МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 539.3:62-50

ОБ УПРАВЛЕНИИ РАЗРУШЕНИЕМ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

ФИЛЬШТИНСКИЙ В. А., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

На примере анизотропной полуплоскости с трещинами-разрезами даются постановки и решения некоторых задач оптимизации коэффициентов интенсивности напряжений, а также потока энергии в вершину трещины. В качестве управления принимается интенсивность нагрузки, действующей на участках границы полуплоскости. По существу отрабатываются подходы к оптимальному (в том или ином смысле) управлению функционалами, отвечающими за разрушение тела внешними полями различной физической природы.

1. Прямая задача. Рассмотрим анизотропную полуплоскость $y\geqslant 0$, ослабленную трещинами-разрезами L_j $(j=1, 2,\ldots, n)$. Пусть к участкам границы полуплоскости U и V приложены соответственно нормальные $P(x)$ и касательные $Q(x)$ распределенные усилия, а берега разрезов свободны от сил. Прямая задача теории упругости заключается в определении характеристик напряженно-деформированного состояния и параметров, регламентирующих разрушение тела в вершине трещины: коэффициентов интенсивности напряжений, потока энергии в вершину и т. п.

Задача, близкая к поставленной выше, рассматривалась в [1]. Ее решение можно представить в виде

$$r_1(t)=\Omega_0(\beta)(1-\beta^2)^{-1/2} \quad (t=t(\beta),\ -1\leqslant\beta\leqslant 1) \tag{1.1}$$

$$\Omega_0(\beta)=\int\limits_U P(x)\Omega_0^{(2)}(\beta,x)\,dx+\int\limits_V Q(x)\Omega_0^{(1)}(\beta,x)\,dx$$

где функции $\Omega_0^{(k)}(\beta, x)$ определяются системой уравнений [1]. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах L_j на основании [2] и (1.1) определяются как линейные функционалы вида

$$K_i^{(j)\pm}=\int\limits_U P(x)f_i^{(j)}(\pm 1,x)\,dx+\int\limits_V Q(x)g_i^{(j)}(\pm 1,x)\,dx \tag{1.2}$$

$$f_i^{(j)}(\pm 1, x)=\operatorname{Im}\{R_i\overline{\Omega_0^{(2)}(\pm 1, x)}\},\quad g_i^{(j)}(\pm 1, x)=\operatorname{Im}\{R_i\overline{\Omega_0^{(1)}(\pm 1, x)}\}$$

$$R_i=\mp 2\sqrt{\pi s'(\pm 1)}\,(\bar\mu_2-\bar\mu_1)(\mu_2-\bar\mu_2)^{-1}\overline{a_1(\psi_c)}a_2(\psi_c+{}^1/{}_2\pi\delta_2{}^i),$$

$$\delta_2{}^1=0,\ \delta_2{}^2=1\ (i=1, 2;\ j=1, 2,\ldots, n)$$

Верхний знак соответствует $c=t(1)=b$, нижний — вершине $c=t(-1)=a$; индекс j у величин $\Omega_0^{(i)}$ и R_i опущен.

Поток энергии в вершину трещины [3] определяется с учетом асимптотики полей напряжений и перемещений в окрестности вершины [2] следующим квадратичным функционалом (по повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование):

$$\begin{gathered} G=Ad_{km}x_kx_m\ (k, m=1, 2),\ \alpha=\mu_1-\bar\mu_2,\ \beta=\mu_2-\mu_1 \\ d_{11}=|\alpha|^2+\operatorname{Re}(\alpha\beta),\ d_{22}=|\alpha|^2-\operatorname{Re}(\alpha\beta),\ d_{12}=d_{21}=-\operatorname{Im}(\alpha\beta) \\ A={}^1/{}_4\pi a_{11}|\mu_2-\mu_1|^2(\operatorname{Im}\mu_2)^{-1},\ \operatorname{Im}\mu_1>0,\ \operatorname{Im}\mu_2>0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$x_m=\int_U P(x)\, r_m(\pm 1, x)\, dx+\int_V Q(x)\, h_m(\pm 1, x)\, dx$$

$$r_1+ir_2=a_1(\psi_c)\Omega_0^{(2)}(\pm 1,\ x),\quad h_1+ih_2=a_1(\psi_c)\Omega_0^{(1)}(\pm 1,\ x)$$

