2. — P. 023116. — <https://doi.org/10.1063/1.3382087>.
42. A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. *Integrals and Series*. — Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986. — Vol. 1: Elementary Functions.
43. Dar M. I., Shivashankar S. A. Single crystalline magnetite, maghemite, and hematite nanoparticles with rich coercivity // *RSC Adv*. — 2014. — Vol. 4. — P. 4105–4113. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C3RA45457F>.
44. Raikher Y. L., Shliomis M. I. The effective field method in the orientational kinetics of magnetic fluids and liquid crystals // *Advances in Chemical Physics*. — 1994. — Vol. 87. — P. 595–751. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1002/9780470141465.ch8>.
45. Frenkel J. *Kinetic Theory of Liquids*. Dover Publications. — Dover, 1955. — Access mode: <https://books.google.com.ua/books?id=ORdSQwAACAAJ>.