

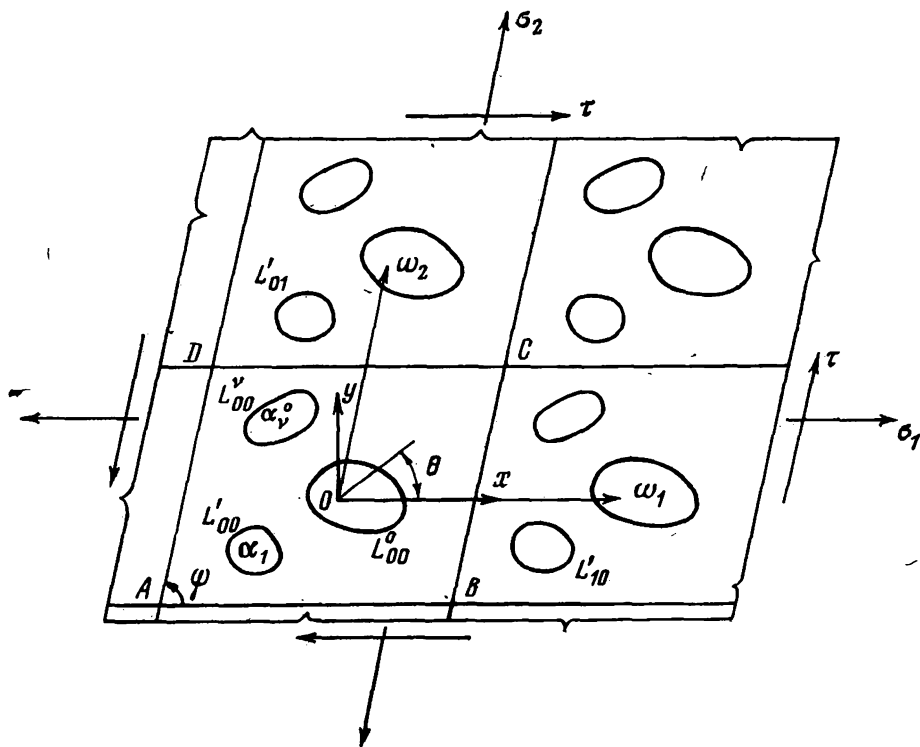
ОБОБЩЕННАЯ ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ
КОНГРУЭНТНЫМИ ГРУППАМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОТВЕРСТИЙ

В. Е. КАЦ, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Новосибирск)

Первая основная двойкопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий, изучена в [1]. В предлагаемой работе рассматривается для анизотропной среды [2] аналогичная задача, которая сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказывается существование и единственность решения полученного уравнения. Даются результаты расчетов.

1. Рассмотрим плоскую неограниченную анизотропную среду, ослабленную конгруэнтными группами отверстий. В пределах группы отверстия могут быть произвольными и различными (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть ω_1 и ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0, \text{Im } \omega_2 > 0$) — основные периоды решетки, D — область, занятая средой, $L_{m n}^j$ — контур j -го отверстия в группе, содержащей

внутри себя точку $p_j = \alpha_j + m\omega_1 + n\omega_2$, $j=0, 1, \dots, k-1$, $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; D_{mn}^j — конечная односвязная область, ограниченная контуром L_{mn}^j , $\alpha_j \in D_{mn}^j$; $L = \bigcup_{m,n,j} L_{mn}^j$. Совокупность всех L_{mn}^j в пределах параллелограмма периодов $ABCD$ обозначим через l_{mn} .

Предположим, что в конгруэнтных точках границы задана одинаковая, самоуравновешенная на каждом из L_{mn}^j нагрузка, а в решетке действуют средние напряжения σ_1, σ_2, τ . Задача заключается в определении упругого равновесия описанной решетки под действием заданной системы сил.

