

## ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОТОРНЫХ СИСТЕМ

### FINITE ELEMENT METHOD APPLICATION FOR ROTOR SYSTEM DYNAMIC ANALYSIS

**САФОНОВ Алексей Владимирович**, инженер-конструктор,  
ДП «Турбонасос» ФГУП КБХА, г. Воронеж, Россия.

*Abstract. Analysis features of NISA/ROTOR are described with regard to rotor bearing systems. Several issues peculiar to rotor bearing systems such as critical speeds and instability phenomenon are explained along with illustrative examples.*

#### Конечно-элементный программный модуль NISA/ROTOR и его использование при оценке динамических характеристик роторных систем. Введение

Модуль NISA/ROTOR предназначен для анализа вращающихся структур, и в частности, роторных систем.

С точки зрения конечно-элементной модели вращающейся конструктивной системы с распределенной массой, система уравнений движения для вращающейся системы дается в матричной форме в следующем виде

$$[M] \ddot{X} + [C_e + C_v + G] \dot{X} + [K + K_g + K_c + K_a + K_t + K_h] X = F(t), \quad (1)$$

где  $M$ ,  $K$  и  $C_e$  – симметричные матрицы – массовая, упругих жесткостей и демпфирования,  $G$  – гироскопическая кососимметричная матрица,  $C_v$  и  $K_h$  – соотносятся с внутренним трением вала, которое может быть вязкого или гистерезисного типа:  $C_v$  – соотносится с внутренним трением вязкого типа и является симметричной, тогда как матрица  $K_h$ , которая имеет включения внутреннего трения как вязкого, так и гистерезисного типа, является кососимметричной,  $K_a$ ,  $K_c$  и  $K_g$  – симметричные матрицы: жесткость от осевой нагрузки, центробежная и геометрическая жесткость,  $K_t$  – несимметричная матрица осевых моментов,  $C_e$  – матрица внешнего демпфирования,  $X$  –  $6n \times 1$  вектор перемещений и поворотов по степеням свободы и  $F(t)$  – соответст-

вующий силовой вектор во всех узлах, заданных в конструкции.

Особенности, связанные с роторными системами, могут быть представлены следующим образом:

- влияние скорости вращения;
- внутреннее трение в вале;
- диск с инерцией вращения;
- роторно-подшипниковое взаимодействие;
- осевые силы и моменты;
- податливость опор (корпуса и основания).

NISA/ROTOR обеспечивает возможность модульного обслуживания для выше приведенного по отношению к роторным системам.

### Динамика ротора

Анализ динамики ротора имеет первостепенную важность при конструировании, работе, разрушении и конструктивной модификации турбомашин, центробежных насосов и других энергетических машин. В этих вращательных системах главное требование – это знание критических скоростей вращения и неустойчивости ротора, которая может возникнуть при вращении. Это в свою очередь связано с явлением прецессии. Вращающиеся ротора могут работать на скоростях вращения намного более высоких, чем несколько первых прецессионных скоростей, при этом они работают значительно выше некоторых критических скоростей. Критическая скорость – это явление резонанса, хорошо известное в случае невращающихся структур. Резонанс – это совпадение скорости вращения ротора с какой-нибудь из прецессионных (критических) скоростей системы или собственных частот, которые получаются из решения уравнения (1) при нулевой правой части.

Вращение вносит кососимметрию/несимметрию в математическую модель вращающейся системы. В общем случае несимметричной матрицы собственные частоты являются комплексными ( $\lambda = \sigma + i \cdot \omega$ ) и собственные значения встречаются парами. Таким образом, если  $\lambda$  является собственным значением, общее решение представляется в форме

$$X(t) = A^+ \cdot \exp(\sigma + i \cdot \omega) + A^- \cdot \exp(\sigma - i \cdot \omega), \quad (2)$$

где  $A^+$  и  $A^-$  – амплитуды прямой и обратной прецессии,  $\sigma$  – действительная часть собственного значения, являющаяся “демпфирующей” степенью, она определяет устойчивость системы ( $\sigma > 0$  указывает на неустойчивость),  $\omega$  – это собственная частота ротора и равняется скорости прецессии.