Квадратичная форма (1.3) строго положительно-определенная. Это следует из положительности главных миноров $d_{11}=2\operatorname{Im}\alpha\operatorname{Im}\mu_1>0, d_{11}d_{22}-d_{12}^2=4|\alpha|^2\operatorname{Im}\mu_1\operatorname{Im}\mu_2>0$. Отметим также, что, как следует из (1.2), для фиксированной трещины существуют отличные от нуля распределения $P(x)$ и $Q(x)$, для которых параметры разрушения во всех вершинах L_j равны нулю. В дальнейшем такие нагрузки исключаются из рассмотрения.

2. Оптимизация. При воздействии на конструкцию механических нагрузок или вообще полей различной физической природы все характеристики напряженно-деформированного состояния являются функционалами, определенными на допустимом множестве внешних воздействий. Это позволяет поставить и решить ряд простейших оптимизационных задач, иллюстрирующих возможности управления разрушением за счет внешних полей.

Пусть $\alpha_{ij}^{\pm}\geqslant 0$ заданы. Рассмотрим функционал

$$J(P, Q)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^{+}K_i^{(j)+}+\alpha_{ij}^{-}K_i^{(j)-})\qquad(i=1,2)\tag{2.1}$$

где $K_i^{(j)\pm}$ определены в (1.2), $J: M\to R$, M — пространство кусочно-непрерывных функций.

Введем подпространства (A, B, C, D — заданные функции):

$$M_P=\{P(x)\in M: 2A(x)\leqslant P(x)\leqslant 2B(x),\quad x\in U\}$$

$$M_Q=\{Q(x)\in M: 2C(x)\leqslant Q(x)\leqslant 2D(x),\ x\in V\}$$

Задача A_1. Найти точку $(P^0,\ Q^0)\in M_P\times M_Q$, такую, что $|J(P,\ Q)|\leqslant|J(P^0,\ Q^0)|$, $\forall(P,\ Q)\in M_P\times M_Q$.

Решение. Учитывая (1.2), запишем функционал $J(P,\ Q)$ в виде

$$J(P,Q)=\int_U f(x)P(x)\,dx+\int_V g(x)Q(x)\,dx\tag{2.2}$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^{+}f_i^{(j)}(1,x)+\alpha_{ij}^{-}f_i^{(j)}(-1,x))\qquad(i=1,2)$$

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^{+}g_i^{(j)}(1,x)+\alpha_{ij}^{-}g_i^{(j)}(-1,x))\qquad(i=1,2)$$

Введем функции $P_1(x)=P(x)-(A+B)$, $|P_1(x)|\leqslant B-A=B_1(x)$, $Q_1(x)=Q(x)-(C+D)$, $|Q_1(x)|\leqslant D-C=D_1(x)$. Оценка левой части (2.2) дает

$$|J|\leqslant|\gamma|+\int_U B_1(x)\,|f(x)|\,dx+\int_V D_1(x)\,|g(x)|\,dx$$

$$\gamma=\int_U(A+B)f(x)\,dx+\int_V(C+D)g(x)\,dx\tag{2.3}$$

Точное равенство в (2.3) достигается на функциях $P_1^0(x)=B_1(x)\operatorname{sign}(\gamma f(x))$, $Q_1^0(x)=D_1(x)\operatorname{sign}(\gamma g(x))$. Следовательно, решение имеет вид

$$P^0(x)=A(x)+B(x)+[B(x)-A(x)]\operatorname{sign}(\gamma f(x))\quad(x\in U)$$

$$Q^0(x)=C(x)+D(x)+[D(x)-C(x)]\operatorname{sign}(\gamma g(x))\quad(x\in V)$$

В случае симметричных ограничений $\mathbf{A}=-\mathbf{B}$, $\mathbf{C}=-\mathbf{D}$ в чебышевской метрике $|P(x)|\leqslant 2B$, $|Q(x)|\leqslant 2D$ имеем $P^0(x)=2B(x)\operatorname{sign} f(x)$, $Q^0(x)=2D(x)\operatorname{sign} g(x)$. Аналогичные соображения имеют место и в других функциональных пространствах.

