

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Харченко Д.О.

МЕТОДИ ОПИСАННЯ І МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Суми
Вид-во СумДУ
2007

ББК 22.17я7

X22

УДК 519.2.001.57 (042.3)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/1.8-Г-1417 від 20.08.2007р.)*

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Є.Д. Білококос
(Інститут магнетизму НАН України, Київ);

д-р фіз.-мат. наук, проф. О.І. Олемскої
(Інститут прикладної фізики НАНУ, Суми);

д-р фіз.-мат. наук, проф. О.О. Шматько
(Харківський національний університет ім.В.Н.Каразіна, Харків)

Харченко Д.О.

X22 **Методи описання і моделювання стохастичних систем: Навчальний посібник.** — Суми: Вид-во СумДУ, 2007.— 206с.

ISBN 978–966–657–149–9

У посібнику розглянуто основні методи подання стохастичних процесів і систем та основні алгоритми, що найчастіше використовуються для чисельного моделювання. Подано статистичні та теоретико-польові методи дослідження процесів самоорганізації, розглянуто ефекти виникнення упорядкованих станів за сценарієм нерівноважних фазових переходів.

Посібник розрахований на студентів спеціальностей математичного та фізичного напрямків навчання. Він буде корисним для аспірантів та науковців, які мають намір оволодіти стохастичними методами аналізу процесів самоорганізації.

ББК 22.17я7

ISBN 978–966–657–149–9

©Д.О. Харченко, 2007

©Вид-во СумДУ, 2007

Зміст

Вступ	6
Розділ 1 Випадкові величини	12
1.1 Основні характеристики випадкових величин	12
1.1.1 Усереднення	14
1.1.2 Перетворення змінних	18
1.2 Деякі корисні розподіли	19
1.3 Багатовимірні величини та розподіли	23
1.4 Методи моделювання ймовірностей	26
Задачі до розділу 1	31
Розділ 2 Стохастичні процеси та поля	32
2.1 Загальні положення	32
2.1.1 Операції із випадковими процесами	35
2.1.2 Перетворення Фур'є стаціонарних процесів	41
2.1.3 Умова марковості випадкових процесів	44
2.1.4 Вінерівський процес	45
2.2 Розчеплення кореляцій	47
2.2.1 Загальні співвідношення	47
2.2.2 Гаусівський процес	50
2.2.3 Перехід до білого шуму	53
2.2.4 Стохастичні поля	54
Задачі до розділу 2	59
Розділ 3 Стохастичні рівняння	60
3.1 Броунівський рух	60
3.1.1 Рівняння Ланжевена	61
3.1.2 Густина ймовірності	63
3.2 Стохастичні диференціальні рівняння	66
3.2.1 Стохастичне інтегрування	67
3.2.2 Властивості інтеграла Іто	71
3.3 Чисельне розв'язання рівняння Ланжевена	77
Задачі до розділу 3	80

Розділ 4 Рівняння Фоккера—Планка	81
4.1 Рівняння Чепмена—Колмогорова та кінетичне рівняння	81
4.2 Рівняння Фоккера—Планка	84
4.2.1 Мікроскопічний підхід	84
4.2.2 Зв'язок із рівнянням Ланжевена	86
4.2.3 Подання багатопараметричних систем	90
4.2.4 Границі дифузійного процесу	92
4.3 Розв'язання рівняння Фоккера—Планка	95
4.3.1 Стационарний випадок	95
4.3.2 Нестационарний розподіл	98
4.3.3 Ергодична теорема	101
4.4 Моделювання дифузійних процесів	103
4.4.1 Дифузія частинки у ґратковому газі	103
4.4.2 Метод Ланжевена	106
Задачі до розділу 4	107
Розділ 5 Індуковані шумом переходи	108
5.1 Стационарна картина нерівноважних переходів	108
5.1.1 Загальний підхід	108
5.1.2 Модель популяційної динаміки	111
5.1.3 Модель генного відбору	115
5.1.4 Переходи у системі із шумом довільної інтенсивності	119
5.1.5 Багатопараметрична модель	126
5.2 Кінетика нерівноважних переходів	139
5.2.1 Інтегрування у функціональних просторах	139
5.2.2 Оптимальні траєкторії	145
Задачі до розділу 5	151
Розділ 6 Еволюція стохастичної системи	152
6.1 Еволюція лінійної системи	152
6.1.1 Процес Орнштейна—Уленбека	152
6.1.2 Лінійна система із кольоровим шумом	155
6.2 Еволюція нелінійної стохастичної системи	156
6.2.1 Система з білим шумом	158
6.2.2 Кольоровий шум	168

Задачі до розділу 6	174
Розділ 7 Самоорганізація розподілених стохастичних систем .176	
7.1 Загальний підхід	177
7.2 Усереднені характеристики	181
7.3 Наближення середнього поля	181
7.4 Способи моделювання	184
7.5 Індуковані шумом фазові переходи у синергетичній системі	185
7.5.1 Вплив кореляцій адитивного шуму	188
7.5.2 Вплив кореляцій шуму спряженого поля	192
7.5.3 Вплив шуму керуючого параметра	195
Список літератури	199
Предметний покажчик	205

Грішником вже є навіть той, хто намагається арифметичними методами подати випадкові числа.