Общепринято выражать  $\sigma$  в терминах логарифмического декремента, при этом  $\gamma$  представляется в виде

$$\gamma = -2 \cdot \pi \cdot \sigma / \omega \quad (3)$$

В NISA/ROTOR предусмотрен решатель для расчета несимметричных собственных частот, который основывается на решателях блоковой

компоновки и блоков Ланцоша. Для систем большого порядка, редуцирование модели возможно с помощью редукции Гвиана.

### **Роторно-подшипниковое взаимодействие**

Подшипники поддерживают вращающийся вал и создают соответствующие поддерживающие силы. В то время как подшипники качения сравнительно просты для математического моделирования, моделирование жидкостных пленочных подшипников скольжения, которые часто используются в промышленности, относительно сложно. Жидкостная пленка в шейке вала создает динамическое давление при вращении вала и поддерживает вал. Результирующее распределение жидкостного давления описывается уравнениями Рейнольдса, которые представлены дифференциальными уравнениями в частных производных, учитывающих толщину пленки, вязкость жидкости, пространственный угол, радиус шейки и т.д. Функциональную форму решения уравнений Рейнольдса невозможно получить в простом виде. Предполагая стационарное состояние равновесия для эксцентриситета жидкостной пленки и угловой пространственной ориентации, можно получить решение для распределения давления в жидкостной пленке из линеаризованных уравнений Рейнольдса. Интегрирование по поверхности жидкостной пленки динамического давления дает динамическую жесткость и другие динамические коэффициенты подшипника. Таким образом, в результате имеем две важные особенности взаимодействия подшипников с вращающимся валом: податливость в местах расположения подшипников и коэффициент демпфирования. Это представляется в форме матриц  $2 \times 2$  жесткости и демпфирования, которые получаются интегрированием матриц  $K$  и  $C_v$  в уравнении (1). Здесь необходимо заметить, что эти две матрицы подшипниковых коэффициентов могут быть несимметричными. С точки зрения динамики ротора, подшипниковое демпфирование является крайне полезным и нужным фактором. С другой стороны, перекрестные жесткостные коэффициенты могут вызывать неустойчивость роторной системы, что обсуждается в следующем разделе.

В модуле NISA/ROTOR можно учитывать жидкостные пленочные подшипники – плоский цилиндрический и конический демпфирующий тип подшипников. Пользователи могут либо прямо вводить подшипниковые динамические коэффициенты, либо опции для вычисления этих коэффициентов при заданной геометрии подшипника и нагрузке.

### **Критические скорости**

Критическая скорость – это скорость вала, которая совпадает с одной из скоростей прецессии вращающейся системы. Очевидно, что когда вращающаяся система достигает скоростей около любой из скоростей прецессии, амплитуды вибраций ротора могут вырасти выше допустимого уровня, приводя к разрушению. Однако, как и в случае невращающихся систем,

если система обладает существенным демпфированием, амплитуды могут падать до приемлемых значений. Дополнительно к этому здесь стоит упомянуть, что рабочая скорость системы современных гибких роторов обычно выше критической и может благополучно проходить через одну или более критические скорости при каждом запуске и останове.

### Неустойчивость

Неустойчивость, в отличие от резонансных явлений, связанных с критическими скоростями, не может привести к большим вибрационным амплитудам, но приводит в результате к резкому развитию несинхронного движения с некоторой пороговой скорости вращения, что в итоге ведет к катастрофическому разрушению. Исследования показывают, что вращающиеся системы склонны к проявлениям динамической неустойчивости, обусловленной присутствием внутреннего трения вала, несимметрии в жесткости опор, масляной подшипниковой пленки и гидродинамических щелевых уплотнений. Возникающие при этом явления нелинейной природы и самовозбуждения можно рассчитать, используя линеаризованный анализ устойчивости и определить границы устойчивости. Как уже упоминалось выше для уравнения (2), если экспонента демпфирования  $\sigma$ , полученная из анализа демпфированных собственных значений, является положительной, то система неустойчива. Другими словами, изменение знака логарифмического декремента  $\lambda$  от положительного к отрицательному показывает возникновение неустойчивости для соответствующей моды.

### Несбалансированный отклик

Вращающаяся система, как правило, обладает неуравновешенной массой, или распределенной вдоль вала, или концентрированной в некоторых местах, где располагаются диски. Это ведет к появлению несбалансированных сил при вращении и вызывает резонанс при критических скоростях. Для моделей большого порядка имитирование этих несбалансированных сил на вале или диске может быть решено в рамках метода конечных элементов. Так как гироскопические силы вызывают как прямую, так и обратную прецессии, отклик от несбалансированных сил обнаруживает резонанс для этих прецессионных скоростей.