Задача A_2. Максимизировать $|\mathbf{J}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})|$ при ограничениях

$$\|\mathbf{P}\|_{L^p(U)}\leqslant \mathbf{l}_1,\ \|\mathbf{Q}\|_{L^{p'}(V)}\leqslant \mathbf{l}_2\ \ (\mathbf{p},\ \mathbf{p}'>1) \tag{2.4}$$

Решение. К правой части неравенства $|\mathbf{J}(\mathbf{P},\mathbf{Q})|\leqslant \int\limits_U |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\ |\mathbf{P}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}+\int\limits_V |\mathbf{g}(\mathbf{x})|\ |\mathbf{Q}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$ применим неравенство Гельдера [4]. Получим

$$|\mathbf{J}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})|\leqslant \|\mathbf{f}\|_{L^q(U)}\mathbf{l}_1+\|\mathbf{g}\|_{L^{q'}(V)}\mathbf{l}_2\ \ (\mathbf{p}^{-1}+\mathbf{q}^{-1}=1,\ \mathbf{p}'^{-1}+\mathbf{q}'^{-1}=1) \tag{2.5}$$

Точное равенство, как легко проверить, достигается на функциях

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{x})=\mathbf{l}_1\,\|\mathbf{f}\|_{L^q(U)}^{-q/p}\,|\mathbf{f}|^{q-1}\operatorname{sign}\mathbf{f}(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{Q}^0(\mathbf{x})=\mathbf{l}_2\,\|\mathbf{g}\|_{L^{q'}(V)}^{-q'/p'}\,|\mathbf{g}|^{q'-1}\operatorname{sign}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

При этом ограничения (2.4) выполняются. Следовательно, экстремальными являются функции (2.6), $\max|\mathbf{J}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})|=|\mathbf{J}(\mathbf{P}^0,\ \mathbf{Q}^0)|$ дается правой частью неравенства (2.5).

В рассмотренных задачах максимизируется линейная комбинация коэффициентов интенсивности напряжений по всем трещинам при определенных ограничениях на управляющие функции $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Ниже рассмотрим два варианта двойственной задачи, в которых минимизируются «энергетические» затраты на управление при заданной линейной комбинации (2.1).

Задача A_3. Найти (константы γ, δ, c заданы):

$$\min_{(\mathbf{P},\mathbf{Q})\in(I_2)}\left[\gamma\int\limits_U \mathbf{P}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}+\delta\int\limits_V \mathbf{Q}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right]\quad(\gamma\geqslant 0,\ \delta\geqslant 0)$$

$$(I_2)=\{(\mathbf{P},\mathbf{Q}):\mathbf{P}\in L^2(U),\ \mathbf{Q}\in L^2(V),\ \alpha+\beta=\mathbf{c}\} \tag{2.7}$$

$$\alpha=\int\limits_U \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\qquad \beta=\int\limits_V \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Решение. Разложим $L^2(U)$ (соответственно $L^2(V)$) в ортогональную сумму одномерного подпространства с базисом $\{\mathbf{f}\}$ (соответственно $\{\mathbf{g}\}$) и его ортогонального дополнения. Тогда [4]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})=\mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{h},\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})=\mathbf{b}\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{h}^*,\ (\mathbf{f},\ \mathbf{h})=(\mathbf{g},\ \mathbf{h}^*)=0 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{a}\|\mathbf{f}\|^2+\mathbf{b}\|\mathbf{g}\|^2=\mathbf{c},\ \mu(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=\gamma\|\mathbf{P}\|^2+\delta\|\mathbf{Q}\|^2=\gamma(\mathbf{a}^2\|\mathbf{f}\|^2+\|\mathbf{h}\|^2)+$$
$$+\delta(\mathbf{b}^2\|\mathbf{g}\|^2+\|\mathbf{h}^*\|^2)\geqslant\gamma\mathbf{a}^2\|\mathbf{f}\|^2+\delta\mathbf{b}^2\|\mathbf{g}\|^2\ \ (\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2})$$