Наряду с плоскостью комплексного переменного z введем две вспомогательные плоскости z_1 и z_2 , связанные с z аффинным соответствием $z_v = x + \mu_v y$, $v=1, 2$. Обозначим области и контуры в плоскостях z_1 и z_2 через $D^1, D_{mn}^{j,1}, L_{mn}^{j,1}, l_{mn}^1$ и $D^2, D_{mn}^{j,2}, L_{mn}^{j,2}, l_{mn}^2$ соответственно.

Тогда решение первой основной задачи для решетки сводится к определению двух функций $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$, регулярных соответственно в D^1 и D^2 и удовлетворяющих на L краевому условию, которое, следуя [3], запишем в виде

$$(1.1) \quad a\varphi_1(t_1) + \overline{b\varphi_1(t_1)} + \varphi_2(t_2) = F(t) + E_{mn}^j$$

$$a = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}, \quad b = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}, \quad F(t) = \frac{(1 - i\bar{\mu}_2)f(t) - (1 + i\bar{\mu}_2)\overline{f(t)}}{2i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)}$$

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds, \quad E_{mn}^j = \frac{(1 - i\bar{\mu}_2)C_{mn}^j - (1 + i\bar{\mu}_2)\overline{C_{mn}^j}}{2i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)}$$

C_{mn}^j — комплексные постоянные, причем $C_{00}^0 = 0$; $t \in L$.

Из геометрии решетки и характера внешней нагрузки следует, что напряжения в решетке — двоякопериодические функции, поэтому $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ должны быть квазипериодическими функциями.

Обобщая представления для $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ [2] на группу из k -отверстий в пределах параллелограмма периодов, запишем их в виде

$$(1.2) \quad \varphi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}^1} \omega(t) [\zeta(t_1 - z_1) - \zeta(t_1) + \zeta(z_1)] dt_1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} \zeta(z_1 - \alpha_{j1}) + Az_1$$

$$\varphi_2(z_2) = -\frac{a}{2\pi i} \int_{l_{00}^2} \omega(t) [\zeta(t_2 - z_2) - \zeta(t_2) + \zeta(z_2)] dt_2 +$$

$$+ \frac{b}{2\pi i} \int_{l_{00}^2} \overline{\omega(t)} [\zeta(t_2 - z_2) - \zeta(t_2) + \zeta(z_2)] dt_2 - \gamma_2 \zeta(z_2) + Bz_2$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}^1} \omega(t) dt_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}^2} [\overline{b\omega(t)} - a\omega(t)] dt_2$$

$$b_{0,1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}^{0,1}} [\overline{\omega(t)} dt_1 - \overline{\omega(t)} dt_1] - \gamma_1$$

$$b_{j1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\omega_j^1}} [\omega(t) \overline{dt_1} - \overline{\omega(t)} dt_1], \quad (j=1, 2, \dots, k-1)$$

$$l_{00}^1 = \bigcup_j L_{00}^{j1}, \quad l_{00}^2 = \bigcup_j L_{00}^{j2}, \quad \alpha_{j1} \in D_{00}^{j1}, \quad \alpha_{j2} \in D_{00}^{j2}, \quad \alpha_{01} = \alpha_{02} = 0$$

Постоянные A и B , входящие в представления (1.2), определяются из статических условий. Выражая компоненты главного вектора усилий, действующих на гранях AB и BC параллелограмма периодов (фиг. 1), через приращения функций $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ при переходе от точки z к конгруэнтной ей точке $z + \omega_j$ ($j=1, 2$), приходим к системе уравнений относительно постоянных A и B

$$(1.3) \quad \operatorname{Re}(A+B) = \frac{\sigma_2}{2} \sin \psi - \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} \left(\delta_1^1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \gamma_2 \delta_1^2 \right)$$

$$\operatorname{Re}(\mu_1 A + \mu_2 B) = -\frac{1}{2} (\tau + \sigma_2 \cos \psi) - \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} \left(\mu_1 \delta_1^1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \mu_2 \gamma_2 \delta_1^2 \right)$$