В NISA/ROTOR несбалансированность массы может быть задана в понятиях эксцентриситета для вала или диска в направлениях  $UY$  и  $UZ$ . Обобщенные силы  $F(t)$  вводятся в общей формулировке в соответствии с уравнением (1) и несбалансированный отклик получается либо в области частот, либо времени.

### Выводы

Таким образом, модуль NISA/ROTOR обладает следующими возможностями анализа динамики роторов:

- анализ критической скорости: эта возможность обеспечивает информацию по критическим скоростям, с учетом эффекта податливости подшипников.
- устойчивость: аспекты устойчивости обеспечиваются в форме демпфированных собственных частот.
- несбалансированный отклик: динамический отклик роторной системы получается во временной области прямым интегрированием системы уравнений движения. Отклик в частотной области получается решением системы уравнений, использующей комплексную форму записи.
- силовой вибрационный отклик: динамический отклик при внешнем нагружении, таком как силы, сконцентрированные в узлах, и возбуждение основания, получается во временной области при прямом интегрировании системы уравнений движения.

### Примеры расчетов динамических характеристик роторных систем

Рассмотрим в качестве примера расчет критических частот вращения и устойчивости ротора на рисунке 1. Рассматривается двухпорный ротор с консольным расположением турбин и межпорным расположением дисков насосов I и II ступеней.



Рисунок 1 - Расчетная модель

Вал ротора моделируется балочными элементами. Диски и массы моделируются массами с учетом их моментов инерции. Подшипники моделируются пружинными и демпферными элементами с учетом их жесткостей и коэффициентов демпфирования. Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 1.

При анализе динамических характеристик роторов ТНА нужно учитывать ряд особенностей, связанных с наличием гидродинамических сил в щелевых уплотнениях рабочих колес. Указанные силы не только ужесточают ротор, но и приводят к дестабилизации его движения, поскольку имеют составляющие, направленные перпендикулярно смещению ротора в зазорах уплотнений.

Параметры этих сил определяются коэффициентами гидродинамической жесткости  $K_R(\omega)$  и гидродинамического демпфирования  $K_C(\omega)$  для уп-

лотнений насоса. Эти коэффициенты вычисляются при помощи следующих выражений [1, 2]:

$$K_p(\omega) = K_{p.n} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2,$$

где 
$$K_{p.n} = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta P_n \cdot \frac{R \cdot l}{h_0} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha),$$

$$\alpha = \frac{1 + \xi}{1 + \xi + \lambda / 2h_0},$$

$\xi \approx 0,3$  – коэффициент сопротивления,

$\lambda \approx 0,04$  – коэффициент трения,

$\Delta P_n$  – перепад давления на номинальном режиме,

$\omega_n$  – номинальная частота вращения,

$R, l$  и  $h_0$  – радиус, длина и радиальный зазор уплотнения;

$$K_c(\omega) = K_{c.n} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right),$$

где 
$$K_{c.n} = \frac{\pi}{24} \cdot \left[ \frac{\rho \cdot \Delta P_n \cdot \lambda \cdot l}{h_0} \right]^{1/2} \cdot \frac{R \cdot l^2}{h_0},$$

$\rho$  – плотность перекачиваемой жидкости.

На рисунках 2 и 3 приведены диаграммы Кэмпбелла для рассмотренного ротора без учета коэффициентов гидродинамической жесткости и гидродинамического демпфирования и с их учетом. Эти диаграммы показывают зависимость частот прямой и обратной прецессий ротора от частоты его вращения. Пересечение графиков прецессий с линией синхронного возбуждения дает значение критической скорости, соответствующей данной прецессии.

Кроме частот изгибных колебаний на рисунках 2 и 3 имеются три собственные частоты крутильных колебаний, которые не зависят от частоты вращения ротора.

Как можно видеть на диаграммах Кэмпбелла, в соответствии с гироскопическими членами, каждая изгибная мода распадается на две частоты – одна прямая и другая обратная мода. Гироскопический эффект повышает значение критической частоты для прямой прецессии и снижает его для обратной прецессии. Особенно сильное влияние гироскопический эффект оказывает на консольно расположенные диски.

