УДК 621.314

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ЕНЕРГОВИТРАТАМИ ФОРМУВАННЯ МОМЕНТУ ЕЛЕКТРОДВИГУНА ПРИ НЕРУХОМОМУ СТАНІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

І.В. Щокотова, О.І. Бережной, А.М. Щокотов

Сумський державний університет, м. Суми

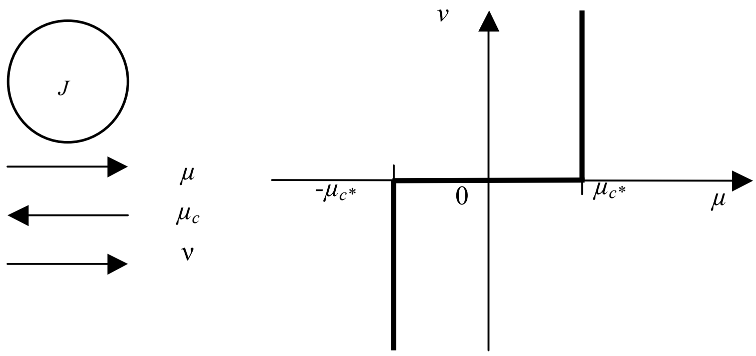
Розглянуті умови змінення математичної моделі електромеханічної системи та теоретично обґрунтований закон оптимального за енерговитратами управління електромеханічною системою при втраті керованості за швидкістю руху інерційної маси електропривода. Доведено, що закон оптимального за енерговитратами керування електромеханічною системою при існуванні такого режиму збігається з керуванням, оптимальним за швидкодією. Результат у вигляді закону оптимального формування електромагнітного моменту електродвигуна в часі може застосовуватися в системах автоматичного керування електроприводами механізмів пересування технологічних машин та багатьох інших для зниження енергоємності технологічних процесів.

Статичне навантаження електроприводів робочих органів технологічних машин часто має реактивний характер і може вважатися навантаженням типу "сухе тертя" [1, с. 42– 45]. Для таких електроприводів модель динамічної системи є одним диференціальним рівнянням першого порядку в просторі станів, коли поточне значення електромагнітного моменту (єдиної перемінної стану) за величиною не перевищує значення моменту сухого тертя, а швидкість обертання двигуна дорівнює нулю. Наприклад, для електропривода переміщення робочого органа технологічної машини будь-якого призначення така ситуація має місце при зрушенні із нерухомого стану. Виведення електромеханічної системи (ЕМС) із цього підпростору станів (зони нерухомості) потребує втрат енергії та часу. Цю обставину необхідно враховувати, особливо коли час виведення системи із зони нерухомості складає суттєву частину часу робочого циклу технологічної машини. Тому поставимо за мету побудову математичної моделі ЕМС та визначення оптимального за енерговитратами закону керування нею при втраті керованості за швидкістю руху інерційної маси електропривода.

Для досягнення поставленої мети розглянемо фізичні аспекти роботи ЕМС в зоні нерухомості, на підставі чого здійснимо математичне формулювання задачі оптимального за енерговитратами керування. Розв'язання поставленої задачі можливо виконати за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

1 ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Розрахункову кінематичну схему одномасової механічної частини електропривода та механічну характеристику статичного навантаження подано на рис. 1.



а) б)

Рисунок 1 – а) розрахункова кінематична схема одномасової механічної системи електропривода;
б) механічна характеристика $\mu_c(\nu)$ статичного навантаження типу "сухе тертя"

Рівняння руху електропривода в абсолютних одиницях має вигляд

$$M - M_c = J\dot{\omega}\,, \tag{1.1}$$

де M і M_c – відповідно електромагнітний та статичний моменти на валу двигуна;

J – момент інерції механічної частини електропривода, приведений до швидкості ω;

ω – кутова швидкість обертання ротора двигуна;

$\dot{\omega} = d\omega/dt$ – похідна швидкості за часом.

У відносних одиницях рівняння руху (1.1) набирає вигляду

$$\mu - \mu_c = \dot{\nu}, \tag{1.2}$$

де μ і μ_c – електромагнітний та статичний моменти у відносних одиницях;

$\dot{\nu} = \nu\,/\,d\tau$ - кутове прискорення у відносних одиницях;

$\nu = \omega/\omega_н$ – кутова швидкість двигуна у відносних одиницях;

$\tau = t/T_м$ – час у відносних одиницях.

