УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННЫМ РЕШЕНИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Фильштинский[1], ***Л. А. Фильштинский***[2]

ABOUT ONE APPROACH TO APPROXIMATE SOLUTIONS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Filshtinsky V. A., Filshtinsky L. A.

A heuristic method has been offered to get approximations of exact solutions of functional equations. The method is illustrated with numerous examples from various fields.

Введение

В работе предложен симбиоз функционально-аналитических методов приближенного решения разных классов задач и искусства исследователя. По существу, предлагается искать решение задачи — некоторую функцию — по набору ее характеристик. Выбор этих характеристик находится в руках исследователя. Достаточное количество характеристик определяет однозначно решение задачи, малое их количество позволяет с большей легкостью найти, но уже приближенное решение.

Упомянутые характеристики обычно представляют собой значения линейных функционалов, примененных к функции. Типичный пример — равенство двух непрерывных функций, определенных на некотором интервале $[a, b]$:

$$\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta_x[\varphi] = \delta_x[\psi] \forall x \in [a, b],$$

где $\delta_x[f] = f(x)$ — линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $C[a, b]$ [1–3]. Столь широкий набор функционалов определяет однозначно функцию всеми значениями этих функционалов. Более «тощий» набор, но все же достаточный для однозначности, порождает счетный базис функционального пространства [1–3], разумеется, если он существует. Это видно на примере пространства $L^2[a, b]$. Если $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — его ортонормированный базис, например, система многочленов Лежандра на $[a, b]$, то система непрерывных функционалов

$$F_n : f \to \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, dx \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

однозначно определяет f (в смысле пространства $L^2[a, b]$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(f)\varphi_n(x).$$

Конечное множество «идентифицирующих» функционалов обычно позволяет найти лишь приближенное выражение для $f(x)$.

1. О приближенном равенстве элементов функциональных пространств

В задаче аппроксимации функции $f(x)$ необходимо задать аппроксимирующее множество W и способ измерения расстояния между аппроксимируемым и аппроксимирующим элементами [4,5]. Указать способ измерения расстояния означает, что имеется некоторое функциональное банахово пространство

[1]Фильштинский Вадим Аншелович, канд. физ.-мат. наук, доцент Сумского государственного университета, Украина.

[2]Фильштинский Леонид Аншелович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Сумского государственного университета, Украина.

B и что $f \in B$, $W \subset B$, а если $\varphi \in W$, то расстояние находится как норма разности [4, 5]

$$d(f, \varphi) = \|f - \varphi\|_B.$$

Задача аппроксимации состоит в минимизации $d(f, \varphi)$, когда φ пробегает W, и отыскании (если он существует) наименее уклоняющегося элемента $\varphi^0 \in W : \inf\{\|f - \varphi\| : \varphi \in W\} = \|f - \varphi^0\|$.

Уже в случае, когда W — конечномерное подпространство пространства B, эта задача (за исключением ситуации гильбертова пространства) необыкновенно сложна. Известны лишь отдельные примеры точного решения [4, 5]. Численные методы приближенного вычисления φ^0 обычно весьма трудоемки, потому часто используют разнообразные методы аппроксимации, когда находят элемент φ^*, не совпадающий с φ^0, но достаточно хорошо аппроксимирующий f.

Задача резко усложняется, если функция f не задана явно, а представляет собой решение некоторого функционального уравнения (обыкновенного дифференциального, в частных производных, интегрального и т.п.). Во многих случаях хорошо «работают» эвристические методы, например, метод К. Ланцоша [6]. Заметим, что В. К. Дзядык [7] и представители его школы разработали А-метод, в котором даются оценки погрешности многочленной аппроксимации решения функционального уравнения.

В пространстве B для любых $g \in B$ [3]

$$\|g\| = \sup\{\langle F, g\rangle : F \in B^*, \|F\|_{B^*} \leqslant 1\},$$

где $\langle F, g\rangle$ — значение функционала F на элементе g); B^* — сопряженное пространство (состоящее из линейных непрерывных функционалов. В частности,

$$\begin{aligned} E_W(f) &= \inf_{\varphi \in W} \|f - \varphi\| = \\ &= \inf_{\varphi \in W} \sup_{F \in B^*, \|F\| \leqslant 1} |\langle F, f - \varphi\rangle|. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Равенство (1.1) служит основой методов перехода к двойственным задачам как в общем случае [1–3], так и в случаях конкретных пространств B. Если в (1.1) использовать не все элементы единичного шара сопряженного пространства, то очевидна оценка

$$E_W(f) \geqslant \inf_{\varphi \in W} \sup_{F \in V} |\langle F, f - \varphi\rangle|, \quad V \subset S^*,$$

где $S^* = \{F \in B^* : \|F\| \leqslant 1\}$. Но более важно другое: возникает идея об ином способе измерения погрешности, подкрепленная кроме (1.1) следующим соображением.