На рисунках 4 и 5 приведены графики зависимости логарифмического декремента от частоты вращения для рассмотренного ротора без учета коэффициентов гидродинамической жесткости и гидродинамического демпфирования и с их учетом.

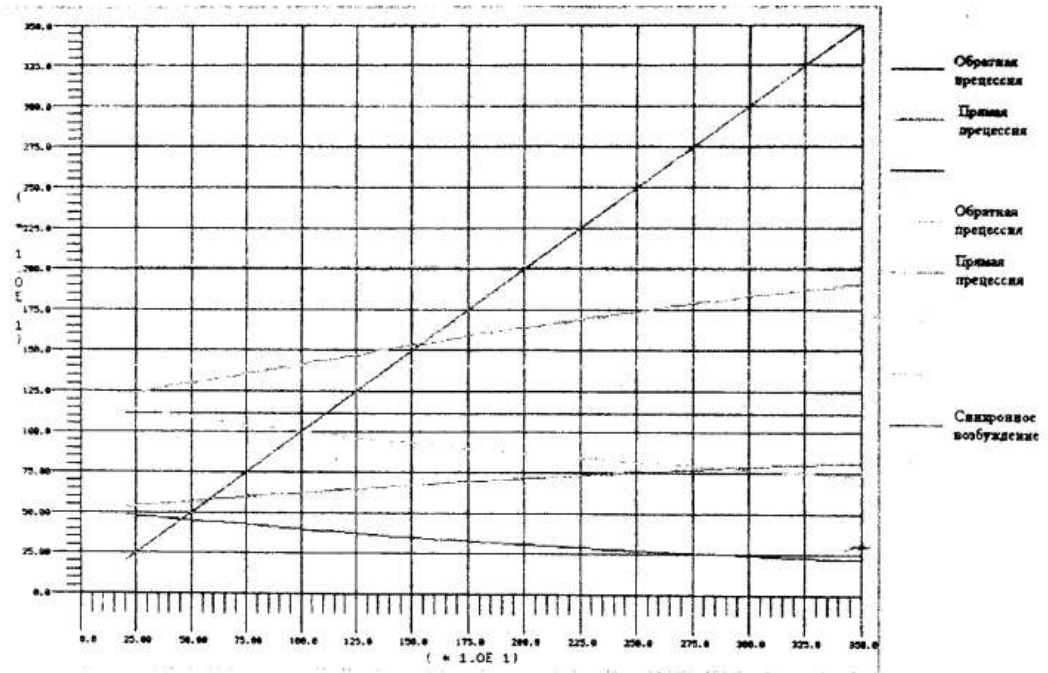


Рисунок 2 - График зависимости частоты прецессии от частоты вращения ротора без учета уплотнений

