НАПРУЖЕННЯ І ПЕРЕМІЩЕННЯ У СТЕРЖНІ ВИКЛИКАНІ РУХОМИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА.

TENSION AND MOTION IN RODS CAUSED MOVING SOURCE OF HEAT

Клименко В.А., ст. викладач, Ячменьов В.О., доцент,
Москаленко Д.Р., студент, СумДУ, Суми

Klimenko V.A., lecturer, Yachmenev V.A., associate professor,
Moskalenko D.R., student, Sumy

Процес зміни надлишкової температури $T(x,y)$ у стержні кінцевої довжини описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q'}{c\rho}\delta(x-\upsilon_0);$$

$$0<x<l, \qquad 0<t<\frac{l}{\upsilon_0},$$

де a^2 - коефіцієнт температуропровідності,
c - теплоємність матеріалу,
ρ - густина матеріалу,
υ_0 - швидкість руху джерела,
q - інтенсивність джерела.

Розглядається тонкий стержень довжиною l, що займає область $0\le x\le l$. Нехай $u=u(x,t)$ - переміщення в стержні визначаються залежністю

$$\sigma=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha T(x,t)\right) \tag{1}$$

де E - модуль пружності, α - коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стержня. За відсутності масових сил рівняння руху має вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

Виключивши σ із рівняння (1) і (2) отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

а виключивши u із рівнянь (1) і (2)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}+\rho\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

Перейдемо до розв’язку рівняння у переміщеннях (3).
Переміщення, які є розв’язком диференціального рівняння, будемо шукати у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot$$

Тоді рівняння

$$f_n'(t)+\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 f_n(t)=-\alpha c^2\varphi_n(t)\cdot\frac{n\pi}{l}\zeta$$

з початковими умовами

$$f_n(0)=f_n'(0)=0\cdot$$

мають розв’язки

$$
f_n(t)=\frac{\frac{2q}{C_0\rho l}\cdot\alpha c}{\upsilon_0^2+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\cdot\left\{\frac{1}{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{n^4\pi^4a^4}{l^4}}+\frac{1}{\frac{n^2\pi^2\upsilon_0^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}}\right\}\times
$$

$$
\times\left\{c\upsilon_0\cos\frac{n\pi ct}{l}-a^2n\pi\frac{\vartheta_0}{l}\sin\frac{n\pi ct}{l}\right\}-\frac{\alpha c^2\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{2q}{c_0\rho l}}{\upsilon_0^2+\frac{n^2\pi^2a^4}{l^2}}\left\{\frac{\upsilon_0 l}{n\pi}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)}{\frac{n^4\pi^4a^4}{l^4}+\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}}+\right.
$$

$$
\left.+a^2\frac{\sin\frac{n\pi\upsilon_0 t}{l}}{\frac{n^2\pi^2\varepsilon^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2\upsilon_0^2}{l^2}}-\frac{\upsilon_0 l}{n\pi}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi\vartheta_0}{l}}{\frac{n^2\pi^2l^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2\vartheta_0^2}{l^2}}\right\}
$$

Тим самим отримана можливість визначити переміщення в стержні.

Отримані результати без особливих ускладнень перенесені на випадок обробки деталей періодичною системою джерел.

Фактично можуть зустрітися два випадки:

а) два и більше джерел не знаходяться одночасно на поверхні деталі;

б) два и більше джерел знаходяться на поверхні деталі одночасно.

У випадку а) моделювання здійснюється тією ж програмою при умові, що в процесі просування інструменту виконуються зупинки заданої тривалості за часом. У випадку б) моделювання виконується зміню інтенсивності джерела у потрібне число разів.