Рівняння (1.1) отримано при виборі базових одиниць $M_б = M_н$, $\omega б = \omega н$, $T_б = T_м = J\omega_н\ /\ M_н$, де $M_н$ і $\omega_н$ – номінальні значення відповідно електромагнітного моменту і кутової швидкості двигуна; $T_м$ – механічна стала часу.

Вектор стану електромеханічної системи (ЕМС) має координати: $x_1 = \nu,\ x_2 = \dot{\nu} = \mu - \mu_c$. Математична модель динамічної системи "одномасова ЕМС" обертального руху подається у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) &= x_2(\tau); \\ \dot{x}_2(\tau) &= u(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

де $u(\tau)$ – керування (в термінах теорії оптимального керування), тобто сигнал, формування якого визначає закон руху системи.

Модель ЕМС у вигляді (1.3) задається відомою функцію $\mu_c(\tau)$. Однак реактивний статичний момент (див. рис. 1.1) при $|\nu| > 0$, якщо знехтувати складовими в'язкого тертя, є функцією швидкості у вигляді

$$\mu_c = \mu_{c*} \cdot sign(\nu)\,. \tag{1.4}$$

Із (1.4) випливає, що при $|\nu|>0$ $\mu_c(\tau) = \pm\mu_{c*}$, тобто μ_c не є функцією часу. Тому трапляються особливі випадки, коли модель ЕМС в математичному поданні змінюється. Для розуміння цієї обставини візьмемо до відома, що ліва частина рівняння (1.2) та права частина першого рівняння системи (1.3) дорівнюють динамічному моменту

$$\mu_{дин} = \mu - \mu_c\,. \tag{1.5}$$

При $\nu=0$ маємо дві можливі ситуації: і $|\mu|\le\mu_{c*}$. У першій із цих ситуацій механічна система зберігає свої властивості, і закон її руху

$$\bar{x}(\tau)=\left(x_1(\tau),x_2(\tau)\right) \tag{1.6}$$

описується системою (1.3), а при виникненні другої ситуації мають місце рівності $\mu_c=\mu$, $\mu_{дин}=0$, $\dot{\nu}=0$ $\left(x_2=0,\dot{x}_1=0\right)$, оскільки реактивний момент опору в такому разі є реакцією на рухомий момент μ, що діє на механічну систему.

Таким чином, при виникненні ситуації $|\mu(\tau)|\le\mu_{c*}$, $\nu=0$, що має місце, наприклад, у початковий момент пуску електропривода переміщення технологічної машини, виникає задача виведення одномірної системи

$$\dot{x}_1(\tau)=u(\tau)\,, \tag{1.7}$$

де $x_1 = \mu$, із "мертвої" зони, тобто метою керування є змінення координати x_1 від початкового значення $x_{10} = \mu_{c0}$, $|\mu_{c0}|\le\mu_{c*}$ до кінцевого $x_{1\theta}=\pm\mu_{c*}$, при нерухомому стані ($\nu=0$) інерційної маси ЕМС (тут ми ввели позначення $\mu = x_1$, щоб указати на одномірність ($n = 1$) системи (1.7), задача керування якої буде розглядатися далі).

Ця задача належить до класу задач керування із закріпленими кінцями фазової траєкторії $x_1(\tau)$, з крайовими умовами $x_1(0) = x_{10}$, $x_1(\theta) = x_{1\theta}$, $0 \le \tau \le \theta$, де θ – невизначений час руху.

На керування $u(\tau)$ накладається обмеження

$$|u(\tau)|\le u_{доп}\,, \tag{1.8}$$

де $u_{доп}=\dot{\mu}_{доп}$ – допустима швидкість змінення електромагнітного моменту двигуна.

Таке обмеження обумовлене вимогами до експлуатаційної надійності як двигуна, так і технологічної системи в цілому.

При постановці завдання оптимального за енерговитратами керування системою (1.7) мета керування формулюється як мінімізація функціонала

$$I = \int_0^\theta x_1^2(\tau) d\tau \qquad (1.9)$$

при обмеженні (1.8), оскільки в режимі роботи електропривода, що розглядається, втрати енергії визначаються інтегралом вигляду (1.9). Зазначимо, що для електроприводів постійного струму функціонал (1.9) відображає втрати енергії досить точно, а для електроприводів змінного струму – приблизно [2].