_____ Джон фон Нейман

Вступ

Поступове розвинення теорій світосприйняття та фізичних явищ показало, що лапласівський детермінізм, який застосовується до опису реальних фізичних систем, не дозволяє повною мірою передбачити або спрогнозувати результат їхньої поведінки. Типовим прикладом тому є механічна задача взаємодії трьох тіл, яка не має аналітичного розв'язку. У складнішому випадку взаємодії $N \gg 1$ тіл велика кількість відповідних рівнянь руху кожного з них має безліч розв'язків, які можуть реалізуватися майже випадковим чином. Ілюстрацією тому є системи із хаотичною динамікою (моделі дивних атракторів). Тут принципову роль відіграють слабкі відхилення від заданих початкових умов, які здатні привести до реалізації інших шляхів еволюції системи і непередбаченої поведінки.

Загалом кожне явище, що спостерігається у реальних умовах та середовищах, є наслідком дії великої кількості зв'язків між різними явищами, процесами еволюції окремих елементів великої фізичної системи тощо. Всю інформацію про такі зв'язки чи то впливи інших процесів на даний знати неможливо. Тому у фізичних теоріях вивчається певна і найсуттєвіша кількість подібного роду зв'язків, що дає можливість встановити закономірності явищ, які досліджуються. При цьому “несуттєвою” частиною за певних причин можна знехтувати. У такому разі динамічні рівняння та їхні розв'язки стають доволі детермінованими і можуть установити характер поведінки таких систем. Однак подібні спрощені моделі не завжди відповідають реальності. Саме “несуттєві”, на перший погляд, зв'язки чи процеси взаємодії здатні у корні змінювати не лише характер еволюції фізико-хімічних, біологічних чи соціоекономічних систем, а також привести взагалі до неочікуваного результату, як-от: виникнення періодичних просторово-часових структур, мутацій генів, революцій, війн чи фінансових крахів відповідно. Відхилення від закономірностей, спричинених неврахованою кількістю зв'язків між елементами

та процесами підсистем, розуміються як випадкові (стохастичні) явища. Відповідні процеси називаються *стохастичними* і пов'язані з неповною інформацією про їхні властивості. Очевидно, що наявність випадковості у рівняннях еволюції приводить до відмови від точних роз'язків і переходу до статистичної картини поведінки систем.

Практично за три останні десятиріччя теоретично та експериментально з'ясовано, що за певних умов випадкові процеси здатні, скоріше, не руйнувати, а стати джерелом утворення різновидів та привести до самоорганізації систем різної природи. Важливими при цьому є системи, що зазнають впливу середовища, яке постійно відхиляється від своїх середніх характеристик. Такі системи є відкритими та нерівноважними і тому здатні до самоорганізації. Особливості їхньої поведінки проявляються вже в тому, що вони не пристосовуються до середніх властивостей середовища, а активно реагують на його вплив. Завдяки цьому в системах спостерігаються якісно нові режими та стани: просторово-часові структури [1–5], індуковані шумом стани [6], аномальна дифузія [7–9], стохастичний резонанс [10, 11], стохастична синхронізація [12], самоорганізована критичність [13–15] тощо. Наведені особливості дозволяють надати випадковості конструктивного характеру і зробити висновок, що процеси самоорганізації суттєво пов'язані із випадковим впливом середовища. Ця ідея набуває все більшого поширення та обговорення з 1984 року після виходу книги В.Хорстхемке та Р.Лефевра «Індуковані шумом переходи» [6], де зібрано основні дані, які доводять організуючу роль *шуму* як випадкового впливу. Розвиток методів статистичного аналізу та запровадження комп'ютерного експерименту при поясненні теоретичних даних дозволяють адекватно провести аналіз випадкових чинників еволюції складних систем.

Статистична динаміка систем, що самоорганізуються, показує, що її еволюція визначається послідовністю мікроскопічних нестійкостей, зв'язок яких приводить до колективної довгоїснуючої моди, яка визначає поведінку всієї системи. Дослідження феноменологічної картини процесу самоорганізації, що подається *фазовим переходом*, викликаним випадковим процесом/*шумом*, досягається у рамках синергетичного підходу. Його використання дозволяє подати нелінійні властивості стоха-

стичної системи, наявність позитивних та негативних зворотних зв'язків, дію скорельованих шумів та простору неоднорідність системи.

Дослідження фазових переходів належить до найбільш привабливих напрямків сучасної теоретичної фізики. Перші кроки у даній теорії були зроблені при дослідженні рівноважних систем, але останні характеризуються зростаючим інтересом до переходів, які відбуваються у системах, далеких від стану рівноваги. Особливу роль при цьому відіграло застосування формалізму фазового переходу на нестійкості, властиві лише відкритим нелінійним системам. Перспективним виявилось застосування теорії фазових переходів до нестійкостей, не лише добре відомих вже понад 100 років, але й до нестійкостей, що виникають у оптичних приладах (лазерах), хімічних системах (полімерних сполуках, реакція Белоусова-Жаботинського), біологічних системах (популяційна динаміка колоній із розподілом праці між видами), соціальних (формування суспільно-політичного устрою) та економічних процесах (прогнозування фінансових ризиків та крахів).