$$\operatorname{Re}(\mu_1 A \omega_2^1 + \mu_2 B \omega_2^2) = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \tau \cos \psi) |\omega_2| -$$

$$- \operatorname{Re} \left(\mu_1 \delta_2^1 \sum_{j=1}^{k-1} b_{j1} - \mu_2 \gamma_2 \delta_2^2 \right)$$

$$\operatorname{Re}(A \omega_2^1 + B \omega_2^2) = -\frac{1}{2} \tau |\omega_2| \sin \psi - \operatorname{Re} \left(\delta_2^1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \gamma_2 \delta_2^2 \right)$$

Здесь ω_1^1, ω_2^1 и ω_1^2, ω_2^2 — основные периоды решетки в плоскостях z_1 и z_2 соответственно; $\omega_1^j = \omega_1, \psi = \arg \omega_2, \omega_2^j = \operatorname{Re} \omega_2 + \mu_j \operatorname{Im} \omega_2; \delta_k^j = \xi(z_j + \omega_k^j) - \xi(z_j), j, k=1, 2$.

Решение (1.3) представим в следующем виде:

$$(1.4) \quad A = i\beta_1 K_0 + K_1 + K_2, \quad B = i\beta_2 K_0 + K_1^* + K_2^*$$

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \gamma_2 \right) = -(\gamma_1 + \gamma_2) = 0$$

где K_0 — некоторая вещественная константа, не влияющая на напряженное состояние в решетке, K_1 и K_1^* — функционалы, а K_2 и K_2^* — константы, учитывающие заданные средние напряжения.

Выражения для постоянных β_j, K_j, K_j^* зависят от соотношения параметров μ_1 и μ_2 . Ниже приведены значения указанных констант для одного из двух возможных случаев: $\mu_1' = \mu_2'$

$$(1.5) \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\mu_1'' / \mu_2''$$

$$K_1 = \frac{1}{\mu_2''' - \mu_1'''} [\Delta_3 - 2\mu_1' \Delta_2 + |\mu_2|^2 \Delta_1]$$

$$K_1^* = -\frac{1}{\mu_2''' - \mu_1'''} [\Delta_3 - 2\mu_1' \Delta_2 + |\mu_1|^2 \Delta_1] + \frac{i}{\mu_2''} (\mu_1' \Delta_1 - \Delta_2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu_2'' - \mu_1''')} [\sigma_x^\circ + 2\mu_1' \tau_{xy}^\circ + |\mu_2|^2 \sigma_y^\circ]$$

$$K_2^* = -\frac{1}{2(\mu_2'' - \mu_1''')} [\sigma_x^\circ + 2\mu_1' \tau_{xy}^\circ + |\mu_1|^2 \sigma_y^\circ] + \frac{i}{2\mu_2''} (\mu_1' \sigma_y^\circ + \tau_{xy}^\circ)$$

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} \left(\delta_1^4 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \gamma_2 \delta_1^2 \right), \quad \Delta_2 = -\frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} \left(\mu_1 \delta_1^4 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \mu_2 \gamma_2 \delta_1^2 \right)$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{\omega_1} \left\{ \operatorname{Re} \left(\mu_1^2 \delta_1^4 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \mu_2^2 \gamma_2 \delta_1^2 \right) + \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Im} \left(\mu_1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \mu_2 \gamma_2 \right) \right\}$$

$\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \tau_{xy}^\circ$ — средние напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных к осям координат; $\mu_j' = \operatorname{Re} \mu_j, \mu_j'' = \operatorname{Im} \mu_j$ ($j=1, 2$). Третье равенство в соотношениях (1.4) выражает условие равенства нулю главного момента внешних сил, приложенных к решетке.