Пусть $\varphi, \psi \in B$, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — система линейных непрерывных функционалов из B^*; A — множество индексов. Назовем элементы φ и ψ равными относительно семейства функционалов $\{F_\alpha\}$ ($\{F_\alpha\}$-равными), если

$$F_\alpha(\varphi) = F_\alpha(\psi), \quad \forall \alpha \in A.$$

Например, можно считать, что $\varphi(x) = \psi(x)$ относительно моментных функционалов F_n:

$$F_n : \varphi \to \int_a^b x^n \varphi(x)\, dx, \quad n = \overline{0, N},$$

и тогда

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \psi(x)(\{F_\alpha\}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_a^b x^n \varphi(x)\, dx = \int_a^b x^n \psi(x)\, dx, \\ n = \overline{0, N}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

В работе [8] изучены аппроксимационные сплайны $S_m(x)$, определяемые условиями (1.2) со значением N, достаточным для разрешимости соответствующих уравнений.

2. Аппроксимация решений функциональных уравнений

Применительно к аппроксимации функций $y(x)$, определяемых как решения функциональных уравнений, подход остается неизменным. Обратимся к конкретным примерам.

1. В плоской задаче линейной теории упругости напряженное состояние можно определить [9], найдя две аналитические в области S, ограниченной замкнутой кривой L, функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющие граничному условию

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f, \quad |\sigma| = 1, \tag{2.3}$$

где f определяет условия на границе области S, $\omega(\sigma)$ осуществляет конформное отображение области S на единичный круг $|z| \leqslant 1$. Для $S = \{z : |z| \leqslant 1\}$ функция $\omega(z) = z$, а для $S = \{z : |z| \geqslant 1\}$ функция $\omega(z) = z^{-1}$. В случае плоскости с эллиптическим отверстием $\omega(\sigma)\big/\overline{\omega'(\sigma)} = (\sigma^2+m)/\sigma(1-m\sigma^2)$.

Применяя к (2.3) простейшие функционалы

$$F_n:\gamma(\sigma)\to\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta,\qquad \pm n=0,1,\ldots \tag{2.4}$$

в задачах для круга или его внешности и

$$F_n:\gamma(\sigma)\to\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma(e^{i\theta})(1-me^{2i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta,\qquad \pm n=0,1,\ldots$$

в задаче для плоскости с эллиптическим отверстием и представляя функции φ, ψ в виде

$$\varphi(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sigma^{\varepsilon n},\quad \psi(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sigma^{\varepsilon n}$$

($\varepsilon=+1$ для ограниченной области; $\varepsilon=-1$ для неограниченной области), приходим к точному решению.

2. Найдем приближенное решение на участке $0\leqslant x\leqslant 1$ уравнения Бесселя нулевого порядка с начальными условиями $y(1)=y_0$, $y'(1)=y_1$. Определим характеристики (типа моментов) решения $y(x)$. Для этого умножим обе части уравнения Бесселя на некоторую функцию $H(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ и вычислим интеграл от обеих частей на участке [0,1]. После небольших преобразований получим соотношение

$$\int\limits_0^1\big[x^2H''(x)+3xH'(x)+(x^2+1)H(x)\big]y(x)\,dx = H'(1)y_0-H(1)(y_1-y_0).$$

Выбор $H(x)$ может быть произвольным. Положим $H_n(x)=x^n$ $(n=\overline{0,N})$. На самом деле подбор $H(x)$ должен быть продиктован глубокими соображениями, приводящими к хорошим оценкам погрешности аппроксимации. Пока же, желая показать эффективность метода как эвристического, выберем функцию $H(x)$, обеспечивающую простоту вычислений. Итак, функция $y(x)$ должна удовлетворять моментным равенствам

$$\int\limits_0^1\big[x^{n+2}+(n+1)^2x^n\big]\,y(x)\,dx = (n+1)y_0-y_1,\quad n=\overline{0,N}. \tag{2.5}$$