Особливу увагу привертають ефекти самоорганізації, що проходять за сценарієм фазового переходу у системах, підвладних дії випадкових сил. Дослідження фазових переходів у системах, що зазнають дії флуктуаційного середовища, належить до найбільш передових галузей сучасної теоретичної фізики. Очевидно, що це обумовлено суттєвою недооцінкою ролі випадкових чинників, які безпосереднім чином впливають на процеси самоорганізації нерівноважних систем. Добре відомо, що навіть детерміновані системи здатні генерувати *внутрішній шум*, інтенсивність якого зникає при переході до термодинамічної границі. У багатьох випадках він виконує роль дезорганізуючого фактора, що приводить до блукань системи в околі мінімумів вільної енергії. Флуктуації зовнішнього середовища, що задають *зовнішній шум*, не залежать від розміру системи, і тому його інтенсивність значна порівняно з інтенсивністю внутрішнього шуму. Проведені за останні роки систематичні теоретичні та експериментальні дослідження показали, що саме зовнішні флуктуації стають причиною самоорганізації у нерівноважних системах. Це приводить до утворення нових індукованих шумом станів або режимів поведінки, які не мають детерміністичного аналога. Таке структуру-

вання нелінійних систем або переходи від однієї структури до іншої відбувається за аналогією з рівноважними фазовими переходами та переходами у нерівноважних системах при сталій дії середовища.

Характерна особливість систем, які самоорганізуються, полягає у тому, що сумісна дія нелінійності, просторової неоднорідності та скорельованих шумів може привести до реверсивних фазових переходів, при яких упорядкований стан спостерігається у замкненій області значень керуючих параметрів системи. Типовими прикладами реверсивних переходів є утворення фероелектричної фази у сегнетовій солі, втрата ергодичності у розчинах полімерів та переходи між різними типами дефектних структур у процесі пластичної деформації кристала. Така ситуація спостерігається у системі із декількома джерелами флуктуацій (шумів), крос-кореляції яких завдають певної дії на поведінку системи.

Наведені ефекти самоорганізації стохастичних систем та методи їх опису інтенсивно обговорюються у сучасній науковій літературі, але здебільшого опубліковані в іноземних виданнях. Крім того, часто результати переповнені доволі вагомими математичними розрахунками, що ускладнює сприйняття матеріалу чи методу читачем, який не спокушений теорією стохастичних процесів. Достатньо згадати роботи відповідної тематики Колмогорова, Стратоновича, Іто чи Уленбека. Оскільки знання теорії випадкових процесів та методів статистичної фізики є необхідним у житті сучасної людини завдяки їх проникненню практично у всі види наукової діяльності та повсякденність, необхідним стало викладення основ цієї теорії та результатів її використання, щоб не лише привернути увагу зацікавленого читача, але й надати можливість освоїти підходи аналізу та дослідження систем, які перебувають в умовах стохастичності. Основна мета цієї книги — подання з педагогічної точки зору набору практичних засобів подання та моделювання систем, еволюція яких визначається стохастичними обмінними потоками із середовищем.

Посібник умовно складається із двох частин. Перша містить теоретичні підходи подання стохастичних систем та методи їх дослідження, а друга, починаючи з розділу 5, ілюструє ефекти самоорганізації у нелінійних стохастичних системах.

У розділі 1 зібрано основні визначення, методи та способи подан-

ня випадкових величин. Розглянуто підходи, що ґрунтуються на використанні характеристичної функції. Окремо подано основні методи чисельного моделювання випадкових величин із заданими розподілами для проведення комп'ютерного експерименту.

Властивості та методи опису і аналізу випадкових процесів викладено у розділі 2. Розглянуто лінійні перетворення над випадковими процесами. Особливу увагу приділено використанню методу розчеплення кореляцій, що є вступом до теорії процесів із безмежно малим часом кореляції і ділеми Іто-Стратоновича — вибору типу числення, правил диференціювання/інтегрування.

Динамічний підхід, який застосовується при математичному моделюванні та аналізі випадкових процесів, подано у розділі 3. Тут розглядаються основи теорії стохастичних диференціальних рівнянь та методи чисельного моделювання стохастичних процесів. Починаючи із найпростішого прикладу броунівського руху, викладено перехід до нелінійних стохастичних рівнянь. Показано важливість правильного вибору математичних правил числення.

Розділ 4 присвячено викладенню підходів імовірнісного аналізу стохастичних процесів та систем. Тут розглядаються рівняння еволюції густини ймовірностей, його стаціонарні та нестаціонарні розв'язки, зібрано основні методи чисельного моделювання.

У п'ятому розділі висвітлюються ефекти самоорганізації у системах, змінні станів яких не залежать від просторової координати. Розглянуто нерівноважні переходи у однопараметричних системах біологічного типу. Викладено особливості поведінки стохастичної системи при порушенні ергодичності. На підґрунті використання принципу адіабатичного наближення показано вплив стохастичності у синергетичній системі типу Лоренца-Хакена.

Розділ 6 стосується методів опису поведінки колективних мод, що задаються статистичними середніми випадкових процесів і визначають хід еволюції стохастичної системи. Тут розглянуто модель самоподібної стохастичної системи, яка узагальнює широке коло відомих моделей фізичних та біологічних систем. Показано підходи опису систем із так званими білим та кольоровим шумами.

У останньому розділі описуються *індуковані шумом нерівноважні фазові переходи* у просторово розподіленій системі синергетичного типу. Показано принцип застосування польового формалізму, методу усереднення для визначення часової поведінки параметра порядку. Окремо розглянуто синергетичну модель Лоренца-Хакена із неоднорідністю розподілу параметра порядку при врахуванні дії стохастичних джерел кожної з мод.