2. Переходя в представлениях (1.2) к предельным значениям по формулам Сохоцкого — Племеля и подставляя последние в краевое условие (1.1), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно плотности $\omega(t)$

$$(2.1) \quad \overline{\omega(t_0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \overline{\omega(t)} d \ln \frac{\overline{\sigma(t_1 - t_{10})} \sigma(t_2)}{\sigma(t_2 - t_{20}) \overline{\sigma(t_1)}} +$$

$$+ \frac{a}{b} \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \omega(t) d \ln \frac{\sigma(t_1 - t_{10}) \sigma(t_2)}{\sigma(t_2 - t_{20}) \sigma(t_1)} + M[\omega(t), t_0] = F^*(t_0) + F_{mn}^j$$

$$M[\omega(t), t_0] = \frac{a}{b} \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} \zeta(t_{10} - \alpha_{j1}) + \gamma_1 \zeta(t_{10}) \right] + \overline{\gamma_1 \zeta(t_{10})} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \overline{b_{j1} \zeta(t_{10} - \alpha_{j1})} + \frac{2}{\mu_1 - \mu_2} [(\Delta_2 - \mu_2 \Delta_1) \operatorname{Re} t_0 + (\Delta_3 - \mu_2 \Delta_2) \operatorname{Im} t_0]$$

$$F^*(t_0) = \frac{1}{b} F(t_0) + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [(\tau_{xy}^\circ + \mu_2 \sigma_y^\circ) \operatorname{Re} t_0 - (\sigma_x^\circ + \mu_2 \tau_{xy}^\circ) \operatorname{Im} t_0]$$

$$F_{mn}^j = \frac{1}{b} \left\{ E_{mn}^j - (aAP^1 + b\bar{A}\bar{P}^1 + BP^2) - a(m\delta_1^4 + n\delta_2^4) \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1} - \right.$$

$$\left. - b(m\delta_1^4 + n\delta_2^4) \sum_{j=0}^{k-1} \overline{b_{j1} + \gamma_2 (m\delta_1^2 + n\delta_2^2)} \right\}$$

$\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса.

Величины F_{mn}^j определены в (1.1) через константы C_{mn}^j . Последние могут быть выражены через C_{00}^j из условия инвариантности интегрального уравнения (2.1) относительно контуров l_{mn} ($m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$(2.2) \quad F_{mn}^j = F_{mn}^j = \frac{(1 - i\mu_2) C_{00}^j - (1 + i\mu_2) \bar{C}_{00}^j}{2i(\mu_2 - \bar{\mu}_2)}$$

Из (2.2) находим

$$(2.3) \quad C_{mn}^j = C_{00}^j - im\omega_1(\tau_{xy}^\circ + i\sigma_y^\circ) + in|\omega_2|[(\sigma_x^\circ \sin \psi - \tau_{xy}^\circ \cos \psi) + i(\tau_{xy}^\circ \sin \psi - \sigma_y^\circ \cos \psi)] \quad (j=0, 1, \dots, k-1)$$

Если средние напряжения в решетке равны нулю, имеем

$$(2.4) \quad C_{mn}^j = C_{00}^j \quad (m, n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Константы C_{00}^j , как это видно из (2.2), входят в правую часть интегрального уравнения (2.1). Следуя [3], зададим их в виде функционалов

$$(2.5) \quad C_{00}^j = \int_{L_{00}^{j1}} \omega(t) ds^1$$

Здесь ds^1 — элемент дуги контура L_{00}^{j1} .

3. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), т. е. положим $F^*(t_0) = 0$.

Легко показать, что это равенство является необходимым и достаточным условием обращения в нуль внешней нагрузки.

Пусть $\omega_0(t)$ — решение однородного интегрального уравнения. Обозначим функции (1.2), соответствующие этому решению, через $\varphi_1^\circ(z_1)$ и $\varphi_2^\circ(z_2)$. Очевидно, что последние должны удовлетворять краевому условию на l_{mn} , которому можно придать вид

$$(3.1) \quad (1+i\mu_1)\varphi_1^\circ(t_1) + (1+i\bar{\mu}_1)\overline{\varphi_1^\circ(t_1)} + (1+i\mu_2)\varphi_2^\circ(t_2) + (1+i\bar{\mu}_2)\overline{\varphi_2^\circ(t_2)} = C_{mn}^{*j} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j = 0, 1, \dots, k-1)$$

где постоянные C_{mn}^{*j} в данном случае определяются соотношениями (2.4) и (2.5).