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

На основі обговорення динамічних властивостей ЕМС при $\nu = 0$ та значеннях електромагнітного моменту в межах $-\mu_{c*} \leq \mu \leq \mu_{c*}$ формально ставиться задача оптимального керування системою (1.7), яке приводить до мінімізації функціонала (1.9). Спроба розв'язати цю задачу без врахування обмежень дає розв'язок, що випливає із рівняння Ейлера [3, с. 47], яке для функціонала (1.9) має вигляд

$$\frac{\partial\left(x_1^2\right)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0,$$

що виконується при $u(\tau) = 0$ на інтервалі часу $\tau \in [0, \theta]$, а з урахуванням межевих умов $x_1(0) = x_{10}$ і $x_1(\theta) = x_{1\theta}$ необхідно формувати функцію $\mu(\tau) = x_1(\tau)$ у вигляді стрибків при $\tau = 0$ і $\tau = \theta$. Таке керування є технічно нездійсненним унаслідок обмеження (1.8). Цей факт підтверджується і в [4, с.709], де пояснюється, що внаслідок відсутності керування u в інтегранті функціонала (1.9) система (1.7) не "штрафується" за витрату "керувальної" енергії, і тому оптимальне керування виявляється імпульсним. Отже, в нашому випадку слід скористатися одним із методів розв'язання задач оптимального керування при наявності обмеження (1.8) на керування $u(\tau)$. Одним із таких є метод, заснований на використанні принципу максимуму Понтрягіна. Скористаємося цим методом, досить коректно викладеним у [5, с. 199-270].

Для зручності міркувань на основі літературних джерел [3, 5] функцію керування $u(\tau)$ представимо у вигляді

$$u(\tau) = u_{доп}\, u^*(\tau), \qquad (2.1)$$

де функція керування $u^*(\tau)$ за величиною уявляє собою частку $u_{доп}$. Це дає можливість подання обмеження (1.8) в еквівалентній формі

$$\left|u^*(\tau)\right| \leq 1. \qquad (2.2)$$

Інтегрант функціонала (1.9) і права частина рівняння системи (1.7) з урахуванням (2.1) і (2.2) утворюють систему рівнянь

$$f_0 = x_1^2; \qquad (2.3)$$

$$f_1 = u_{доп}\, u^*(\tau). \qquad (2.4)$$

Додамо координату x_0 з початковим значенням $x_0(0) = 0$, похідна якої за часом $\dot{x}_0 = f_0 = x_1^2$, в результаті чого порядок керованої системи підвищується до 2-го, а її закон руху в загальному вигляді подається системою

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0; \\ \dot{x}_1 &= f_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Спряжена до (2.5) система має вигляд

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{d\tau} &= -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_o}\psi_\alpha = -\frac{\partial f_0}{\partial x_o}\psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_o}\psi_1 = 0; \\ \frac{d\psi_1}{d\tau} &= -\sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\psi_\alpha = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\psi_1 = -2x_1\psi_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

де $\psi_0(\tau)$ і $\psi_1(\tau)$ – спряжені перемінні. Із першого рівняння системи (2.6) отримуємо $\psi_0 = C_0 = const$.

Системи (2.5) і (2.6) в сукупності можуть бути записані як гамільтонова (канонічна) система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{0,1}; \\ \frac{d\psi_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0,1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

де H – функція Понтрягіна, яка має вигляд

$$H = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \psi_\alpha f_\alpha = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 . \tag{2.8}$$

Зазначимо, що будь-яке розв’язання системи (2.7) відповідає допустимому керуванню $u^*(\tau)$ і відповідній йому траєкторії $x_1(\tau)$. Інакше кажучи, (ψ_0, ψ_1) відповідає $u^*(\tau)$, якщо (ψ_0, ψ_1) і $x_1(\tau)$ – розв’язання системи (2.7) [4, с.264].