Дальнейшие шаги зависят от способа приближенного представления $y(x)$. Можно принять $y^*(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N$. В общем случае произвольного N из (2.5) получим систему линейных уравнений. Для $N=2$, $y_0=0,76519$, $y_1=-0,44010$ имеем $y^*(x)\approx I_0(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, где

$$y^*(x)=1,00141-0,01406\,x-0,22382\,x^2,$$
$$\max_{[0,1]}|I_0(x)-y^*(x)|=0,00166\ldots$$

Если же в качестве приближения выбрать отрезок степенного ряда функции $I_0(x)$, то для получения погрешности того же порядка придется использовать многочлен четвертой степени. С ростом N эта разница в порядках многочленов растет.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0,$$
$$y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

Вновь умножим обе части уравнения на функцию $H(x)$ и вычислим интеграл на участке $[0,1]$. Моментные соотношения имеют вид

$$\int\limits_0^1\big[H''(x)-(p(x)H(x))'+q(x)H(x)\big]y(x)\,dx = H'(1)$$

при условии $H(0)=0$, $H(1)=0$. Выбор функций $H(x)$ определяет сложность и точность вычисления $y^*(x)$. Пусть, к примеру,

$$p(x)\equiv 0,\quad q(x)\equiv -1.$$

Положим $H_n(x)=(x-1)\,x^n$, $n=1,2,\ldots,N+1$. Если искать приближенное решение $y^*(x)$ в виде многочлена степени N, то при $N=1$, $N=2$

$$y_1^*(x)=-0,0303+0,9836\,x,$$
$$\max_{[0,1]}|y(x)-y_1^*(x)|=0,0467\ldots,$$

$$y_2^*(x) = 0,00793 + 0,75792\,x + 0,22569\,x^2,$$

$$\max_{[0,1]}|y(x) - y_2^*(x)| = 0,0085\ldots$$

Если же положить $H_n(x) = \sin n\pi x$, а $y_N^*(x)$ искать в виде $x + \sum \alpha_n \sin n\pi x$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$, то получим

$$y_N^*(x) = x + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k\pi\,(k^2\pi^2+1)},$$

$$\max_{[0,1]}|y(x) - y_1^*(x)| = 0,0090\ldots,$$

$$\max_{[0,1]}|y(x) - y_2^*(x)| = 0,0038\ldots.$$

Заметим, что во всех случаях наблюдается явление, близкое к чебышевскому альтернансу [4]. Напомним теорему П. Л. Чебышева: среди всех многочленов степени не выше N многочлен $P_N^0(x)$ наименее уклоняется от непрерывной функции $f(x)$в метрике $C[a,\,b]$ тогда и только тогда, когда найдется не менее $n+2-x$ точек $x_k \in [a,\,b]$ таких, что

$$f(x_k) - P_n^0(x_k) = \varepsilon\,(-1)^k \max_{[a,b]}\left|f(x) - P_n^0(x)\right|, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Множество $\{x_k\}_{k=1}^{n+2}$ реализует чебышевский альтернанс. Таким образом, найденные приближения близки к наилучшим.

4. Обратимся к интегральному уравнению для плотности $\rho(s,t)$ теплового потенциала в бесконечной пластине $-\infty < x, y < +\infty$ с трещиной $\xi = \xi(\beta)$, $\eta = \eta(\beta)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$:

$$\int_0^t d\tau \int_0^1 \frac{\rho(\beta,\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\beta = f(s,t), \qquad (2.6)$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, $r^2 = [\xi(s)-\xi(\beta)]^2 + [\eta(s)-\eta(\beta)]^2$; f — известная функция.

Во многих задачах важно изучить поведение $\rho(s,t)$ при малых t. Пусть $t \leqslant T$. В этом случае для $q = \left[4a^2(t-\tau)\right]^{-1}$ имеем $[4a^2T]^{-1} \leqslant q < +\infty$. Найдем приближение экспоненциального ядра

$$e^{-qr^2} \approx \sum_{k=1}^{M} \gamma_k(r) q^{-k}, \quad q \geqslant \left(4a^2T\right)^{-1}, \quad (2.7)$$

требуя на обеих частях равенства (2.7) совпадения функционалов

$$F_{\lambda,i} : \varphi(q) \to \int_0^\infty \varphi(q)\, q^{M+i} e^{-\lambda q}\, dq$$