При этом все C_{00}^* совпадают, а так как по условию $C_{00}^{*0} = 0$, то имеем

$$(3.2) \quad \int_{L_{00}^j} \omega_0(t) ds^1 = 0 \quad (j=0, 1, \dots, k-1)$$

Решение краевой задачи, соответствующей нулевой внешней нагрузке, известно и имеет вид

$$(3.3) \quad \varphi_1^\circ(z_1) = i\beta_1 C^\circ z_1 + D_1, \quad \varphi_2^\circ(z_2) = i\beta_2 C^\circ z_2 + D_2$$

Здесь C° — некоторая вещественная, а D_1 и D_2 — комплексные постоянные; β_1 и β_2 определяются соотношениями вида (1.5).

Вычислим приращения, получаемые при переходе от точки z к конгруэнтной точке $z + \omega_j$ ($j=1, 2$) функциями $\varphi_1^\circ(z_1)$ и $\varphi_2^\circ(z_2)$, определенными формулами (3.3) и (1.2). Приравнивая соответствующие приращения, найдем

$$(3.4) \quad i\beta_1 \omega_1 (C^\circ - K_0^\circ) = \delta_1^1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^\circ + K_1^\circ \omega_1$$

$$i\beta_1 \omega_2^1 (C^\circ - K_0^\circ) = \delta_2^1 \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^\circ + K_1^\circ \omega_2^1$$

$$i\beta_2 \omega_1 (C^\circ - K_0^\circ) = -\gamma_2^\circ \delta_1^{*0} + K_1^{*0} \omega_1, \quad i\beta_2 \omega_2^2 (C^\circ - K_0^\circ) = -\gamma_2^\circ \delta_2^{*0} + K_1^{*0} \omega_2^2$$

Из равенств (3.4), используя соотношение Лежандра $\delta_1^k \omega_2^k - \delta_2^k \omega_1^k = 2\pi i$, находим

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^{\circ} = 0, \quad \gamma_2^{\circ} = 0$$

Тогда из (1.5) получаем $\Delta_1^{\circ} = \Delta_2^{\circ} = \Delta_3^{\circ} = 0$, $K_1^{\circ} = K_1^{*\circ} = 0$. Далее в силу соотношений (3.4), (1.4), (3.5) и (1.2) имеем

$$K_0^{\circ} = C^{\circ}, \quad \gamma_1^{\circ} = 0, \quad \int_{L_{\omega^1}} (\omega_0(t) \overline{dt_1} - \overline{\omega_0(t)} dt_1) = 0$$

Приравнявая теперь правые части представлений (3.3) и (1.2) для функций $\varphi_1^{\circ}(z_1)$ и $\varphi_2^{\circ}(z_2)$, получим [1]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\omega^1}} \left\{ \omega_0(t) - D_1 + \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^{\circ} \zeta(t_1 - \alpha_{j1}) \right\} [\zeta(t_1 - z_1) - \overline{\zeta(t_1)}] dt_1 = 0 \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\omega^2}} \{ b \overline{\omega_0(t)} - a \omega_0(t) - D_2 \} [\zeta(t_2 - z_2) - \overline{\zeta(t_2)}] dt_2 = 0 \\ & (z_1 \in D^1, z_2 \in D^2) \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что функции

$$(3.6) \quad i\chi_1(t_1) = \omega_0(t) - D_1 + \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^{\circ} \zeta(t_1 - \alpha_{j1}), \quad i\chi_2(t_2) = \overline{b\omega_0(t)} - a\omega_0(t) - D_2$$

являются предельными значениями регулярных соответственно в областях D^1 и D^2 ($j=0, 1, \dots, k-1$) функций.