При пошуку оптимального керування $u^*(\tau)$ з використанням принципу максимуму необхідно вибирати будь-яке значення ψ_0, яке видповідає умові $\psi_0 = C_0 \le 0$. Зазначимо, що спряжені перемінні ψ_0 і ψ_1 визначаються лише з точністю до спільного множника, а значення $\psi_0 = 0$ відповідає виродженій задачі, в якій пошук екстремуму втрачає сенс, оскільки побудова розв’язання не залежить від цільового функціонала [5, с. 210]. Тому можемо взяти, наприклад, $\psi_0 = -u_{доп}$. Тоді із другого рівняння системи (2.7) отримуємо

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = 2u_{доп}x_1 . \tag{2.9}$$

Вигляд правої частини (2.9) приводить до висновку, що траєкторія $x_1(\tau)$ руху системи (1.7) представляється функцією

$$x_1(\tau) = x_{10} + u_{\partial on}\,\tau, \qquad (2.10)$$

а функція $\psi_1(\tau)$ має вигляд

$$\psi_1(\tau) = C_1 + x_1^2(\tau), \quad C_1 = const. \qquad (2.11)$$

Дійсно, в такому разі

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d\psi_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\tau} = 2u_{\partial on}x_1.$$

Із (2.10) випливає, що $x_1(\tau)$ є лінійною функцією часу. Позитивний знак похідної $\dot{x}$ свідчить про те, що ми виявили оптимальне керування $u^*(\tau) = 1$ для випадку, коли $x_{1\theta} > x_{10}$. Факт виявлення оптимального керування підтверджується тим, що функція Понтрягіна

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 = -u_{\partial on}x_1^2(\tau) + \left(C_1 + x_1^2(\tau)\right)u_{\partial on}u^*(\tau) = 0$$

на всьому інтервалі часу $\tau\in[0, \theta]$ при $u^*(\tau) = 1$ і $C_1 = 0$.

Користуючись принципом мінімуму Понтрягіна [4, с.263 – 282] і поклавши $\psi_0 = u_{\partial on}$, за викладеною вище методикою можемо довести, що при $x_{1\theta} < x_{10}$ оптимальні керування і траєкторія руху системи (1.7) мають вигляд

$$u^*(\tau) = -1, \quad x_1(\tau) = x_{10} - u_{\partial on}\,\tau. \qquad (2.12)$$

Зазначимо, що такого самого результату можна було б досягти, змінивши на протилежний позитивний напрям руху механічної системи (рис.1)

Таким чином, доходимо висновку, що функція Понтрягіна (2.8) на всьому інтервалі часу $\tau\in[0, \theta]$ буде дорівнювати нулю при керуванні

$$u^*(\tau) = \mathrm{sign}(x_{1\theta} - x_{10}), \qquad (2.13)$$

або

$$u(\tau) = u_{\partial on}\,\mathrm{sign}(x_{1\theta} - x_{10}). \qquad (2.14)$$

Дийсно, при такому керуванні

$$H = \mp u_{\partial on}x_1^2(\tau) + x_1^2(\tau)u_{\partial on}sign(x_{1\theta} - x_{10}) \underset{\tau\in[0,\theta]}{=} 0, \qquad (2.15)$$

де знаки "−" і "+" належать до випадків $x_{1\theta} > x_{10}$ *і* $x_{1\theta} < x_{10}$ відповідно. Отже, керування (2.13), або в іншому поданні (2.14), є оптимальним при невизначеному часі θ руху системи (1.7) від початкового стану $x_1(0) = x_{10}$ до кінцевого $x_1(\theta) = x_{1\theta}$.

Час θ руху системи (1.7) визначається формулою

$$\theta = \left|x_{1\theta} - x_{10}\right| / u_{\partial on} = \left(\left(x_{1\theta} - x_{10}\right)/u_{\partial on}\right) sign\left(x_{1\theta} - x_{10}\right). \qquad (2.16)$$

Наступним завданням є визначення величини uдоп, що надає інтегралу (1.9) мінімального значення. Для цього визначимо значення цільового функціонала (1.9) з урахуванням оптимального закону руху системи (1.7), який узагальнимо шляхом об'єднання функцій (2.10) і (2.12):

$$x_1(\tau) = x_{10} + (u_{доп}\,\mathrm{sign}(x_{1\theta} - x_{10}))\tau. \qquad (2.17)$$

З урахуванням (2.16) і (2.17) функціонал (1.9) набуває значення

$$I = \int_0^{\theta} x_1^2(\tau)\,d\tau = F\left|x_{1\theta} - x_{10}\right| / u_{доп}\,, \qquad (2.18)$$

де $F = F(x_{10}, x_{1\theta}) = x_{10}^2 + \left(x_{10}(x_{1\theta} - x_{10}) + (x_{1\theta} - x_{10})^{2/3} \right) sign^2(x_{1\theta} - x_{10})$.