Отсюда следует, что

$$\min_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})\in(I_2)}\mu(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=\min\Phi(\mathbf{a},\ \mathbf{b}),\ \Phi(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mu(\mathbf{a}\mathbf{f},\ \mathbf{b}\mathbf{g}),\ \mathbf{a}\|\mathbf{f}\|^2+\mathbf{b}\|\mathbf{g}\|^2=\mathbf{c}$$

Таким образом, необходимо найти минимум функции двух переменных $\Phi(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ при наличии связи (2.8). Решение этой элементарной задачи имеет вид

$$\min_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})\in(I_2)}\mu(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=\mu(\mathbf{P}^0,\ \mathbf{Q}^0)=\gamma\delta\mathbf{c}^2\mathbf{D}$$

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{x})=\mathbf{c}\delta\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x})\ (\mathbf{x}\in U),\ \mathbf{Q}^0(\mathbf{x})=\mathbf{c}\gamma\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})\ \ (\mathbf{x}\in V)$$

$$\mathbf{D}=(\delta\|\mathbf{f}\|^2+\gamma\|\mathbf{g}\|^2)^{-1},\ \|\mathbf{f}\|=\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)},\ \|\mathbf{g}\|=\|\mathbf{g}\|_{L^2(V)}$$

Задача A_4. Найти $\min_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})\in(I_\infty)}\{\max\,[\gamma\sup_U|\mathbf{P}(\mathbf{x})|,\ \ \delta\sup_V|\mathbf{Q}(\mathbf{x})|]\}$ $(\gamma,\ \delta\geqslant 0)$, $(I_\infty)=\{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q}):\mathbf{P}\in L^\infty(U),\ \mathbf{Q}\in L^\infty(V),\ \alpha+\beta=\mathbf{c}\}$, где γ, δ, $\mathbf{c}$ — заданные константы.

Решение проведем для случая $\mathbf{c}>0$. Величины α и β определены в (2.7), неравенство Гельдера в этом случае дает $|\alpha|\leqslant\|\mathbf{P}\|_\infty\|\mathbf{f}\|_1$, $|\beta|\leqslant\|\mathbf{Q}\|_\infty$, $\|\mathbf{g}\|_1$ $(\|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|_{L^\infty}, \|\cdot\|_1=\|\cdot\|_{L^1})$.

Следовательно

$$\nu(\mathbf{P}, \mathbf{Q})=\max\{\gamma\|\mathbf{P}\|_\infty, \delta\|\mathbf{Q}\|_\infty\}\geqslant\max\{\gamma_1|\alpha|, \delta_1|\mathbf{c}-\alpha|\}=$$
$$=\nu_1(\alpha),\ \gamma=\gamma_1\|\mathbf{f}\|_1,\ \delta=\delta_1\|\mathbf{g}\|_1$$

Функция $\nu_1(\alpha)\geqslant0$ кусочно линейна, поэтому ее минимальное значение должно достигаться в угловой точке α^0, определяемой равенством $\gamma_1|\alpha^0|=$ $=\delta_1|c-\alpha^0|$. Здесь следует рассмотреть два случая: $\gamma_1=\delta_1$ и $\gamma_1\neq\delta_1$. После соответствующего анализа приходим к результату

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{x})=\alpha^0\operatorname{sign}\mathbf{f}(\mathbf{x})/\|\mathbf{f}\|_1,\quad \mathbf{Q}^0(\mathbf{x})=(\mathbf{c}-\alpha^0)\operatorname{sign}\mathbf{g}(\mathbf{x})/\|\mathbf{g}\|_1$$
$$\min_{(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\in(I_\infty)}\nu(\mathbf{P}, \mathbf{Q})=\nu(\mathbf{P}^0, \mathbf{Q}^0)=\mathbf{c}\gamma\delta(\delta\|\mathbf{f}\|_1+\gamma\|\mathbf{g}\|_1)^{-1}$$
$$\alpha^0=\mathbf{c}\delta_1(\delta_1+\gamma_1)^{-1}$$

Выше рассматривалась линейная комбинация коэффициентов интенсивности, что не давало возможности контролировать условия разрушения в вершине каждой трещины. Между тем представляет интерес создание, например, таких условий когда трещина «запирается» в вершине.

