



ВІСНИК

**СУМСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
АГРАРНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Випуск 10, 2003

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ
УКРАЇНИ

ВІСНИК

**СУМСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
АГРАРНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

**МЕХАНІЗАЦІЯ ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ
ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ**

СЕРІЯ КВ №3393
Заснований в 1996 році

Випуск 10, 2003

диполей в неоднородном электрическом поле. Получены соотношения для составляющих силы, действующей между диполями.

SUMMARY

The peculiarities of interrelation of equivalent electric dipole in different electrostatic fields are studied. The ratio for power compounds working between the fields is received.

ЛІТЕРАТУРА

1. Яворский Б.М. и Детлаф А.А. справочник по физике. -Москва: физматгиз, 1963.
2. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. -М "Наука" 1997.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. -М. "Наука" 1982.

УДК 539.3

МІЦНІСТЬ БЕТОНІВ, ХАОТИЧНО АРМОВАНИХ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Долгіх В.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Долгіх Я.В., кандидат економічних наук, доцент,
Шаповалов С.П. кандидат фізико-математичних наук, доцент

Потреба будівельної промисловості в нових матеріалах привела до інтенсивного розвитку досліджень по створенню виробів із композитних матеріалів — бетонів, армованих волокнами (фібробетонів) [1]. Прогнозування механічних властивостей таких матеріалів зв'язано з аналізом процесів, що протікають у їхній структурі при виникненні і поширенні мікро та макротріщин.

У механіці композитних матеріалів [2,3] розглядаються, в основному, однонаправлено армовані матеріали з полімерною чи металевою матрицею, що володіє більшою граничною деформацією, а ніж волокна, внаслідок чого руйнування композита починається з обриву волокон. У фібробетонах процес руйнування розпочинається з розвитку тріщин у бетонній матриці, що має меншу граничну деформацію, а ніж волокна. Волокна, що перетинають поверхню тріщини, чинять опір її розкриттю, що приводить до збільшення межі міцності бетону.

Метою роботи є розробка методу визначення міцності фібробетона в залежності від геометричних параметрів і механічних властивостей його компонентів.

Міцність фібробетона з дископодібною макротріщиною. Розглянемо фібробетон, що представляє собою бетонну матрицю, хаотично армовану короткими гнучкими скловолкнами, що має в структурі плоску дископодібну макротріщину радіуса a , пересічну в різних напрямках волокнами. На нескінченності, перпендикулярно тріщині, діє напруга σ^∞ , що розтягує, (рис.1).

Нехай r — полярний радіус точки. Область $0 \leq r \leq a$ відповідає розірваним зв'язкам між частками бетонної матриці. Замінімо дію волокон, що стримують розкриття тріщини, рівномірно розподіленими по її поверхні напругами σ_p .

Відповідно до моделі Леонова – Панасюка [4], у кільцевій області $a \leq r \leq c$ протилежні береги тріщини притягаються з постійною напругою σ_0 , якщо відстань між ними не перевищує граничної величини розкриття тріщини δ_k . Величина σ_0 дорівнює межі міцності композита. Умова поширення тріщини має вигляд [4]

$$2w(a,0) = \delta_k \quad (1)$$

де $w(r, z)$ – переміщення уздовж осі Z точки з координатами (r, z) .

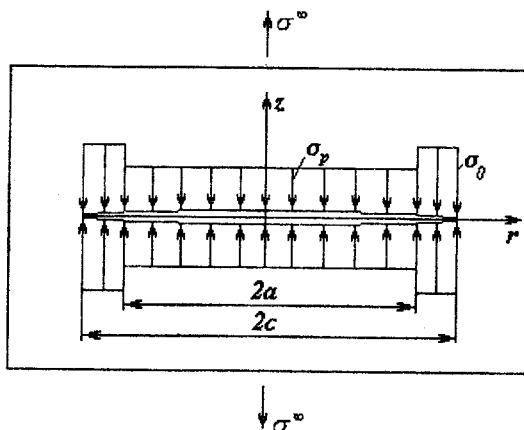


Рис. 1. Розрахункова схема композита з макротріщиною

Зсув точок матеріалу на поверхні тріщини щодо площини $z=0$ можна обчислити за формулою [4]

$$w(r,0) = B_k \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{c \sin \alpha} \frac{q(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}, \quad B_k = \frac{4(1-\nu_k^2)}{\pi E_k},$$

$$q(r) = \begin{cases} \sigma^\infty - \sigma_p, & 0 \leq r \leq a \\ \sigma^\infty - \sigma_0, & a < r \leq c \end{cases}, \quad c = a \left[1 - (\sigma^\infty - \sigma_p)^2 / (\sigma_0 - \sigma_p)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

де ν_k, E_k - коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга композита.