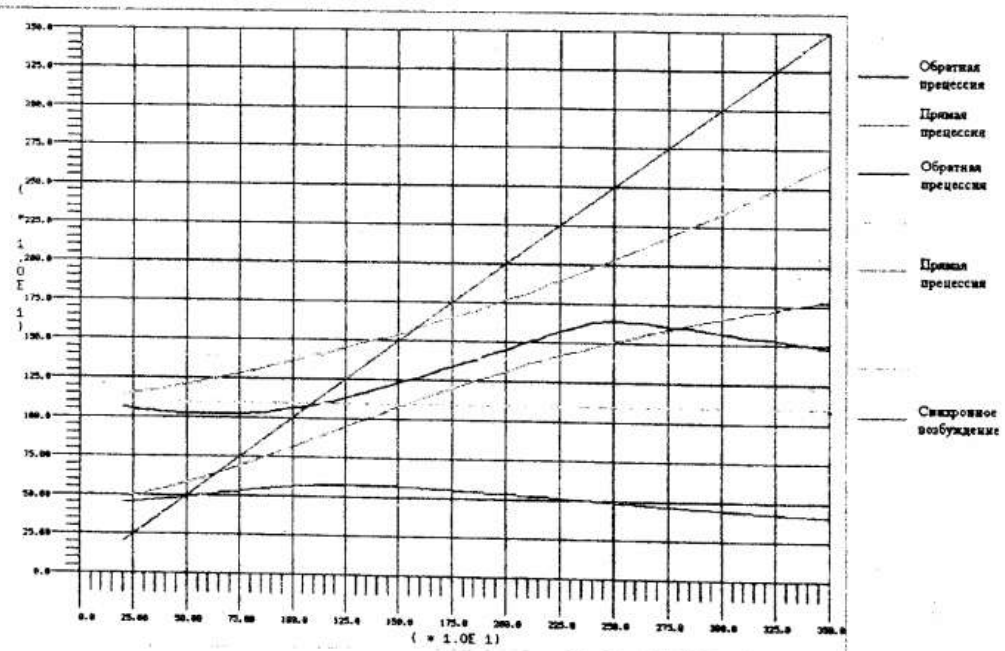


Рисунок 3 - График зависимости частоты прецессии от частоты вращения ротора с учетом уплотнений

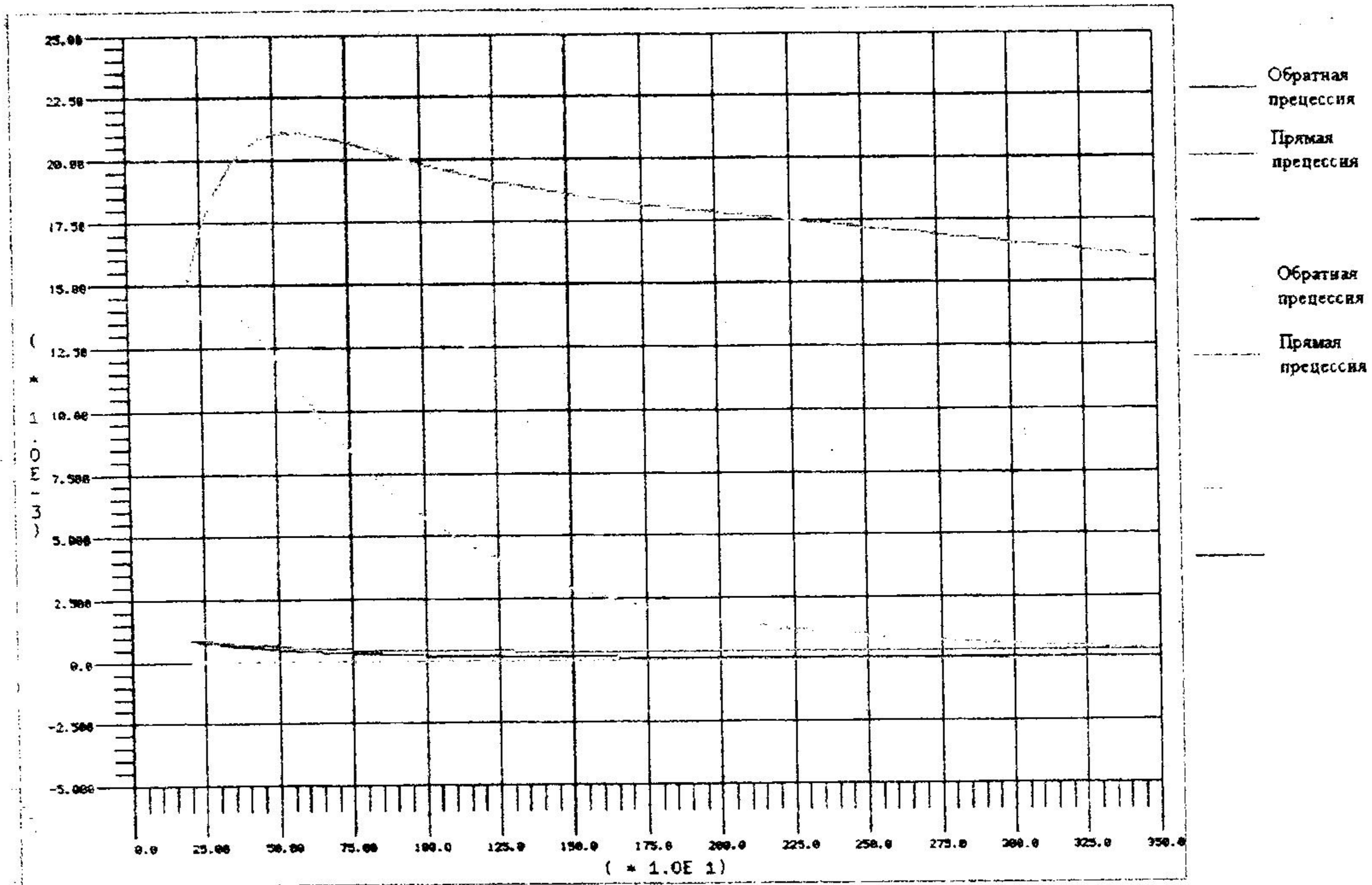


Рисунок 4 - График зависимости логарифмического декремента от частоты вращения ротора без учета уплотнений