Исключая $\omega_0(t)$ из (3.6), найдем

$$\begin{aligned} (3.7) \quad & (1+i\mu_1)\chi_1(t_1) + (1+i\bar{\mu}_1)\overline{\chi_1(t_1)} + (1+i\mu_2)\chi_2(t_2) + (1+i\bar{\mu}_2)\overline{\chi_2(t_2)} + \\ & + i(1+i\mu_1) \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^{\circ} \zeta(t_1 - \alpha_{j1}) - i(1+i\bar{\mu}_1) \sum_{j=0}^{k-1} b_{j1}^{\circ} \overline{\zeta(t_1 - \alpha_{j1})} = \\ & = i(1+i\mu_1)D_1 - i(1+i\bar{\mu}_1)\bar{D}_1 + i(1+i\mu_2)D_2 - i(1+i\bar{\mu}_2)\bar{D}_2, \quad i \in L_{\omega_0^j} \end{aligned}$$

Умножая обе части (3.7) на \overline{dt} и интегрируя по каждой из кривых $L_{\omega_0^j}$, получим $b_{j1}^{\circ} = 0$ ($j=0, 1, 2, \dots, k-1$).

Равенство (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} & (1+i\mu_1)\chi_1(t_1) + (1+i\bar{\mu}_1)\overline{\chi_1(t_1)} + (1+i\mu_2)\chi_2(t_2) + (1+i\bar{\mu}_2)\overline{\chi_2(t_2)} = \\ & = i(1+i\mu_1)D_1 - i(1+i\bar{\mu}_1)\bar{D}_1 + i(1+i\mu_2)D_2 - i(1+i\bar{\mu}_2)\bar{D}_2 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции $\chi_1(z_1)$ и $\chi_2(z_2)$ дают решение задачи теории упругости в каждой из областей D_{mn}^j при нулевых внешних силах на границе L_{mn}^j и, следовательно, должны иметь вид

$$(3.8) \quad \chi_1(z_1) = i\beta_1 C_j^* z_1 + D_{1j}^*, \quad \chi_2(z_2) = i\beta_2 C_j^* z_2 + D_{2j}^*$$

где C_j^* — вещественная, а D_{1j}^* и D_{2j}^* — комплексные постоянные.

Приравнивая правые части в выражениях для $\chi_1(z_1)$ из (3.6) и (3.8), получаем, имея в виду, что $b_{j1}^0=0$

$$(3.9) \quad \omega_0(t) = -\beta_1 C_j^* t_1 + D_{1j} + i D_{1j}^*$$

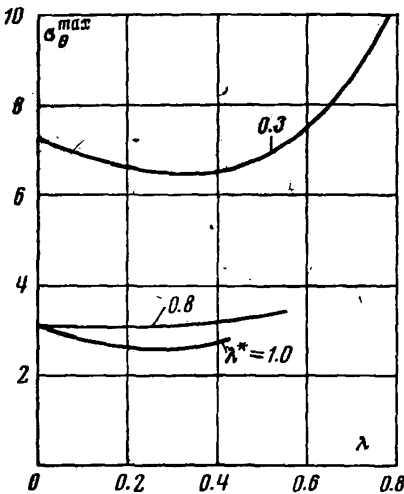
Учитывая (1.2) и равенство $b_{j1}^0=0$, имеем

$$\int_{L_{00}}^{j_1} [\omega_0(t) \overline{dt_1} - \overline{\omega_0(t)} dt_1] = 0 \quad (j=0, 1, \dots, k-1)$$

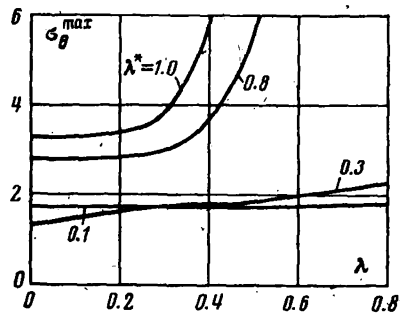
Отсюда, подставляя выражение для $\omega_0(t)$ из (3.9), находим $C_j^*=0$ ($j=0, 1, \dots, k-1$). Наконец, подставляя $\omega_0(t)$ из (3.9) в формулу (3.2) и учитывая, что $C_j^*=0$, получим $D_{1j} + i D_{1j}^*=0$.

