КАНОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДОПУСТИМЫХ МЕР

Малютин Г.К., профессор, Козлова И.И., аспирант, СумГУ, г. Сумы

В теории субгармонических функций часто возникает следующая задача: по заданной мере построить субгармоническую функцию, мера которой в точности совпадает с заданной мерой. Классические формулы Вейерштрасса, Адамара дают представление целых функций конечного порядка, нули которых совпадают с заданной последовательностью. Эти формулы были обобщены в работах Рубела [1], Хабибуллина [2, 3], Малютина и Герасименко [4] и др. Целью настоящей работы является получить аналогичные формулы для мер конечного - типа, распределенных в верхней полуплоскости +. Основным инструментом работы является метод рядов Фурье, развитый в работах Рубела и Тейлора для мероморфных функций, и распространенный К.Г. Малютиным на дельта-субгармонические функции в полуплоскости [5].

Мы вводим понятие канонической функции меры конечного - типа, распределенной в верхней полуплоскости, которая в случае дискретной меры совпадает с определением канонического произведения Неванлинны, построенного по нулям функции, аналитической в верхней полуплоскости.

В работе было введено следующее определение. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ - некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r;\lambda,\alpha) = r^k\big(\alpha_k + S_+(r;k)\big) - S'_+(r;k),\ k \in N, \tag{1}$$

называются коэффициентами Фурье пары (λ,α).

Пара (λ,α) называется γ - допустимой, если мера имеет λ конечную _ плотность и существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|c_k(r;\lambda,\alpha)| \le A\gamma(Br),\quad r > 0,\ k \in N. \tag{2}$$

Мы введем понятие коэффициентов Фурье меры, которое не зависит от выбора последовательности чисел α , а зависит только от самой меры.

Пусть γ _ функция роста. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in N$ $\lim_{r\to\infty}\inf\gamma(r)r^{-p} > 0,$ и $p[\gamma] = \min\{p : p \in N, \lim_{r\to\infty}\inf\gamma(r)r^{-p} > 0\}$, в противном случае.

Для $1 \le k < p[\gamma]$ обозначим через $r'_k = \inf r_k$, где нижняя грань берётся по всем r_k , для которых неравенство

$$\frac{\gamma(Br_k)}{r_k^k} \le 2\,\frac{\gamma(Br)}{r^k} \tag{3}$$

выполняется для всех $r > 0$. Для этих k определим

$$\alpha_k = -S_+(r'_k;k). \tag{4}$$

Если $p[\gamma] < \infty$, то по определению $p[\gamma]$ существует последовательность $\{r_j\}, r_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\gamma(Br_j)r_j^{-p[\gamma]} = 0. \tag{5}$$

По предположению имеем $|S_+(r_m, r_j;k)| \le \frac{A\gamma(Br_m)}{r_k^k} + \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k}.$

Из [4] следует фундаментальность последовательности $\{S_+(\eta_j;k)\}$ для $k \geq p[\gamma]$. Тогда для $k \geq p[\gamma]$ положим

$$\alpha_k = -\lim_{j\to\infty} S(\eta_j;k). \qquad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть мера $\lambda\gamma$ - допустима. И пусть в определении (1) в качестве последовательности взяты числа, определяемые формулой (4), с заменой η_k на η_k', и формулой (6). Тогда коэффициенты Фурье пары λ называются коэффициентами Фурье меры (соответствующими функции роста $\gamma(r)$).

Введем теперь понятие канонической функции - допустимой меры . Пусть $c_k(r) = c_k(r;\lambda)$ - коэффициенты Фурье меры . Положим

$$\Phi(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho)\sin k\varphi.$$

Для $\rho > 0$ полагаем

$$P_\rho(z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{C_+(0,\rho)} K(z,\zeta)d\lambda(\zeta), \quad a_\rho(z) = \frac{\rho}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial G(z,\rho e^{i\varphi})}{\partial n}\Phi(\rho e^{i\varphi})d\varphi,$$

$$v_\rho(z) = a_\rho(z) + P_\rho(z),$$

где G - функция Грина полукруга $C_+(0,\rho)$.

Положим теперь $v(z) = v_\rho(z)$ при $|z| < \rho$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $v(z)$ называется канонической функцией меры λ .

ТЕОРЕМА 1. Каноническая функция γ - допустимой меры λ принадлежит классу , ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры λ , а ее полная мера совпадает с мерой λ .

Список литературы

1. L.A. Rubel, Современные проблемы теории аналитических функций, Наука, М., 1966.

2. Б.Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, Матем. сб., 198(2), 2007, 121-160.

3. Б.Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты. II. Целые функции”, Матем. сб., 200(2), 2009, 129-158.

4. К. Г. Малютин, В. А. Герасименко, “Обобщенные канонические произведения в комплексной плоскости”, Вестник Харьковского университета, "Матем., прикл. матем. и механика"', 57(790), 2007, 198-205.

5. К. Г. Малютин, “Ряды Фурье и дельта-субгармонические функции конечного гамма-типа в полуплоскости”, Матем. сб., 192(6), 2001, 51-70.