# ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ДИСКРЕТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В БІОЛОГІЇ

**М.О. Малишок, С.М. Лапіна**
Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І – ІІ ступенів – ліцей
41100, м. Шостка, вул. Карла Маркса, 33
e-mail: m.malyshock@yandex.ua

Мета нашої роботи: вивчити метод різницевих рівнянь як особливий математичний засіб побудови дискретних математичних моделей у різних галузях, зокрема в біології.

Різницевим рівнянням називається рівняння, яке зв'язує між собою значення $x_n$ при різноманітних значеннях індексу n.

Багато біологічних популяцій не володіють властивістю безперервної зміни чисельності, ріст чисельності послідовних поколінь відбувається в дискретні моменти часу. В дискретній моделі час являє собою дискретну змінну і спостереження відбуваються лише через визначені фіксовані інтервали часу. Перепис популяції можна проводити, наприклад, погодинно, щорічно або кожні 10 років.

В дискретних моделях популяційного росту величина $x_n$, буде позначати чисельність популяції до кінця n-го періоду часу. По закінченню одного періоду часу чисельність дорівнює $x_1$; по закінченню двох періодів вона дорівнює  і т.д. Розвиток популяції в часі описується послідовність чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, $x_{n+1}$, … .

Модель міжвидової конкуренції. Лінійна однорідна система

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n \end{cases} \qquad (1),$$

описує взаємний вплив двох конкуруючих видів на розмір їх популяцій. Нехай початкові чисельності складають $x_0 = 100$ і $y_0 = 150$ . Знайти чисельності обох видів у всі наступні моменти часу.

Будемо розв'язувати систему (1) шляхом зведення її до лінійного різницевого рівняння другого порядку відносно $x_n$ з постійними коефіцієнтами. З першого рівняння маємо

$$x_{n+2} = 2 - y_{n+1} = 2x_{n+1} - (-x_n + 2y_n) = 2x_{n+1} + x_n - 2y_n$$

Згідно того ж першого рівняння, $y_n = 2x_n - x_{n+1}$ і ми отримуємо

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n - 2(2x_n - x_{n+1}) = 4x_{n+1} - 3x_n.$$

Таким чином, $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$. Допоміжне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ має корені $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок $x_n = k_1 3^n + k_2 1^n = k_1 3^n + k_2$. З першого рівняння (1) слідує, що

$$y_n = 2x_n - x_{n+1} = 2k_1 3^n + 2k_2 - k_1 3^{n+1} - k_2 = k_2 - -k_1 3^n$$

Щоб знайти постійні $k_1$ і $k_2$, використаємо умови $x_0 = 100 = k_1 + k_2$ і $y_0 = 150 = k_2 - .k_1$ Звідси $k_1 = -25$, а $k_2 = 125$. Шуканий розв'язок має вигляд :

$$x_n = 125 - 25 \times 3^n \text{ і } y_n = 125 + 25 \times 3^n.$$

Перший вид швидко вимирає ($x_0$=100, $x_1$=50, а другий вид продовжує зростати ($y_1$0=150, $y_1$1=200, $y_1$2=350).

Завдяки різницевим рівнянням ми можемо складати математичні моделі біологічних систем у дискретному часі, та визначати чисельність популяції через певні періоди часу.

Хімія: наука і практика: Збірник тез доповідей Х відкритого студентського науково-практичного семінару, присвяченого 10-річчю створення кафедри, м. Шостка, 14 березня 2013 р. – Суми: Сумський державний університет, 2013.