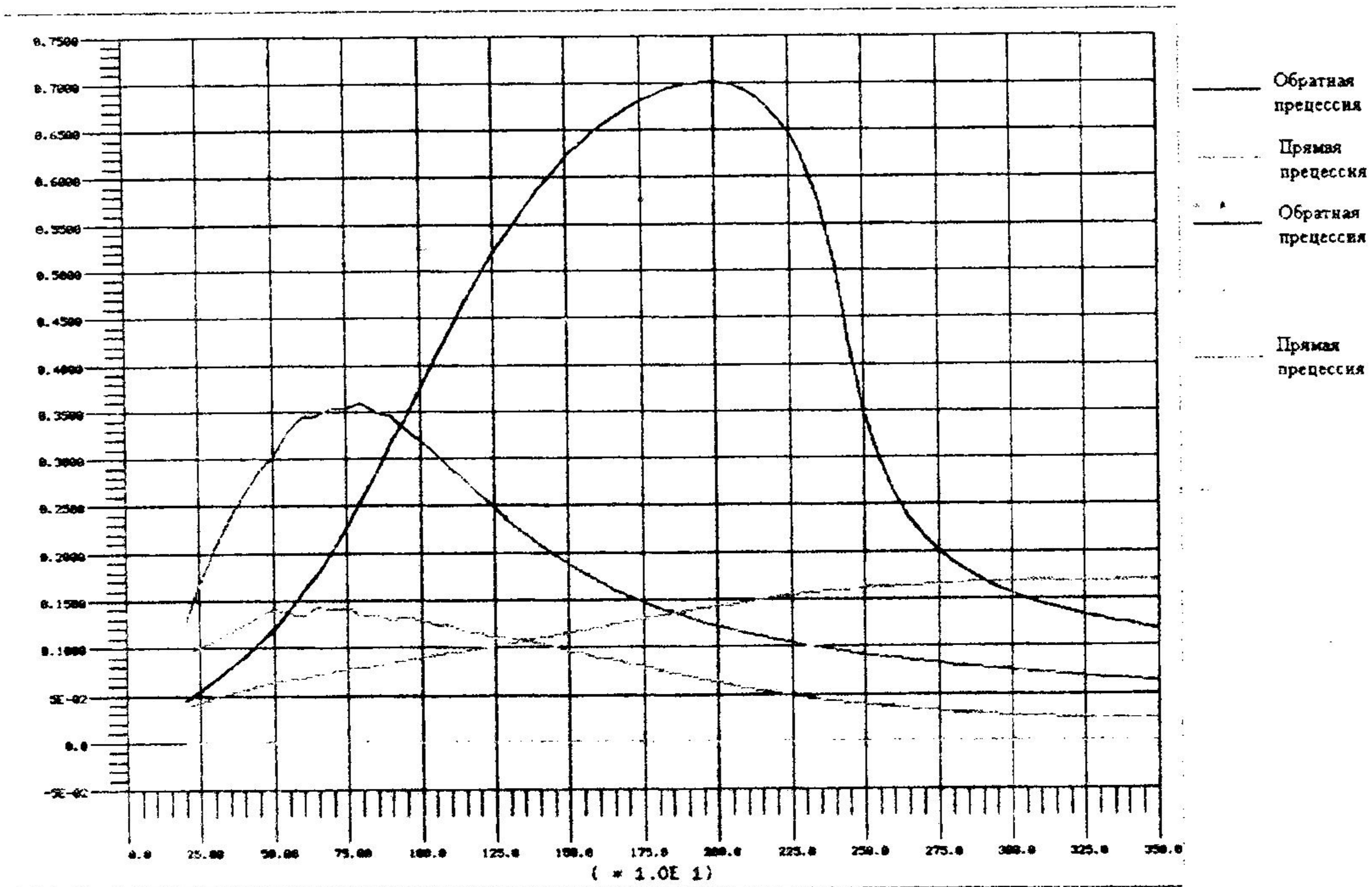


Рисунок 5 - График зависимости логарифмического декремента от частоты вращения ротора с учетом уплотнений