при $i = 0, 1, \ldots, M-1$. Оптимальный выбор параметра $\lambda \in R, \lambda > 0$ отнесем к численным экспериментам. После применения $F_{\lambda,i}$ к (2.7) получим систему уравнений относительно неизвестных $\gamma_k \lambda^k$

$$\sum_{k=1}^{M} (\gamma_k\lambda^k)(M+i-k)! = (M+i)!\lambda^{M+i+1}(\lambda+r^2)^{-M-i-1}, \quad i = \overline{0, M-1},$$

из которой следует представление

$$\gamma_k\lambda^k = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{kj}\left(\frac{\lambda}{\lambda+r^2}\right)^{M+j}, \quad k = \overline{1, M},$$

где γ_{kj} — постоянные числа.

Положим $v = \lambda/\left(\lambda+r^2\right)$, $m = M-k$.

С учетом (2.7) получим

$$\sum_{j=1}^{M} q^j \left(\sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{M-m,\,j}\,(m+i)!\right) = (M+i)!\,q^{i+1}, \quad i = \overline{0, M-1}.$$

Сравнивая в последнем соотношении коэффициенты при одинаковых степенях q, найдем

$$\sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{M-m,\,j}\,(s+\nu)! = (M+\nu)!\,\delta_{\nu+1,\,j}, \quad j = \overline{1,\,M}; \nu = \overline{0,\,M-1}.$$

Удобнее записать эти соотношения в матричной форме:

$$\left[\frac{(i+j)!}{(M+i)!}\right]_{i,j=0}^{M-1} \cdot \left[\gamma_{M-i,\,j+1}\right]_{i,j=0}^{M-1} = E, \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица порядка $M \times M$.

Из (2.8) определим $\left[\gamma_{M-i,j+1}\right]_{i,j=\overline{0,M-1}}$. С точки зрения вычислений удобнее находить обратную матрицу $[(i+j)!]_{i,j=\overline{0,M-1}}^{-1}$. Умножим ее j-й столбец на $(M+j-1)!$ $\left(j = \overline{1, M}\right)$ для окончательного вычисления матрицы γ.

Подставим приближенное выражение (2.7) в уравнение (2.6) и к обеим частям полученного применим преобразование Лапласа. Пусть плотность $\rho(\beta,t)$ преобразуется в функцию $R(\beta,p)$. Применение преобразования Лапласа (а фактически континуального множества функционалов) позволяет перейти к одномерному интегральному уравнению

$$\int_0^1 R(\beta,p)\sum_{k=1}^{M}\frac{(k-1)!\,(4a^2)^k}{p^k}\times \\ \times\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda^{M+j}\gamma_{kj}}{(\lambda+r^2)^{M+j}}d\beta = L[f](s,p).$$

Будем искать приближение функции $R(\beta,p)$ в виде

$$R(\beta,p)\approx\sum_{l=0}^{L}\beta^l\Phi_l(p),\quad 0\leqslant\beta\leqslant 1, \tag{2.9}$$

исходя из условия совпадения левой и правой частей (2.9) на системе функционалов $\varphi(s)\to\int\limits_0^1\varphi(s)s^\mu\,ds$, $\mu=\overline{0,L}$:

$$\sum_{l=0}^{L}\Phi_l(p)\sum_{k=1}^{M}\frac{(k-1)!(4a^2)^k}{p^k}\times \\ \times\sum_{j=1}^{M}\lambda^{M+j}\gamma_{kj}A_{lj\mu}(s,\lambda) = \\ =\int_0^1 L[f](s,p)s^\mu\,ds,\quad \mu=\overline{0,L},$$

где

$$A_{lj\mu}(s,\lambda)=\int_0^1\int_0^1\frac{\beta^l s^\mu}{(\lambda+r^2)^{M+j}}\,d\beta\,ds.$$

Интегралы $A_{lj\mu}$ можно вычислить известными способами, а решение $\{\Phi_l\}$ полученной системы уравнений подставить в (2.9). Структура приближенного выражения для функции $R(\beta,p)$ такова, что обращение преобразования Лапласа проводится в виде сверток функции $f(s,t)$ с элементарными функциями.

5. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x)+\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x). \tag{2.10}$$

Применим к обеим частям (2.10) функционалы F_α, $\alpha\in A$, где A — некоторое множество индексов,

$$F_\alpha[y]+\int_a^b F_\alpha[K(x,t)](t)\,y(t)\;dt = F_\alpha[f], \\ \alpha\in A.$$

Если мощность множества A недостаточна для однозначного определения $y(x)$, то можно искать приближенное выражение для $y(x)$ в виде

$$y^*(x)=\int_A a(\alpha)\;d\Phi(x,\alpha),$$

где $a(\alpha)$ — Ф-интегрируемая функция [3] для каждой $\Phi(x,\cdot)$ при $x\in[a,b]$; $\Phi(x,\alpha)$ — функция ограниченной вариации на множестве A относительно переменной α при каждом x. Заменяя в (2.10) функцию $y(x)$ ее аппроксимантой $y^*(x)$ и применяя функционалы F_α к (2.10), получим

$$F_\alpha[y^*]+\int_a^b F_\alpha[K(x,t)](t)\,y^*(t)dt = F_\alpha[f], \\ \alpha\in A. \tag{2.11}$$

Переход к уравнению (2.11) эквивалентен переходу к системе линейных уравнений (в случае конечного A) либо к некоторому преобразованию исходного уравнения.

По существу, в этом случае предлагаемый подход эквивалентен методу Б. Г. Галеркина [10]. В методе Б. Г. Галеркина предполагается, что конечное число функций $F_\alpha[K(x,t)]$ составляет часть полной (в некотором функциональном пространстве) системы функций. Однако произвольная конечная система элементов банахова пространства со счетным базисом всегда дополняется до счетной полной системы.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(x,t)\;y(t)\,dt = f(x)$$

и применим к нему систему функционалов $\{F_\nu\}_{|\nu|\leqslant n-1}$

$$F_\nu[y] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_\nu[K(x,t)](t)\,y(t)\,dt = F_\nu[f].$$

Так как имеется конечное число функционалов, то естественно искать решение в виде

$$y_n(x) = \sum_{|\nu|\leqslant n-1} C_\nu \varphi_\nu(x).$$

Можно показать, что для специальных систем $\{\varphi_\nu\}$, функционалов $\Phi = \{F_\nu\}$, таким способом реализуются известные методы наименьших квадратов, проекционные методы, метод квадратур, метод итераций, метод Галеркина и др. [10].

До сих пор ничего не было сказано об оценках погрешностей $\|y - y_n\|$. Пусть Z — некоторый функциональный класс, $f \in Z$. Найдем

$$\mu_n(\varphi_\nu, Z) = \sup_{f\in Z}\|y - y_n\|.$$

Эта величина характеризует целый класс погрешностей (дает точную оценку сверху) относительно фиксированной системы $\{\varphi_\nu\}$ и класса Z правых частей. Рассмотрим частный случай, когда

$$K(x,t) = k(x-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m e^{im(x-t)},$$

где функция $k(u) \in L[0,2\pi]$ и предполагается, что $k_m \neq -1\,\forall\, m$. Выберем

$$\varphi_\nu(x) = \sum_{|r|\leqslant n-1} \varphi_{\nu r} e^{irx},$$

$$F_\nu : \psi \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(x)\,q_\nu(x)\,dx,$$

$$q_\nu(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \lambda_{r\nu} e^{-irx}$$

Пусть $\Lambda = [\lambda_{r\nu}]_{r,\nu\in[-(n-1),n-1]}$. Предположим обратимость матрицы Λ и выберем $\varphi_{\nu r}$ так, чтобы

$$\Lambda^{-1} = [\varphi_{\nu r}(1+k_r)]_{\nu,r\in[-(n-1),n-1]}.$$

Тогда после небольших преобразований можно получить решение

$$y(x) \approx y_n(x) = \\ = \sum_{|r|\leqslant n-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\left(\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \lambda_{kj}\varphi_{jr}\right)\right] e^{irx}. \tag{2.12}$$

Это означает, что $y_n(x)$ представляет собой линейное преобразование правой части $f(x)$.

Найдем μ_n для частного случая. Пусть

$$\varphi_\nu(x) = e^{i\nu x},$$
$$F_\nu : \psi \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(x)\,e^{-i\nu x}\,dx, \tag{2.13}$$
$$y(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu e^{i\nu x},$$

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu e^{i\nu x} \in Z = W^r = \\ = \{f \in C[0,2\pi] : f^{(r-1)} \in AC_{\text{п.в}}[0,2\pi], \\ |f_x^{(r)}| \leqslant 1 \text{ п.в.}\},$$

где $AC_{\text{п.в}}$ — класс почти всюду абсолютно непрерывных функций.