Таким образом $\omega_0(t) \equiv 0$ и, следовательно, интегральное уравнение (2.1) имеет единственное решение.

4. Ниже для примера даны некоторые результаты расчетов. Вычисления проводились на ЭЦВМ М-20 в следующем порядке. Интегралы, входящие в уравнение (2.1), заменялись интегральными суммами. После этого удовлетворяя граничным значениям в N различных точках контура L_{00} , получали систему линейных алгебраических уравнений для определения $\omega(t_j)$, $j=1, 2, \dots, N$. По известным значениям $\omega(t_j)$ составля-



Фиг. 2



Фиг. 3

ли интерполяционный многочлен и вычисляли значения функций $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ и их производных. Это давало возможность (по известным формулам [4]) определять напряжения и смещения в решетке.

Сравнение приближенного решения интегрального уравнения с точным его решением для пластинки из текстолита с одним круговым отверстием (предельный случай $\omega_1 \rightarrow \infty, \omega_2 \rightarrow \infty$) показало, что относительная погрешность не превышает десятых долей процента. Относительная погрешность при вычислении напряжений не превосходила 0.5%.

На фиг. 2 даны графики $(\sigma_\theta)_{\max} = \sigma_\theta / \sigma_0$ для прямоугольной решетки ($\omega_1=2, \omega_2=i$) из текстолита ($E_1=0.960 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2=0.683 \cdot 10^5$ кг/см², $G=0.283 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu_1=0.328$) с одним эллиптическим отверстием в пределах параллелограмма периодов при одноосном растяжении ($\sigma_y^0=1, \sigma_x^0=\tau_{xy}^0=0$) в зависимости от параметра $\lambda=2a^*/\omega_1$ и для различного отношения $\lambda^*=b^*/a^*$ полуосей эллипса. Контур отверстия предполагался свободными от внешних сил.

На фиг. 3 для той же решетки приводятся графики $(\sigma_\theta)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\theta=\pi/2}$ при одноосном растяжении вдоль оси x ($\sigma_x^0=1, \sigma_y^0=\tau_{xy}^0=0$).

При значениях параметра λ^* , равных 1 и 0,8, с увеличением относительных размеров отверстий происходит сближение последних вдоль оси y . Вследствие этого напряжение $(\sigma_\theta)_{\max}$, соответствующее указанным значениям параметра λ^* при одноосном растяжении вдоль оси x , неограниченно возрастает с увеличением параметра λ .

При $\lambda^*=0,3$ напряжение $(\sigma_\theta)_{\max}$ также неограниченно возрастает, но при растяжении вдоль оси y . В этом случае сближение отверстий с увеличением их размеров происходит в направлении оси x . В остальных случаях сближение отверстий происходит в направлении растягивающей нагрузки, и поэтому увеличение размеров отверстий не сказывается существенно на величине $(\sigma_\theta)_{\max}$.

Отметим также, что λ_{\max} является функцией параметра λ^* . Для рассматриваемых случаев имеем следующее соответствие между указанными величинами: для $\lambda^*=1-\lambda_{\max}=0,5$, для $\lambda^*=0,8-\lambda_{\max}=0,625$, для $\lambda^*=0,3$ и $\lambda^*=0,1-\lambda_{\max}=1$.

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильштинский Л. А. Двойкопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. Григoliaк Э. И., Кац В. Е., Фильштинский Л. А. Двойкопериодическая задача теории упругости для плоской анизотропной среды. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
3. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
4. Дезницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.