Обчислюючи внутрішній інтеграл, одержуємо

$$w(r,0) = B_k (\sigma_0 - \sigma_p) \int_{\arcsin(a/c)}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (3)$$

$$w(r,0) = B_k (\sigma_0 - \sigma^\infty) \int_{\arcsin(a/r)}^{\arcsin(a/c)} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad a < r \leq c,$$

При $r = a$ із формули (3) визначасмо переміщення точок на лінії, що розділяє зону зчеплення і зону розірваних зв'язків

$$w(a,0) = B_k (\sigma_0 - \sigma_p) a (1 - a/c). \quad (4)$$

Використовуючи критерій (1), знаходимо зовнішню граничну напругу

$$\sigma_*^\infty = \sigma_p^* + (\sigma_0 - \sigma_p^*) \sqrt{\frac{2a_*}{a}} \sqrt{1 - \frac{a_*}{2a}}, \quad a \geq a_* = \frac{\pi E_k \sigma_k}{8(1-\nu_k^2)}, \quad (5)$$

де a_* – критичний розмір тріщини. При $a = a_*$ досягається найбільша величина міцності композита

$$\sigma_*^\infty = \sigma_p^* + \sigma_m^*, \quad (\sigma_m^* = \sigma_0 - \sigma_p^*). \quad (6)$$

При подальшому збільшенні радіуса тріщини ($a > a_*$), гранична напруга σ_*^∞ зменшується, тому σ_*^∞ є руйнівним навантаженням для композитного матеріалу з дископодібною тріщиною радіусом $a \geq a_*$. Композит із тріщиною радіусом $a < a_*$ має міцність бездефектного матеріалу.

Оцінка зусилля у волокні кінцевої довжини, що витягується з матриці. Розглянемо пружне циліндричне волокно довжиною L , що витягається силою P із пружної матриці, що заповнює півпростір $z \geq 0$ (рис. 2).

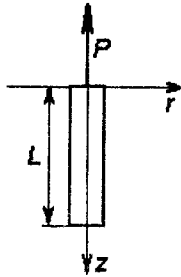


Рис. 2. Схема витягування волокна з матриці

Знайдемо розподіл уздовж волокна контактних напружень τ_{rz} та напружень у волокні σ_z^f . В роботі [5] задача зведена до чисельного рішення інтегрального рівняння. Для одержання наближеного аналітичного рішення скористаємося теорією «погранслоя» [2]. Рівняння для матриці

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} = 0, \quad \sigma_z = E_m \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = G_m \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (7)$$

де $w(r, z)$ – переміщення уздовж осі Z точки матриці з координатами (r, z) ; E_m, G_m – модулі Юнга і зсуву матеріалу матриці.

Рівняння рівноваги елемента волокна представимо у вигляді

$$\frac{d\sigma_z^f}{dz} = -\frac{2}{R} \tau_{rz}, \quad (8)$$

де σ_z^f – напруження у волокні, τ_{rz} – дотичне напруження на поверхні роздигнула волокна з матрицею, R – радіус поперечного перерізу волокна.

Позначаючи r_* – радіус зони пограншару, $W(z)$ – переміщення точки волокна з координатою z і, використовуючи закон Гука

$$\sigma_z^f = E_f \frac{dW}{dz}, \quad (9)$$

а також умову спільності деформацій волокна і матриці, одержуємо

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + k^2 W = 0, \quad k^2 = 2G_m \left[E_f R^2 \ln \frac{R}{r_*} \right]^{-1}. \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (10), що задовольняє крайовим умовам $\sigma(0) = P/\pi R^2$, $\sigma(l) = 0$ має вигляд

$$W(z) = -\frac{P \operatorname{ch}[k(l-z)]}{k \pi R^2 \operatorname{sh}(kl)} \quad (11)$$