Із (2.18) випливає, що мінімізація функціонала (1.9) досягається при максимально допустимому значенні $u_{доп}$, тобто при $u_{доп} = \dot{\mu}_{доп}$. Це означає, що оптимальне за енерговитратами керування в поставленій задачі збігається з оптимальним за швидкодією. Приклад: у процесі пуску електропривода із нерухомого стану в позитивному напрямку електромагнітний момент двигуна потрібно формувати за законом (2.17): $\mu(\tau) = \dot{\mu}_{доп}\tau$, при цьому час зміни його значення до μc^* дорівнює $\theta = \mu c^* / \dot{\mu}_{доп}$.

ВИСНОВКИ

Актуальною проблемою теорії та практики автоматизованого електропривода є підвищення енергоефективності електромеханічних систем за рахунок зниження втрат енергії в електричній частині енергетичного каналу електропривода. При традиційному підході до розв’язання задач оптимального керування електроприводами технологічних машин нехтують тривалістю та енерговитратами в режимах роботи електропривода ("мертвих" зонах), коли поточне значення електромагнітного моменту двигуна за величиною не перевищує значення моменту сухого тертя, при нерухомому стані інерційної маси електромеханічної системи. Однак у сучасних умовах, коли проблема енергозбереження є актуальною, необхідно приділяти увагу і до задачі мінімізації енерговитрат при роботі електроприводів у таких режимах, особливо коли час виведення системи із мертвої зони складає суттєву частину часу робочого циклу технологічної машини. В цій роботі розглянуті умови змінення математичної моделі електромеханічної системи та теоретично обґрунтовані закон оптимального за енерговитратами керування електромеханічною системою при втраті керованості за швидкістю руху інерційної маси електропривода. Доведено, що закон оптимального за енерговитратами керування електромеханічною системою при існуванні такого режиму збігається з керуванням, оптимальним за швидкодією. Результат у вигляді закону оптимального формування електромагнітного моменту електродвигуна в часі може застосовуватися в системах автоматичного керування електроприводами механізмів пересування технологічних машин та багатьох інших для зниження енергоємності технологічних процесів.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ЕМС – електромеханічна система.

Умовні позначення:

M і μ – електромагнітний момент електродвигуна в абсолютних і відносних одиницях;

M_c і μ_c – статичний момент електромеханічної системи, приведений до швидкості електродвигуна, в абсолютних і відносних одиницях;

ω і ν – кутова швидкість обертання електродвигуна в абсолютних і відносних одиницях;

t і τ – час в абсолютних і відносних одиницях;

$\dot{\omega}$ і $\dot{\nu}$ – прискорення електродвигуна в абсолютних і відносних одиницях;

$\ddot{\nu} = d\dot{\nu}/d\tau$ – ривок у відносних одиницях;

$u = u(\tau)$ – керування у відносних одиницях.

SUMMARY

THE OPTIMUM AFTER ENERGOVITRATAMI FORMING OF MOMENT OF ELECTRIC MOTOR IS AT THE IMMOBILE STATE OF THE ELECTROMECHANICS SYSTEM

Shokotova I.V., Berezhnoy O.i., Shokotov A.M.

The terms of change the mathematical model of the electromechanics system are considered and in theory grounded law of optimum after energozatratami management the electromechanics system at the loss of dirigibility on speed motions of inertia mass of elektroprivoda. It is proved that the law of optimum after energozatratami management the electromechanics system at existence of such mode coincides with a management, optimum after a fast-acting. A result as a law of the optimum forming of electromagnetic moment of electric motor in time can be used in the systems of automatic control elektroprivodami of mechanisms of movement of technological machines and many other for the decline of energoemkosti of technological processes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Теорія електропривода: Підручник / М.Г. Попович, М.Г. Борисюк, В.А. Гаврилюк та ін.; За ред. М.Г. Поповича. – Вища шк., 1993. – 494 с.
2. Петров Ю.П. Оптимальное управление електрическим приводом с ограничением по нагреву. – Л.: Энергия, 1971. – 144 с.
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление.- М.: Наука, 1973. – 192 с.
4. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление / Пер. с англ. / Под ред.Ю.И. Топчеева.- М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
5. Ванько В.И., Ермошина О.Е., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учебн. для вузов. 2-е изд / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 488 с.

Щокотова І.В., інженер;

Бережной О.І., студент;

Щокотов А.М., студент

Надійшла до редакції 25 березня 2008 р.