Обозначим

$$\mathbf{K}_1^{(j)+}=\lambda_j,\quad \mathbf{K}_2^{(j)+}=\lambda_{n+j},\quad \mathbf{K}_1^{(j)-}=\lambda_{2n+j},\quad K_2^{(j)-}=\lambda_{3n+j},\quad \mathbf{f}_1^{(j)+}=\mathbf{f}_j,\quad \mathbf{f}_2^{(j)+}=\mathbf{f}_{n+j},$$
$$\mathbf{f}_1^{(j)-}=\mathbf{f}_{2n+j},\quad \mathbf{f}_2^{(j)-}=f_{3n+j}\quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

и положим $\mathbf{Q}(x)=0$. Тогда формулы (1.2) можно представить в виде уравнений связи $\lambda_m=(\mathbf{P}, \mathbf{f}_m)$ $(m=1, 2, \ldots, 4n)$. Будем предполагать, что система $\{\mathbf{f}_m\}$ линейно независима.

Задача B_1. Найти $\min\|\mathbf{P}\|$ на множестве $(\mathrm{I})=\{\mathbf{P}:\mathbf{P}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{U}),\ (\mathbf{P}, \mathbf{f}_m)=$ $=\lambda_m,\ \mathbf{m}=1, 2, \ldots, 4\mathbf{n}\}$. Физически это означает, что необходимо найти такое управление $\mathbf{P}(x)$, при котором коэффициенты интенсивности напряжений принимали бы заданные значения λ_m. При этом норма управления, характеризующая энергетические затраты, должна быть минимальной.

Решение. Разложим $\mathbf{L}^2(\mathbf{U})$ в ортогональную сумму конечномерного подпространства с базисом $\{\mathbf{f}_m\}$ и его ортогонального дополнения. Имеет место представление

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})=\mathbf{c}_m\mathbf{f}_m(\mathbf{x})+\mathbf{h},\ (\mathbf{h}, \mathbf{f}_m)=0\ (\mathbf{m}=1, 2, \ldots, 4\mathbf{n}) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в уравнения связи, приходим к системе линейных уравнений относительно коэффициентов $\mathbf{c}_m$:

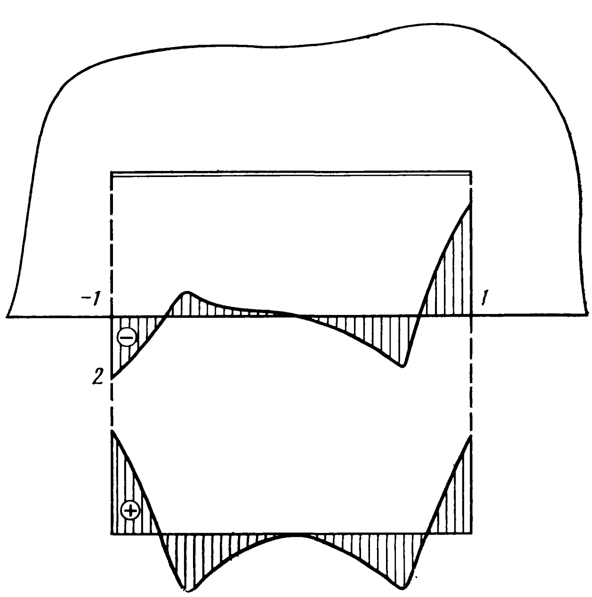
$$\sum_{m=1}^{4n}\mathbf{c}_m(\mathbf{f}_m, \mathbf{f}_k)=\lambda_k\qquad (\mathbf{k}=1, 2, \ldots, 4\mathbf{n}) \tag{2.10}$$

Эта система однозначно разрешима, так как определитель Грама отличен от нуля. Далее имеем $\|\mathbf{P}\|^2=\|\mathbf{c}_m\mathbf{f}_m\|^2+\|\mathbf{h}\|^2\to\min$ $(\mathbf{m}=1, 2, \ldots, 4\mathbf{n})$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{h}=0$. Таким образом, экстремальный элемент $\mathbf{P}^0(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле (2.9) с коэффициентами $\mathbf{c}_m$, определяемыми из системы (2.10).