Найдем интегральное представление решений $y(x)$, $y_n(x)$. Из (2.12), (2.13) следует

$$y_\nu = \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} \quad (|\nu| < +\infty);$$

$$c_\nu = \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} \quad (|\nu| \leqslant n-1),$$

поэтому

$$y(x) - y_n(x) = \sum_{|\nu|\geqslant n} \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} e^{i\nu x},$$
$$f_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,e^{-i\nu t}\,dt. \tag{2.14}$$

Известно [11,12] интегральное представление функций $f \in W^r$. Воспользуемся приемом из [11, 12] и применим к интегралу в (2.14) r

раз формулу интегрирования по частям. Получим

$$f_\nu = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{i}{\nu}\right)^r \int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x)\, e^{-i\nu x} dx \quad (\nu \neq 0).$$

Привлекая, кроме того, формулы (2.13), найдем

$$y(x) - y_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma(t)\, D_r(x-t)\, dt,$$

$$\gamma(t) = f^{(r)}(t), \quad |\gamma(t)| \leqslant 1 \text{ п.в.},$$

где ядро

$$D_r(u) = (-i)^r \sum_{|\nu|\geqslant n} \frac{e^{i\nu u}}{\nu^r (k_\nu + 1)}.$$

Положим

$$y(x,f) = y(x), \quad y_n(x,f) = y_n(x),$$

$$\Delta_f(0) = y(0,f) - y_n(0,f) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma(t)\, D_r(-t)\, dt.$$

Выберем функцию $f_0(x) \in W^r$ так, чтобы

$$\gamma_{f_0}(x) \equiv f_0^{(r)}(x) = \operatorname{sign} D_r(-t).$$

В этом случае

$$\Delta_{f_0}(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_r(-t)| dt = \frac{1}{2\pi}\|D_r\|_L.$$

Однако для каждого $f \in Z$

$$|\Delta_f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\gamma(t)||D_r(x-t)|\, dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_r(x-t)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\|D_r\|_L.$$

Следовательно,

$$\mu_n(\varphi_\nu, W^r) = \frac{1}{2\pi}\|D_r\|_L,$$

а «наихудшая» правая часть, когда погрешность $\|y - y_n\|_{c[0,2\pi]}$ является максимальной, такова:

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{f_0}{k_0+1} + \right. \\ \left. +(-i)^r \sum_{|\nu|\geqslant 1} \frac{1}{\nu^r(k_\nu+1)} e^{i\nu(x-t)}\right] \operatorname{sign} D_r(-t)\, dt.$$

Замечание. Оценку погрешности иногда можно улучшить, если усложнить выбор идентифицирующих функционалов, например, положить

$$F_\nu : \psi(x) \to \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(x) T_\nu(x)\, dx,$$

$$\deg T_\nu \leqslant n-1.$$

В этом случае вместо $\|D_r\|_L$ появляется $\|D_r(t) - T(t)\|_L$ с некоторым тригонометрическим многочленом $T(t)$ порядка не выше $n-1$. Поэтому

$$\inf_{\{T_\nu\}} \mu_n(\varphi_\nu, W^r) = \\ = \frac{1}{2\pi} \inf_{T, \deg T \leqslant n-1} \|D_r(t) - T(t)\|_L = \\ = \frac{1}{2\pi} E_n(D_r)_L,$$

где $E_n(D_r)_L$ есть значение наименьшего уклонения ядра D_r от подпространства тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$ в метрике $L[0,2\pi]$. Для многих классов ядер D_r известны условия [4,5,12], когда удается вычислить $E_n(D_r)_L$.

Практически во всех известных случаях

$$E_n(D_r)_L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_r(t) \operatorname{sign}[\sin(nt+\alpha)]\, dt$$

при некотором $0 \leqslant \alpha < \pi$.

Литература

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: ГИФМЛ, 1959. 684 с.
3. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators, part I: General Theory, 1958 (перевод: *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы, общая теория. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 896 с.).
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
6. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. Киев: Наукова думка, 1980. 352 с.
7. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. 1974. Т. 38. № 4. С. 937–967.
8. *Литвинец П. Д., Фильштинский В. А.* Об одной теореме сравнения и ее приложениях // Теория приближения функций и ее приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. С. 97–107.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 696 с.
11. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974. 224 с.
12. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные формулы. М.: Наука, 1976. 320 с.

Статья поступила 25 октября 2003 г.
Сумский государственный университет, Украина