

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНИКИ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается единый подход к решению краевых задач теории упругости и электроупругости для толстой пластины, ослабленной сквозными туннельными трещинами или полостями.

1) Постановка задач.

Рассмотрим упругий слой  $-h \leq \bar{x}_3 \leq h$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ , ослабленный туннельными вдоль оси  $\bar{x}_3$  сквозными полостями-разрезами или полостями-отверстиями, поперечные сечения которых - гладкие разомкнутые дуги или замкнутые контура  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Пусть на границах полостей действует поверхностная нагрузка  $X_n^\pm$  ( $X_n^+ = -X_n^- = X_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ ).

Рассматриваются следующие задачи:

- а) изотропный слой (полуслой) в случае симметричной нагрузки относительно срединной плоскости;
- б) изотропный слой (полуслой) в случае кососимметричной нагрузки;
- в) пьезокерамический слой (полуслой) в случае симметричной нагрузки.

Исходными соотношениями для всех трех случаев являются однородные решения А.И. Лурье [1].

Интегральные представления для входящих в однородные решения функций, построены в [2, 3, 4, 5]. В этих же работах приведены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Выпишем выражения для КИН для изотропного слоя в случае симметричной нагрузки [2].

$$\begin{aligned}
 K_I^\mp - iK_{II}^\mp &= -\frac{\mu\sigma}{\sigma+1} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} (\Omega_1^m(\mp 1) - i\Omega_2^m(\mp 1)) \cos \pi x_3 \\
 K_{III}^\mp &= -\frac{\mu h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_1^m(\mp 1) \sin \pi x_3
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для пьезокерамического слоя возникает дополнительно к (1) электрический коэффициент интенсивности  $K_D$ .

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sqrt{2\pi r} \sigma_n, & K_{II} &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns} \\
 K_{III} &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3}, & K_D &= \sqrt{2\pi r} D_n \quad (r \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{ns}$  и  $\sigma_{n3}$  - нормальные и касательные напряжения,  $D_n$  - нормальная составляющая вектора электрической индукции на площадке с вершиной трещины.

Для характеристики напряженного состояния на поверхности полости-отверстия приведем три компоненты напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta$$

$$\sigma_{\theta z} = -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \quad \theta = \psi - \pi$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{33}$$

где  $\psi$  - угол между нормалью к контуру отверстия и осью  $Ox_1$ .

Ниже приводятся результаты расчетов КИН и характеристические напряжения в зависимости от характеристик материала и геометрии концентраторов напряжений.

В качестве примера рассмотрим пьезокерамический слой (пьезокерамика типа PZT-4), ослабленный туннельным параболическим разрезом  $\xi_1 = p_1 \delta$ ,  $\xi_2 = p_2 \delta^2$  ( $-1 \leq \delta \leq 1$ ) при действии однородного поля  $\sigma_{ij}^\infty = 0$ , на поверхностях разреза допускается нагрузка  $X_n = 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ), на торцах плиты задан электрический потенциал  $\pm V_0$ . На рис. 1 приведен распределение величины  $\langle K_I \rangle = K_I h / (\sqrt{\pi l} V_0 e_{33})$  по "толщинной" координате для различных  $p_2$  и  $h/l$ . Верхние два графика соответствуют трещине ( $p_2 = 0$ ), а нижние два - параболической ( $p_2 = 0,5$ ). Из результатов, приведенных на рисунке следует, что механическое растяжение слоя поперек прямолинейной трещины  $\sigma_{22}^\infty = 15 \text{ н/м}^2$  равносильно электрической нагрузке  $V_0/h \approx 1 \text{ В/м}$  - приложенной к торцам плиты. Расчеты проводились в интервале  $|x_3| \leq 0.9$ .

Рассмотрим слой, ослабленный полостью эллиптического поперечного сечения  $\xi_1 = R_1 \cos \varphi$ ;  $\xi_2 = R_2 \sin \varphi$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Слой деформируется постоянными усилиями  $\sigma_{11}^\infty = P x_3$  - действующими на бесконечности. Кривые 2, (рис. 2) построены для круговой полости ( $R_1 = R_2 = 1$ ) при  $h/R_1 = 1$  и 4 соответственно. Точками нанесены результаты работы [6]. Прямая 1 соответствует результатам прикладной теории [7], прямые 4, 5 получены исходя из соотношений Рейсснера [8].

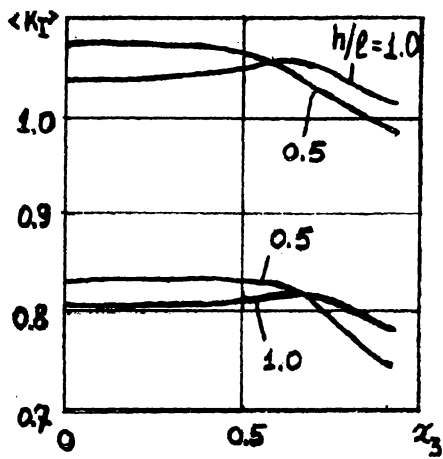


рис. 1

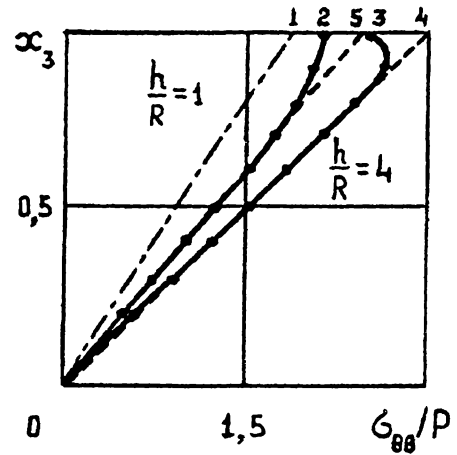


рис. 2

- [1] А.И. Лурье К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. - 1942. - 6, N2/3. - С. 151-169.
- [2] Л.А. Фильштинский Растяжение слоя, ослабленного туннельными разрезами // Прикл. математика и механика. - 1995. - 59, вып. 5. - С. 827-835.
- [3] Э.И. Григолюк, Ю.Д. Ковалев, Л.А. Фильштинский Изгиб слоя, ослабленного сквозными туннельными разрезами // Докл. АН СССР. - 1991. - 317, N1. - С. 51-53.
- [4] Л.А. Фильштинский, В.М. Олейник Краевая задача электроупругости для слоя с туннельными сквозными разрезами // Прикл. механика. - 1991. - 27, N12. - С. 21-26.
- [5] Л.А. Фильштинский, В.М. Олейник Пространственная задача электроупругости для слоя с туннельными трещинами // Физико-химическая механика материалов. - 1991. - 27, N4. - С. 66-72.
- [6] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. - 1970. - 6, вып. 5. - С. 10-17.
- [7] Г.Н. Савин Концентрация напряжений около отверстий. - Н. - Л.: Гостехиздат, 1951. - 494с.
- [8] С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 635с.