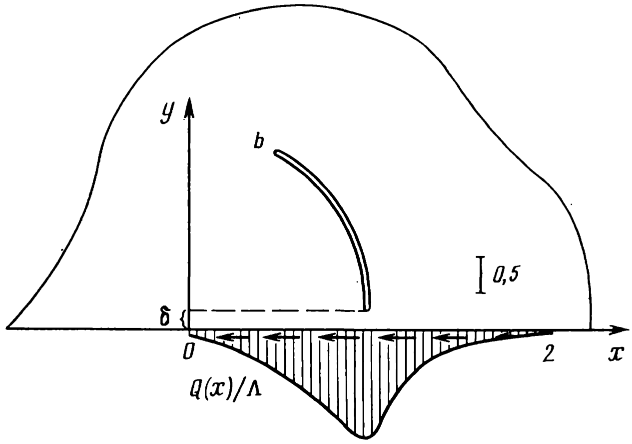
В условиях сложного нагружения целесообразно оптимизировать не коэффициенты интенсивности напряжений, а поток энергии в вершину трещины. Положим, что $P(x)\equiv0$ и имеется лишь одна трещина.

Задача C_1. Найти $\max\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ на множестве $(I)=\{\mathbf{Q}:\mathbf{Q}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{V}),\ \|\mathbf{Q}\|\leqslant$ $\leqslant\Lambda\}$. Физически это означает максимизацию потока энергии в одну из вершин трещины при указанных ограничениях на управление.

Решение. Согласно теореме Куна – Таккера [5], в седловой точке $(\mathbf{Q}^0, \lambda^0)$ функционала Лагранжа имеют место соотношения $\mathbf{F}'(\mathbf{Q}^0, \varphi)=0$, $\forall\varphi\in$



Фиг. 1



Фиг. 2

$\in \mathbf{L}^2(\mathbf{V})$, $\lambda^0(\|\mathbf{Q}^0\|-\Lambda)=0$, $\lambda^0 \geqslant 0$, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})=-\mathbf{G}(\mathbf{Q})+\lambda(\|\mathbf{Q}\|-\Lambda)$. Здесь $\mathbf{F}'(\mathbf{Q},\varphi)$ — производная по Гато [5].

Выполняя дифференцирование входящих в $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ функционалов используя (1.3) и произвольность φ, приходим к соотношению

$$\mathbf{d}_{\mathbf{km}}\mathbf{h}_{\mathbf{m}}(1,\ \mathbf{x})\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-{}^1/_2\lambda\mathbf{Q}(\mathbf{x})(\mathbf{A}\|\mathbf{Q}\|)^{-1}=0\quad(\mathbf{k},\ \mathbf{m}=1,\ 2) \tag{2.11}$$

Отсюда следует «энергетическое» равенство

$$\max \mathbf{G}=\mathbf{A}\mathbf{d}_{\mathbf{km}}\mathbf{x}_{\mathbf{k}}{}^0\mathbf{x}_{\mathbf{m}}{}^0={}^1/_2\lambda^0\|\mathbf{Q}^0\|$$

В силу строгой положительной определенности квадратичной формы (1.3) заключаем, что $\lambda^0>0$ и, стало быть, $\|\mathbf{Q}^0\|=\Lambda$.