Цей посібник може бути корисним студентам старших курсів фізичного та математичного напрямків навчання, які прослуховували курси теорії ймовірностей, випадкових процесів, статистичної фізики, та аспірантам і науковцям, зацікавленим дослідженнями систем, далеких від стану рівноваги, де шум є таким за значенням важелем еволюції, як і її детерміністичні складові.

Розділ 1**Випадкові величини**

Цей розділ містить основні дані та положення теорії ймовірностей, викладені у конспективній формі з метою нагадування про елементи теорії випадковостей, які будуть задіяні у подальшому викладенні матеріалу книги. Загалом читач може пропустити цей розділ, повертаючись до нього у разі необхідності при посиланнях до основних методів та підходів подання випадкових величин.

Структура розділу є такою. У підрозділі 1.1 викладено способи подання та опису випадкових величин та їхніх статистичних характеристик. Підрозділ 1.2 містить розподіли випадкових величин, які найчастіше використовуються у реальних дослідженнях. Матеріал підрозділу 1.3 стосується подання випадкових векторів. Нарешті, у підрозділі 1.4 зібрано основні методи моделювання випадкових величин та розподілів.

1.1 Основні характеристики випадкових величин [16–18]

Визначити випадкову змінну ξ означає: по—перше, задати множину її можливих значень (область значень або фазовий простір); по—друге, задати розподіл імовірності на цій множині. Такий фазовий простір може бути:

- *дискретним* — значення дискретно заповнюють область можливих значень;
- *неперервним* — значення неперервно заповнюють певний інтервал;
- *частково дискретним та неперервним*;
- *багатовимірним* — у такому випадку розглядається випадковий вектор.

Імовірність випадкової величини ξ , що розміщується в інтервалі $-\infty < \xi < x$, описується монотонною функцією

$$F(x) = \mathcal{P}(-\infty < \xi < x) = \langle \Theta(x - \xi) \rangle_{\xi}, \quad F(\infty) = 1, \quad (1.1)$$

яка називається *функцією розподілу ймовірностей*, або *інтегральною функцією розподілу*. Використана ступінчаста функція Хевісайда має вигляд

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Через $\langle \dots \rangle_{\xi}$ позначено операцію усереднення за ансамблем реалізацій випадкової величини ξ . Визначення (1.1) відображає метод знаходження ймовірності як границі відношення

$$\mathcal{P}(-\infty < \xi < x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N},$$

де n — ціле число випадання події $\xi < x$ у N незалежних випробуваннях. Імовірність випадкової величини ξ , що розміщується в інтервалі $x < \xi < x + dx$, де dx — нескінченно мала величина, можна записати у вигляді

$$\mathcal{P}(x < \xi < x + dx) = p(x)dx,$$

де функція $p(x)$ називається *густиною ймовірності* та описується формулою

$$p(x) = \frac{d}{dx} \mathcal{P}(-\infty < \xi < x) = \langle \delta(x - \xi) \rangle_{\xi}, \quad (1.2)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака. Інтегральна функція розподілу ймовірності описується через густину ймовірності $p(x)$ формулою

$$F(x) = \mathcal{P}(-\infty < \xi < x) = \int_{-\infty}^x d\xi p(\xi). \quad (1.3)$$

Властивості густини розподілу є такими:

$$p(x) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1. \quad (1.4)$$

Загалом у неперервній області функція розподілу може містити дельта-функції

$$p(x) = \sum_n p_n \delta(x - x_n) + \tilde{p}(x). \quad (1.5)$$

Тоді умова нормування набирає вигляду

$$\sum_n p_n \delta(x - x_n) + \int \tilde{p}(x) dx = 1. \quad (1.6)$$

Фізично це означає, що множина дискретних станів x_n із імовірністю p_n накладається на неперервну область.

1.1.1 Усереднення

Помножуючи рівняння (1.2) на довільну функцію $f(x)$ та інтегруючи за x , одержуємо вираз для середнього значення довільної функції від випадкової величини ξ у вигляді рівняння

$$\langle f(\xi) \rangle_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p(x) \equiv \langle f(x) \rangle. \quad (1.7)$$

З іншого боку, оскільки

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - \xi),$$

то, проводячи усереднення, маємо

$$\langle f(\xi) \rangle_\xi \equiv \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - \xi) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \langle \delta(x - \xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p(x).$$

Важливою величиною, що описує всі статистичні характеристики випадкової величини ξ , є її *характеристична функція*

$$\Phi(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ivx} p(x). \quad (1.8)$$

Знаючи характеристичну функцію, можна одержати як густину ймовірності (перетворення Фур'є)

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v) e^{-ivx},$$

так і моменти

$$M_n \equiv \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n p(x) = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Phi(v) \Big|_{v=0}, \quad (1.9)$$

кумулянти (або семіінваріанти)

$$K_n \equiv \langle \langle x^n \rangle \rangle = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Theta(v) \Big|_{v=0}, \quad (1.10)$$

де $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$ — *кумулянта функція* та інші статистичні характеристики. Моменти та кумулянти випадкової величини ξ виражаються за допомогою рядів Тейлора функцій $\Theta(v)$ та $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_n v^n, \quad \Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n v^n. \quad (1.11)$$

Кумулянти є комбінаціями моментів:

$$\begin{aligned} K_1 &= M_1, \\ K_2 &= M_2 - M_1^2 \equiv \sigma^2, \\ K_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3, \\ K_4 &= M_4 - 4M_3M_1 - 3M_2^2 + 12M_2M_1^2 - 6M_1^4. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Величина σ^2 називається *дисперсією* — розкидом значень випадкової змінної, σ — *середньоквадратичним відхиленням*. Дисперсія характеризує ширину розподілу, а середньоквадратичне відхилення — похибку обчислень за даним розподілом. У більшості випадків, що стосуються гаусівських величин (див. підрозділ 1.2), кумулянти вищих порядків тривіалізуються ($K_n = 0$, $n > 2$), що дозволяє виразити моменти вищих порядків через моменти нижчих порядків.