Співвідношення (8), (9), (11) дозволяють знайти шукані напруги

$$\sigma_z^f(z) = \frac{2\tau_0 \operatorname{sh}[k(l-z)]}{k R \operatorname{ch}(kl)}, \quad \tau_{rz}(z) = \tau_0 \frac{\operatorname{ch}[k(l-z)]}{\operatorname{ch}(kl)}, \quad \tau_0 = \tau_{rz}(0). \quad (12)$$

При $r_* = 8R$ і $E_f/E_m = 4$ напруга σ_z^f , обумовлена формулою (12), збігається з точністю до 4% з чисельним рішенням, приведеним у [5].

При зростанні сили P максимальне дотичне напруження збільшується, досягаючи деякого граничного значення $\langle \tau \rangle$, при якому відбувається відшарування волокна від матриці. Припускаючи, що на ділянці відшарування діє рівномірне розподілене по поверхні волокна дотичне напруження тертя τ_s , одержуємо наступні закони зміни $\tau_{rz}(z)$, $\sigma_z^f(z)$ волокна, що відшарувалося на глибину h

$$\tau_{rz}(z) = \begin{cases} \tau_s, & 0 \leq z \leq h, \quad \chi = \sqrt{(1+\nu_m) \frac{E_f}{E_m} \ln\left(\frac{r_*}{R}\right)} \\ \langle \tau \rangle \operatorname{ch}[(l-z)/(\chi R)] / \operatorname{ch}[(l-h)/(\chi R)], & h \leq z \leq l \end{cases}, \quad (13)$$

$$\sigma_z^f(z) = \begin{cases} 2\langle \tau \rangle \chi \operatorname{sh}[(l-z)/(\chi R)] / \operatorname{ch}[(l-h)/(\chi R)], & h \leq z \leq l \\ 2\tau_s(h-z)/R + 2\langle \tau \rangle \chi \operatorname{th}[(l-h)/(\chi R)], & 0 \leq z \leq h \end{cases} \quad (14)$$

З (9), (14) знаходимо подовження частини волокна на ділянці відшарування

$$W(h) - W(0) = \left\{ \tau_s h^2 / R + 2\langle \tau \rangle \chi h \operatorname{th}[(l-h)/(\chi R)] \right\} / E_f. \quad (15)$$

Для визначення $W(h)$ скористаємося рішенням задачі Міндіна [6], що дозволяє обчислити поле переміщень, викликане дією зосередженої сили, прикладеної в деякій точці пружного півпростору. Припускаючи, що на ділянці $0 \leq z \leq h$ уздовж осі Z на матрицю діє погонне навантаження інтенсивністю $\tau_s 2\pi r$, а в точці $z = h$ прикладена зосереджена сила, рівна сумарному зусиллю, сприйманому не відшарованою ділянкою волокна, одержуємо вираз для $W(h)$, що після лінеаризації по h , прийме вигляд

$$W(h) = -\frac{R}{2G_m} \left\{ \left(1 - \frac{h}{l}\right) \langle \tau \rangle \chi \operatorname{th}\left(\frac{l}{\chi R}\right) + \tau_s \frac{h}{l} \ln\left(\frac{l}{R}\right) \right\}. \quad (16)$$

Зв'язок напруги у волокні з переміщенням $W_0 = |W(0)|$ має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_z^f(0) &= 2\tau_s h / R + 2\langle \tau \rangle \chi \operatorname{th}[(l-h)/(\chi R)], & l > l_0, \\ \sigma_z^f(0) &= 2\tau_s l / R, & l \leq l_0 = \sqrt{RW_0 E_f / \tau_s}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для волокна, анкерованого в матрицю на глибину l під кутом θ до осі Z (рис.3), співвідношення, аналогічні (17), запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^f(0) &= \left\{ 2\tau_s \sqrt{VE_f \cos \theta / (R\tau_s)} + 2\langle \tau \rangle \chi \operatorname{th}[(l - h_\theta) / (\chi R)] \right\} \cos \theta, \quad l_0 \leq l \leq L, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_*, \\
 \sigma_z^f(0) &= 2\tau_s l \cos \theta / R, \quad 0 \leq l < l_0 = \sqrt{RVE_f \cos \theta / \tau_s}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_*, \\
 \sigma_z^f(0) &= E_f V \cos^2 \theta \operatorname{th}(l / (\chi R)) / (\chi R), \quad \theta_* \leq \theta < \pi/2, \quad 0 \leq l \leq L.
 \end{aligned} \tag{18}$$