Равенство (2.11) равносильно интегральному уравнению с разделяющимся ядром $\int \mathbf{Q}(\xi)g(x,\ \xi)d\xi-{}^1/_2\lambda\mathbf{Q}(\mathbf{x})/(\mathbf{A}\Lambda)=0$, $g(\mathbf{x},\ \xi)=\mathbf{d}_{\mathbf{km}}\mathbf{h}_{\mathbf{m}}(1,\ \mathbf{x})\mathbf{h}_{\mathbf{k}}(1,\ \xi)$ $(\mathbf{k},\ \mathbf{m}=1,\ 2)$, решение которого элементарно. Собственная функция $\mathbf{Q}^0(\mathbf{x})$, соответствующая положительному характеристическому числу λ^0, фиксируется ограничением $\|\mathbf{Q}^0\|=\Lambda$.

Задачи семейств $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$ можно обобщить в различных направлениях, приближая постановки к реальным условиям функционирования элементов конструкций.

3. Примеры. Рассмотрим полубесконечную пластинку из бороэпоксидного композита (БКМ) с параметрами $\mu_1=0{,}62i$, $\mu_2=5{,}12i$, ослабленную дуговой трещиной $\xi_1=\mathbf{R}\cos[0{,}5(1+\beta)\psi]$, $\xi_2=\delta+\mathbf{R}\sin[0{,}5(1+\beta)\psi]$, $-1\leqslant\beta\leqslant1$. В первом случае максимизируется коэффициент интенсивности $\mathbf{K}_1^-$, во втором $\mathbf{K}_2^-$ (на нижнем кончике трещины). При этом управление осуществляется только функцией $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $(|\mathbf{P}(\mathbf{x})|\leqslant\mathbf{l}_1$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})\equiv0)$, либо функцией $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ $(|\mathbf{Q}(\mathbf{x})|\leqslant\mathbf{l}_2$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})\equiv0)$. При $\mathbf{R}=1$, $\delta=0{,}1$, $\psi=\pi/3$ и U, $V=[0,\ 2]$ получаем в первом случае $\mathbf{P}(\mathbf{x})=\mathbf{l}_1$ $(0\leqslant\mathbf{x}\leqslant0{,}9)$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})=-\mathbf{l}_1$ $(0{,}9<\mathbf{x}\leqslant2)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})=-\mathbf{l}_2$ $(0\leqslant\mathbf{x}\leqslant0{,}3)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})=\mathbf{l}_2$ $(0{,}3<\mathbf{x}\leqslant2)$. Во втором случае $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ имеет тот же вид, а $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ определяется формулой $\mathbf{Q}(\mathbf{x})=-\mathbf{l}_2$ $(0\leqslant\mathbf{x}\leqslant0{,}1;\ 1{,}6\leqslant\mathbf{x}\leqslant2)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})=\mathbf{l}_2$ $(0{,}1<\mathbf{x}<1{,}6)$. Здесь использовалось решение задачи $\mathbf{A}_1$ при $\mathbf{n}=1$ и соответствующих значениях коэффициентов $\alpha_{ij}^\pm$.

Следующий пример относится к задаче $\mathbf{B}_1$. Пусть в полуплоскости из БКМ имеется горизонтальная трещина длиной $2\mathbf{l}=2$ на расстоянии $\delta=2$ от границы. Требуется за счет управления $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ с минимальной нормой в первом случае «запереть» трещину на левом конце $(K_1^-=K_2^-=0)$, а на правом конце получить $\mathbf{K}_1^+=0{,}5$, $\mathbf{K}_2^+=0$, во втором $K_1^+=K_1^-=1$, $K_2^\pm=0$. Результаты показаны на фиг. 1. Верхняя эпюра соответствует первому случаю, нижняя – второму.

Наконец, третий пример относится к задаче $\mathbf{C}_1$. В полуплоскости из БКМ с дуговой трещиной максимизировать поток энергии в вершину трещины $\mathbf{b}$ за счет $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, причем $\|\mathbf{Q}\|\leqslant\Lambda$. Результаты приведены на фиг. 2.

Полученные решения иллюстрируют эффективность управления параметрами разрушения за счет внешних полей.

Авторы благодарят Н. В. Тыркусову за помощь при численной реализации алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильштинский Л. А.* Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 72–79.
2. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.
3. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение. 1985. 263 с.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.
5. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир. 1973. 244 с.

Харьков, Сумы

Поступила в редакцию
21.V.1987