Розкладання за кумулянтами [19]. Розглянемо алгоритм обчислення кумулянтів вищих порядків $\langle\langle x_1 x_2 x_3 \dots x_n \rangle\rangle$, запропонований Ван Кампенем. Процедура є такою:

- записується послідовність із n точок \dots ;
- ця послідовність розбивається на $p + 1$ підмножин, розставляючи кутові дужки:

$$\langle \dots \rangle \langle \dots \rangle \dots \langle \dots \rangle;$$

- замість точок вміщуються символи $x_1 \dots x_n$ так, щоб були випи-сані усі різні вирази, наприклад:

$$\langle x_1 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_3 x_2 \rangle \neq \langle x_3 \rangle \langle x_1 x_2 \rangle;$$

- береться сума $C_p(x_1, \dots, x_n)$ всіх наведених виразів, що відповідають даному p ;
- кумулянт визначається за формулою

$$\langle\langle x_1 x_2 x_3 \dots x_n \rangle\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p p! C_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (1.13)$$

Приклад 1.1 Кумулянт четвертого порядку $\langle\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle\rangle$

1 $p=0$, один єдиний член $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle \equiv C_0(x_1 x_2 x_3 x_4)$.

2 $p=1$: розбиття $\langle \cdot \rangle \langle \dots \rangle$ дає

$$\langle x_1 \rangle \langle x_2 x_3 x_4 \rangle + \langle x_2 \rangle \langle x_3 x_4 x_1 \rangle + \langle x_3 \rangle \langle x_4 x_1 x_2 \rangle + \langle x_4 \rangle \langle x_1 x_2 x_3 \rangle \equiv D_1,$$

розбиття $\langle \cdot \cdot \rangle \langle \dots \rangle$ дає внесок

$$\langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 x_4 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle \equiv D_2.$$

Таким чином, $C_1(x_1 x_2 x_3 x_4) = D_1 + D_2$.

3 $p=2$: розбиття $\langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle$ дає внесок

$$\begin{aligned} & \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 \rangle \langle x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 \rangle \langle x_4 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle + \\ & + \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \langle x_1 x_4 \rangle + \langle x_2 \rangle \langle x_4 \rangle \langle x_1 x_3 \rangle + \langle x_3 \rangle \langle x_4 \rangle \langle x_1 x_2 \rangle \equiv C_2(x_1 x_2 x_3 x_4). \end{aligned}$$

4 $p=3$: розбиття $\langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle$ дає

$$\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \langle x_4 \rangle \equiv C_3(x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Таким чином,

$$\langle \langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle \rangle \equiv C_0 - C_1 + 2C_2 - 6C_3.$$

Наведений алгоритм дозволяє виразити кумулянти через моменти випадкової величини або моменти вищих порядків через моменти нижчих порядків за умови $K_n = 0$, $n > 2$.

Наступний алгоритм дає можливість виразити моменти вищих порядків через моменти довільної функції. Розглянемо статистичне середнє $\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi$, де $f(x)$ — довільна детермінована функція, така, що написана середня величина існує. Для її обчислення скористаємося таким прийомом. Замість $f(\xi)$ уведемо функцію $f(x + y)$, де y — довільна детермінована величина. Розвиваємо $f(x + y)$ у ряд Тейлора за x :

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y) x^n = e^{x \frac{d}{dy}} f(y),$$

де застосовано оператор зміщення за y . Далі можна скористатися поданням

$$\begin{aligned} \langle \xi f(\xi + y) \rangle_\xi &= \left\langle \xi e^{\xi \frac{d}{dy}} \right\rangle_\xi f(y) = \\ &= \frac{\left\langle \xi e^{\xi \frac{d}{dy}} \right\rangle_\xi}{\left\langle e^{\xi \frac{d}{dy}} \right\rangle_\xi} \left\langle e^{\xi \frac{d}{dy}} \right\rangle_\xi f(y) = \Omega \left(\frac{d}{idy} \right) \langle f(\xi + y) \rangle_\xi, \quad (1.14) \end{aligned}$$

де функція

$$\Omega(v) = \frac{\langle \xi e^{i\xi v} \rangle_\xi}{\langle e^{i\xi v} \rangle_\xi} = \frac{d}{idv} \ln \Phi(v) = \frac{d}{idv} \Theta(v),$$

а $\Phi(v)$ — характеристична функція випадкової величини ξ . Використовуємо для функції $\Theta(v)$ розвинення в ряд Тейлора (1.11), а для функції $\Omega(v)$ одержуємо

$$\Omega(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n. \tag{1.15}$$

Враховуючи, що змінна y у правій частині (1.14) входить лише до комбінацій $\xi + y$, то можна замінити диференціювання за y на диференціювання за ξ (при цьому оператор $\Omega(d/id\xi)$ слід занести під знак усереднення) та припустити, що $y = 0$. У результаті одержуємо рівняння