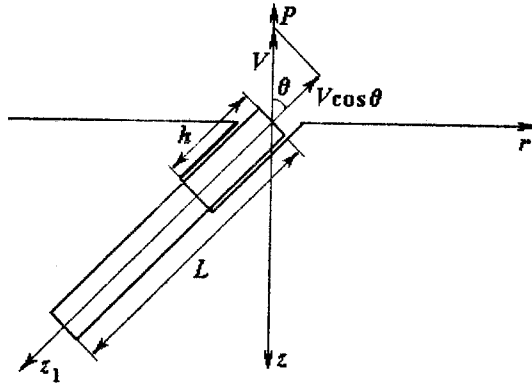


Рис. 3. Витягування волокна з матриці

Тут $2L$ – довжина волокна, $h_\theta = \sqrt{RV \cos \theta E_f / \tau_s}$, $\theta_* = \arccos[\langle \tau \rangle R \ln(r/R) / (VG_m)]$ – граничний кут (при $0 \leq \theta < \theta_*$ волокна відшаровуються, при $\theta_* \leq \theta < \pi/2$ – волокна не відшаровуються). Далі прийнемо $\theta_* = \pi/2$.

Усереднюючи співвідношення (17), (18) по орієнтаціям і глибинам анкеровки, одержимо значення середньої напруги у волокні $\langle \sigma_f \rangle$, що перетинає тріщину. Наприклад, при статистично однорідному в площині армуванні воно дорівнює

$$\langle \sigma_f \rangle = \frac{4}{\pi L} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^L \sigma_z^f(l, \theta) dl = \frac{8\tau_s}{\pi} \left\{ 0,8741 \sqrt{\frac{VE_f}{R\tau_s}} + \chi \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s} - \frac{\pi VE_f}{8 L \tau_s} \right\}. \tag{19}$$

У співвідношеннях (18), (19) гнучка жорсткість волокон і можливість викрашування матриці не враховуються.

Міцність фібробетона при розтягуванні. Співвідношення (5), (6), (19) дозволяють установити залежність міцності фібробетона від геометричних і механічних характеристик його компонентів. Кількість волокон N , що перетинають поверхню тріщини площею F при статистично однорідному об'ємному армуванні визначається формулою $N = \mu_f F / (2f)$, при площинному армуванні $N = 2\mu_f F / (\pi f)$, де μ_f – об'ємний зміст волокон у фібробетоні, f – площа поперечного перерізу волокна. Перемножуючи середню напругу у волокні $\langle \sigma_f \rangle$, що відповідає граничному розкриттю тріщини δ_k , на N , одержимо сумарне зусилля, що діє на береги тріщини з боку волокон. Розділивши це зусилля на площу поверхні тріщини, знайдемо σ_p^* . Залежність межі міцності композита $\sigma_k = \sigma_p^*$ від μ_f , межі міцності матриці на

розтягання σ_m й усередненої по орієнтаціям і глибинах анкеровки напрути у волокні $\langle \sigma_f \rangle$ представимо у вигляді

$$\sigma_k = \langle \sigma_f \rangle \mu_f / 2 + \sigma_m (1 - \mu_f) \text{ – для об'ємного армування,} \quad (20)$$

$$\sigma_k = \langle \sigma_f \rangle \mu_f / \pi + \sigma_m (1 - \mu_f) \text{ – для площинного армування} \quad (21)$$

У таблиці 1 порівнюються розраховані за пропонованою методикою і експериментально визначені [1] межі міцності на розтягання склогіпсу і склоцементу. Характеристики композицій: а) склогіпс – $E_m = 1,7 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_m = 2,75 \text{ MN/m}^2$,

$$E_f = 7,6 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, \tau_s = 5,52 \text{ MN/m}^2, 2L = 43 \text{ mm};$$

$$\text{б) склоцемент} \quad E_m = 1,7 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, \sigma_m = 2,75 \text{ MN/m}^2,$$

$$E_f = 7,6 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, \tau_s = 10,34 \text{ MN/m}^2, 2L = 34 \text{ mm}.$$

Скляні нитки складаються з 204 моноволокон, міцністю на розтягання $\sigma_f = 1210 \text{ MN/m}^2$, ефективний діаметр нитки $d = 0,144 \text{ mm}$. Армування в обох випадках – статистично однорідне в площині. При розрахунках покладалося, що $\langle \tau \rangle / \tau_s = 3$, $\delta_k = 2,2 + 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$.

