СРАВНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ С МЕТОДОМ РЕЛЕЯ-РИТЦА В ЗАДАЧЕ ПРЯМОГО ИЗГИБА КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Ветер М. Ю., студент;
Жигилий Д. А., ст. преподаватель

Метод конечных разностей - метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. Этот метод предполагает замену функции w=f(z) конечным (дискретным) множеством точек (узлов) и вместо функции непрерывного аргумента рассматривают функции дискретного аргумента, определенные в узлах и называемые условными функциями, удовлетворяя разностным начальным и краевым условиям для узловой функции.

Метод Релея-Ритца основан на важном энергетическом принципе Лагранжа, гласящим что потенциальная энергии системы П имеет стационарное минимальное значение в случае устойчивого равновесия. Вместо приближенного интегрирования методом конечных разностей разрешающего дифференциального уравнения при заданных граничных условиях, можно определить функцию (интеграл уравнения), удовлетворяющую граничным условиям и минимизирующую потенциальную энергию.

Рассмотрим консольную балку постоянной изгибной жёсткости нагруженную сосредоточенной силой на конце.

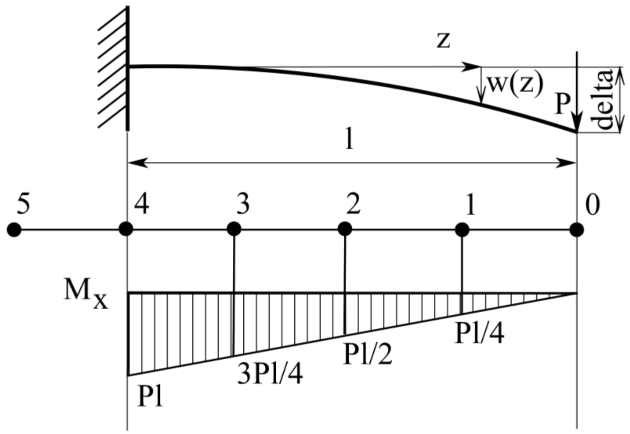

Рисунок – Расчётная модель

Метод конечных разностей.

$w_1'' = \dfrac{M_x}{EJ_x}$ - разрешающее уравнение упругой линии.

Граничные условия: $\theta_4 = 0 \Rightarrow w_5 = 0$; $w_4 = 0$.

Разрешающая система уравнений:

$$\begin{cases} w_1'' = \dfrac{w_0 - 2w_1 + w_2}{\lambda^2} = \dfrac{P\lambda}{EJ_x}; \\ w_2'' = \dfrac{w_1 - 2w_2 + w_3}{\lambda^2} = \dfrac{2P\lambda}{EJ_x}; \\ w_3'' = \dfrac{w_2 - 2w_3 + w_4}{\lambda^2} = \dfrac{3P\lambda}{EJ_x}; \\ w_4'' = \dfrac{w_3 - 2w_4 + w_5}{\lambda^2} = \dfrac{4P\lambda}{EJ_x}. \end{cases}$$

Здесь шаг λ=l/4.

Метод Релея-Ритца.

Внутренняя потенциальная энергия составит:

$$U = \frac{EJ_x}{2}\int_0^l \left(w''(z)\right)^2 dz.$$

Предполагаемая функция упругой линии.

$$w(z) = \delta\, sin\frac{\pi(z-l)}{2l} = \delta\, sin\left(\frac{\pi z}{2l} - \frac{\pi}{2}\right) = -\delta\, sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2l}\right) = -\delta\, cos\frac{\pi z}{2l};$$

$$\left(w''(z)\right)^2 = \frac{\delta^2\pi^4}{16l^4}cos^2\frac{\pi z}{2l}.$$

$$U = \frac{EJ_x}{2}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{16l^4}\cdot\int_0^l cos^2\, dz = \frac{EJ_x}{32}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{l^4}\left(\frac{z}{2} + \frac{l}{2\pi}cos\frac{\pi z}{l}\right)\Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{EJ_x}{32}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{l^4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Работа внешней силы составит

$A = -P\delta$.

Потенциальная энергия:

$\Pi = U + A$

Принцип Лагранжа

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta} = \frac{\partial\left(\dfrac{EJ_x}{32}\cdot\dfrac{\delta^2\pi^4}{l^4}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)\right)}{\partial\delta} + \frac{\partial(-P\delta)}{\partial\delta} = 0.$$

Сравнены значения стрелы прогиба полученные этими методами, показано влияние шага разбивки в методе конечных разностей и точности функции аппроксимации в методе Релея-Ритца.

Сучасні технології у промисловому виробництві : матеріали науково-технічної конференції викладачів, співробітників, аспірантів і студентів фак-ту технічних систем та енергоефективних технологій, м. Суми, 23-26 квітня 2013 р.: у 2-х ч. / Ред.кол.: О.Г. Гусак, В.Г. Євтухов. - Суми : СумДУ, 2013. - Ч.1. - С. 182-183.