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi = \left\langle \Omega \left(\frac{d}{id\xi} \right) f(\xi) \right\rangle_\xi,$$

яке завдяки формулі (1.15) можна записати у вигляді ряду за кумулянтами K_n :

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\langle \frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} \right\rangle_\xi. \tag{1.16}$$

1.1.2 Перетворення змінних

Нехай ми використовуємо випадкову змінну

$$\eta = f(\xi)$$

замість випадкової змінної ξ . Застосовуючи визначення густини імовірності нової змінної як середнє від дельта-функції, можна записати

$$\begin{aligned} p_\eta(y) &= \langle \delta(y - \eta) \rangle = \langle \delta(y - f(\xi)) \rangle = \\ &= \int \delta(y - f(x)) p_\xi(x) dx. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Припустивши, що $f_n^{-1}(y)$ є n -м коренем рівняння $f(x) - y = 0$, та використовуючи властивість дельта-функції

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0) \left[\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \right]^{-1} \Big|_{x=x_0},$$

одержуємо

$$p_\eta(y) = \sum_n p_\xi(f_n^{-1}(y)) \left[\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \right]^{-1} \Big|_{x=x_n=f_n^{-1}(y)}. \quad (1.18)$$

В окремому випадку, коли лише одне значення x відповідає кожному значенню y , можна за допомогою інверсії одержати вираз $x = g(y)$, обертаючи умову зв'язку x та y . Тоді перетворення густини імовірності дає

$$p(y) = p(x)J, \quad (1.19)$$

де J — визначник Якобі, $J = |dx/dy|$.

1.2 Деякі корисні розподіли

Гаусівський розподіл. У загальному вигляді цей розподіл записується у вигляді

$$p(x) = N \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.20)$$

де $A > 0$ — стала, що визначає ширину розподілу; B — визначає положення піка; N — стала нормування:

$$N = \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(-B^2/2A).$$

Якщо виразити параметри A , B через середнє $M_1 = -B/A$ та дисперсію $\sigma^2 = A^{-1}$, то маємо

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x - M_1)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.21)$$

Цей розподіл має назву *розподілу Гауса, або нормального розподілу*.

Нехай величина ξ — гаусівська випадкова величина з нульовим середнім та з густиною ймовірності

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Для неї маємо

$$\Phi(v) = \exp \left\{ -\frac{v^2\sigma^2}{2} \right\}, \quad \Theta(v) = -\frac{v^2\sigma^2}{2},$$

а також

$$M_1 = K_1 = \langle x \rangle = 0, \quad M_2 = K_2 = \langle x^2 \rangle = \sigma^2, \quad K_{n>2} = 0.$$

Рекурентне рівняння (1.16) у такому випадку набирає вигляду

$$M_n = (n - 1)\sigma^2 M_{n-2}, \quad n = 2, \dots,$$

звідки випливає, що

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (2n - 1)!!\sigma^{2n}.$$

Для гаусівської розподіленої величини маємо співвідношення

$$\langle x f(x) \rangle = \sigma^2 \left\langle \frac{df(x)}{dx} \right\rangle.$$

Центральна гранична теорема. Нехай існує набір випадкових незалежних змінних $\{\xi_i\}_n$, кожна з яких має однакову густину ймовірності $p(x)$, де $M_{1_i} = 0$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$. Їх сума $\zeta = \sum_i \xi_i$ має такий розподіл:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}} \exp \left(-\frac{y^2}{2n\sigma^2} \right).$$

Тоді можна одержати

$$\langle \zeta^2 \rangle = n\sigma^2, \quad \left\langle \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \right)^2 \right\rangle = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Тому доцільно визначити нормовану суму

$$\eta = \frac{\sum_i \xi_i}{\sqrt{n}}.$$

Для такої суми дисперсією є σ^2 , а розподіл такий:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (1.22)$$

Теорема 1.1 *Якщо навіть $p(x)$ не гаусівські, а будь-які інші розподіли з нульовим середнім та кінцевими дисперсіями σ^2 , то розподіл (1.22) залишається справедливим на границі $n \rightarrow \infty$.*

Розподіл Пуассона. Величина $\xi \equiv n$ — цілочисельна випадкова величина, розподілена за законом Пуассона:

$$p_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle},$$

де $\langle n \rangle$ — середнє значення величини n . Для неї маємо

$$\Phi(v) = \exp\left\{\langle n \rangle (e^{iv} - 1)\right\}, \quad \Theta(v) = \langle n \rangle (e^{iv} - 1),$$

а тому для неї всі кумулянти однакові, тобто

$$K_n = \langle n \rangle.$$

Із формули (1.16) можна одержати вираз

$$\langle n f(n) \rangle = \langle n \rangle \langle f(n+1) \rangle. \quad (1.23)$$

Експоненціальний розподіл. Одним із граничних випадків пуассонівського розподілу є експоненціальний розподіл із густиною ймовірності у вигляді

$$p(x) = (\langle x \rangle)^{-1} e^{-x/\langle x \rangle}. \quad (1.24)$$

Для такого розподілу маємо співвідношення між середнім та дисперсією

$$\sigma^2 = \langle x \rangle^2. \quad (1.25)$$

Рівнорозподіл. Найпростішим розподілом є рівнорозподіл із густиною імовірності

$$p = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.26)$$

Для такого розподілу маємо $\langle x \rangle = (b+a)/2$, $\sigma^2 = (b+a)/12$.