1. Порівняння розрахункових і експериментальних меж міцності

Матеріал	Склогіпс		Склоцемент
Об'ємна частка волокон	0,047	0,089	0,0325
Межа міцності на розтягання:			
розрахований	12,39	21,0	13,38
експериментальний	13,8	21,8	13,4

ВИСНОВОК

Визначається границя міцності на розтягання композитного матеріалу з крихкою матрицею, хаотично армованої короткими гнучкими волокнами, що має плоску макротріщину. Оцінюється зусилля, що діє з боку волокон на береги тріщини. Розраховані границі міцності порівнюються з експериментальними.

РЕЗЮМЕ

Определяется предел прочности на растяжение композитного материала с хрупкой матрицей, хаотически армированной короткими гибкими волокнами, имеющего плоскую макротрещину. Оценивается усилие, действующее со стороны волокон на берега трещины. Рассчитанные пределы прочности сравниваются с экспериментальными.

SUMMARY

Fracture of composite material with a brittle matrix chaotically reinforced by short flexible fibres, having flat crack is studied. The effort acting on the part of fibres on coast of a crack is estimated. The calculated and experimental strength is compared.

ЛІТЕРАТУРА

1. Материалы, армированные волокном /пер. с англ.– М.: Стройиздат, 1982.–180 с.

2. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
3. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 246 с.
5. Sternberg E. Load – transfer and load – diffusion in elastostatics // Proc. of the Sixth U. S. Nat. Congress of Appl. Mech. – 1970. – p. 34 – 61
6. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

УДК 539.3

ПЛОСКА ЗАДАЧА ОРТОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Журавська О.О., кандидат технічних наук, доцент

В даній роботі будуються однорідні розв'язки ортотропного прямокутника, що передбачає будь-яку комбінацію нульових, або таких, які до них зводяться, граничних умов - статичних, геометричних, змішаних на двох паралельних площинах $y = const$. Граничні умови на торцях $x = const$ представлені відомими функціями напружень і переміщень. Розв'язок будується як для скінченного прямокутника, так і для полоси (рис. 1).

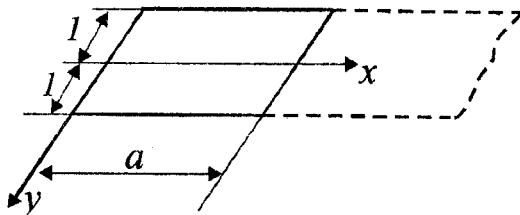


Рис. 1

Сформульована постановка задачі описується відомим рівнянням

$$\partial^4 \varphi / \partial x^4 + 2\mu_i \lambda_i^2 \partial^4 \varphi / \partial x^2 \partial y^2 + \lambda_i^4 \partial^4 \varphi / \partial y^4 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq a(\infty); \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Невідома функція рівняння (1) $\varphi(x, y)$ - функція напружень.

Прийняті позначення і їх вираз через технічні сталі ортотропного тіла:

а) узагальнений плоский напружений стан

$$\lambda_1^4 = E_x / E_y; \quad \mu_1 = 0,5 \sqrt{E_x E_y} (1/G_{xy} - 2\nu_{yx} / E_x);$$

б) плоска деформація

$$\lambda_2^4 = \lambda_1^4 (1 - \nu_{yz} \nu_{zy}) / (1 - \nu_{xz} \nu_{zx})$$

$$\mu_2 = 0,5 \sqrt{E_x E_y} / (1 - \nu_{xz} \nu_{zx}) \left[(1 - \nu_{yz} \nu_{zy}) [1/G_{xy} - 2(\nu_{yx} + \nu_{xz} \nu_{zx}) / E_x] \right].$$