- анализ критической скорости: эта возможность обеспечивает информацию по критическим скоростям, с учетом эффекта податливости подшипников.
- устойчивость: аспекты устойчивости обеспечиваются в форме демпфированных собственных частот.
- несбалансированный отклик: динамический отклик роторной системы получается во временной области прямым интегрированием системы уравнений движения. Отклик в частотной области получается решением системы уравнений, использующей комплексную форму записи.
- силовой вибрационный отклик: динамический отклик при внешнем нагружении, таком как силы, сконцентрированные в узлах, и возбуждение основания, получается во временной области при прямом интегрировании системы уравнений движения.

### Примеры расчетов динамических характеристик роторных систем

Рассмотрим в качестве примера расчет критических частот вращения и устойчивости ротора на рисунке 1. Рассматривается двухопорный ротор с консольным расположением турбин и межопорным расположением дисков насосов I и II ступеней.



Рисунок 1 - Расчетная модель

Вал ротора моделируется балочными элементами. Диски и массы моделируются массами с учетом их моментов инерции. Подшипники моделируются пружинными и демпферными элементами с учетом их жесткостей и коэффициентов демпфирования. Общий вид расчетной модели представлен на рисунке 1.

При анализе динамических характеристик роторов ТНА нужно учитывать ряд особенностей, связанных с наличием гидродинамических сил в щелевых уплотнениях рабочих колес. Указанные силы не только ужесточают ротор, но и приводят к дестабилизации его движения, поскольку имеют составляющие, направленные перпендикулярно смещению ротора в зазорах уплотнений.

Параметры этих сил определяются коэффициентами гидродинамической жесткости  $K_R(\omega)$  и гидродинамического демпфирования  $K_C(\omega)$  для уп-

лотнений насоса. Эти коэффициенты вычисляются при помощи следующих выражений [1, 2]:

$$K_p(\omega) = K_{p,n} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2,$$

где  $K_{p,n} = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta P_n \cdot \frac{R \cdot l}{h_0} \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha)$ ,  $\alpha = \frac{l + \xi}{l + \xi + \lambda l / 2 h_0}$ ,  $\xi \approx 0,3$  – коэффициент сопротивления,  $\lambda \approx 0,04$  – коэффициент трения,  $\Delta P_n$  – перепад давления на номинальном режиме,  $\omega_n$  – номинальная частота вращения,  $R$ ,  $l$  и  $h_0$  – радиус, длина и радиальный зазор уплотнения;

$$K_c(\omega) = K_{c,n} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right),$$

где  $K_{c,n} = \frac{\pi}{24} \cdot \left[ \frac{\rho \cdot \Delta P_n \cdot \lambda \cdot l}{h_0} \right]^{1/2} \cdot \frac{R \cdot l^2}{h_0}$ ,  $\rho$  – плотность перекачиваемой жидкости.

На рисунках 2 и 3 приведены диаграммы Кэмпбелла для рассмотренного ротора без учета коэффициентов гидродинамической жесткости и гидродинамического демпфирования и с их учетом. Эти диаграммы показывают зависимость частот прямой и обратной прецессий ротора от частоты его вращения. Пересечение графиков прецессий с линией синхронного возбуждения дает значение критической скорости, соответствующей данной прецессии.

Кроме частот изгибных колебаний на рисунках 2 и 3 имеются три собственные частоты крутильных колебаний, которые не зависят от частоты вращения ротора.

Как можно видеть на диаграммах Кэмпбелла, в соответствии с гироскопическими членами, каждая изгибная мода распадается на две частоты – одна прямая и другая обратная мода. Гироскопический эффект повышает значение критической частоты для прямой прецессии и снижает его для обратной прецессии. Особенно сильное влияние гироскопический эффект оказывает на консольно расположенные диски.

На рисунках 4 и 5 приведены графики зависимости логарифмического декремента от частоты вращения для рассмотренного ротора без учета коэффициентов гидродинамической жесткости и гидродинамического демпфирования и с их учетом.

### ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Марцинковский В.А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов. – М.: Машиностроение, 1970. – 272 с.
2. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. – М.: Машиностроение, 1980. – 200 с.