Степеневий розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$p(x) = (\gamma - 1)x_0^{\gamma-1}x^{-\gamma}, \quad \gamma > 1, \quad x \geq x_0 > 0. \quad (1.27)$$

Середнє існує лише за умови $\gamma > 2$:

$$\langle x \rangle = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2}x_0, \quad (1.28)$$

а дисперсія кінцева — за умови $\gamma > 3$:

$$\sigma^2 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma - 3} - \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} \right]^2 \right) x_0^2. \quad (1.29)$$

Розподіл Леві. При $1 < \gamma < 3$ степеневий розподіл переходить у розподіл Леві:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^3}} e^{-1/x}, \quad x \geq 0. \quad (1.30)$$

Середнє та дисперсія для цього розподілу є нескінченними.

Розподіл Максвелла та γ -розподіл. Розподіл молекул газу (розподіл Максвелла) масою m в одновимірному просторі за їх швидкостями v при заданій температурі T має вигляд

$$p(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right). \quad (1.31)$$

Необхідно знайти розподіл за енергіями

$$E = mv^2/2 = f(v).$$

Корені цього рівняння є такими:

$$v_{1,2} = f_{1,2}^{-1}(E) = \pm \sqrt{2E/m}.$$

Якобіан переходу має вигляд

$$\left| \frac{df}{dv} \right|_{v_{1,2}=f_{1,2}^{-1}(E)} = |mv_{1,2}| = \sqrt{2mE}.$$

У результаті маємо

$$p(E) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \frac{1}{\sqrt{2mE}} + \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \frac{1}{\sqrt{2mE}}.$$

Таким чином, розподіл за енергіями (γ - розподіл) має вигляд

$$p(E) = \sqrt{\frac{1}{\pi TE}} \exp\left(-\frac{E}{T}\right). \quad (1.32)$$

1.3 Багатовимірні величини та розподіли

Для багатовимірних випадкових величин $\boldsymbol{\xi} = \{x_1, \dots, x_n\}$ аналогічним чином можна ввести інтегральну та диференціальну функції розподілу (густину розподілу). Для першої маємо таке узагальнення:

$$F(\mathbf{x}) = \langle \Theta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \langle \Theta(x_1 - \xi_1) \Theta(x_2 - \xi_2) \cdots \Theta(x_n - \xi_n) \rangle, \quad (1.33)$$

а для густини одержуємо

$$p(\mathbf{x}) = \langle \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} = \langle \delta(\xi_1 - x_1) \delta(\xi_2 - x_2) \cdots \delta(\xi_n - x_n) \rangle. \quad (1.34)$$

Умова нормування тепер записується у вигляді n -кратного інтеграла

$$\int p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1. \quad (1.35)$$

Зазначимо, що коли випадкова величина ξ може набувати лише дискретних значень ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) із ймовірностями p_i , то аналогом (1.34) є формула

$$p_k = \langle \delta_{x, \xi_k} \rangle,$$

де $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера, $\delta_{i,i} = 1$, $\delta_{i,k \neq i} = 0$.

Вочевидь, що повний статистичний опис буде міститися у характеристичній функції, залежній від вектора \mathbf{v} , яка є нічим іншим як фур'є-перетворенням густини ймовірності випадкового вектора:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \langle e^{i\mathbf{v}\xi} \rangle_{\xi}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}. \tag{1.36}$$

За стандартною процедурою здійснюємо перехід від характеристичної функції до густини, тобто

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{v} \Phi(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}, \tag{1.37}$$

причому безпосередня підстановка буде давати (1.34).

Незважаючи на простоту векторних узагальнень, застосування формалізму усереднення приводить до появи перехресних середніх та кумулянтів. Проводячи покомпонентне диференціювання характеристичної функції, одержуємо, що моменти та кумулянти компонентів випадкового вектора ξ задаються виразами:

$$M_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^{n_1} \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Phi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0}, \quad K_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^{n_1} \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Theta(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0},$$

де $\Theta(\mathbf{v}) = \ln \Phi(\mathbf{v})$, а самі функції $\Theta(\mathbf{v})$ та $\Phi(\mathbf{v})$ виражаються через M_{i_1, \dots, i_n} та K_{i_1, \dots, i_n} за допомогою рядів Тейлора:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}, \tag{1.38}$$

де M_{i_1, \dots, i_n} та K_{i_1, \dots, i_n} — узагальнення моментів та кумулянтів відповідно.

Для пояснення змісту перехресних середніх слід зазначити, що простір випадкових величин (подій) загалом може бути розбитий на декілька підпросторів. Причому випадкові величини (події) із одного підпростору можуть впливати на події в іншому підпросторі. Якщо спостерігається така закономірність, то відповідні величини (події) є статистично

залежними. У разі коли кожний підпростір існує окремо від іншого, то події в одному підпросторі не зумовлюють події в іншому. Тоді випадкові величини із різних підпросторів є статистично незалежними. Математично ці два факти виражаються теоремою Байєса.

Для статистично незалежних випадкових величин, що розбиті на два підпростори, вона дає звичайну факторизацію густин імовірностей кожного підпростору, тобто

$$p(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = p_I(x_1, x_2, \dots, x_s) p_{II}(x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (1.39)$$

Узагальненням такого виразу, коли для кожної випадкової величини відводиться свій підпростір, є формула добутку густин імовірностей:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p_k(x_k). \quad (1.40)$$

Тоді для характеристичної функції маємо добуток

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = \prod_{k=1}^n \Phi(v_k), \quad (1.41)$$

наслідком якого є формула розчеплення моментів

$$\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \rangle = \langle x_1^{m_1} \rangle \langle x_2^{m_2} \rangle, \quad (1.42)$$

де m_1 та m_2 — цілі величини. Очевидно, що перехресні кумулянти тривіалізуються: $\langle \langle x_i^{m_1} x_j^{m_2} \rangle \rangle = 0$.

У складнішому випадку маємо справу з умовними густинами, що задають, наприклад, імовірність реалізації $p(x_1, \dots, x_s | x_{s+1}, \dots, x_n)$ значень x_1, \dots, x_s за умови, що інші змінні x_{s+1}, \dots, x_n вже набули своїх значень. У такому разі факторизації характеристичних функцій та моментів не відбувається, натомість з'являються крос-кореляції випадкових величин:

$$K_{ij} \equiv \langle \langle x_i x_j \rangle \rangle = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \langle \delta x_i \delta x_j \rangle. \quad (1.43)$$

Таким чином, одержуємо матрицю кореляцій

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \langle\langle x_i x_j \rangle\rangle. \tag{1.44}$$

У прикладних розрахунках часто використовується матриця коефіцієнтів кореляцій, елементи якої подаються нормованими величинами

$$\rho_{ij} = \frac{\langle\langle x_i x_j \rangle\rangle}{\sqrt{\langle\langle x_i^2 \rangle\rangle \langle\langle x_j^2 \rangle\rangle}}, \tag{1.45}$$

зміст яких є таким: якщо $\rho_{ij} > 0$, то збільшення/зменшення однієї величини, наприклад x_i , спричиняє збільшення/зменшення іншої (x_j); при $\rho_{ij} < 0$ збільшення/зменшення однієї величини, наприклад x_i , спричиняє зменшення/збільшення іншої (x_j); при $\rho_{ij} = 0$, де $i \neq j$, взаємні кореляції відсутні, тобто величини є статистично незалежними.

Якщо величина є випадковим гаусівським вектором із компонентами ξ_i ($\langle\xi_i\rangle_{\xi} = 0$, $i = 1, \dots, n$), то характеристична функція описується рівнянням

$$\Phi(\mathbf{v}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 v_i v_j \right\}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 v_i v_j,$$

де $\langle\xi_i \xi_j\rangle \equiv \sigma_{ij}^2$, а за індексами, що повторюються, виконується додавання.

1.4 Методи моделювання ймовірностей [20, 21]

Розглянемо процес генерування випадкових величин, розподілених згідно з відомими законами.

Слід установити співвідношення між густиною ймовірності $p(x)$ та випадковою величиною ξ , де $\xi \in [0, 1]$ ($p_u(0 \leq \xi \leq 1) = 1$, у протилежному випадку $p_u(\xi) = 0$).

Метод інверсії. За умови існування інтегральної функції розподілу $F(x)$ проведемо інверсію імовірності

$$F(x) = \xi \quad , \tag{1.46}$$

так що

$$x = F^{-1}(\xi). \quad (1.47)$$

Оскільки ξ розподілена рівномірно на одиничному відрізку, то і $F(x)$, пов'язана з ξ (1.47), також розподілена рівномірно. Імовірність того, що $F(x)$ розміщена в інтервалі $[F(x), F(x) + dF(x)]$, дорівнює $dF(x)$, і згідно з (1.46) дорівнює $d\xi$. Виходячи зі співвідношення $dF(x)/dx = p(x)$ та визначення $p(\xi)$ для $0 \leq \xi \leq 1$, випливає

$$dF(x) = p(x)dx = p_u(\xi)d\xi. \quad (1.48)$$

Звідси бачимо, що x розподілена з густиною ймовірності $p(x)$.

Необхідні умови для методу такі:

- 1) інтегральна функція розподілу повинна обчислюватися аналітично або чисельно;
- 2) співвідношення (1.46) повинно розв'язуватися аналітично.

Приклад 1.2 Експоненціальний розподіл

Для моделювання експоненціального розподілу використовуємо метод інверсії. Інтегральна функція розподілу $F(x) = \int_0^x p(x')dx'$, що відповідає (1.24), має вигляд

$$F(x) = 1 - e^{-x/\langle x \rangle} = \xi, \quad \xi \in [0, 1].$$

Тоді

$$x = -\langle x \rangle \ln(1 - \xi) = -\langle x \rangle \ln(\xi).$$

Результат порівняння теоретичної кривої із експериментальною подано на рис. 1.1.

Метод Бокса–Мюллера. Цей метод використовується при генеруванні гаусівських розподілених змінних. Він ґрунтується на розгляді двох

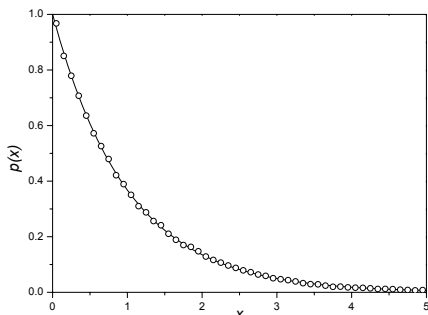


Рисунок 1.1 — Порівняння теоретичної та експериментальної кривих експоненціального розподілу при $\langle x \rangle = 1$ (суцільна лінія — теорія, кола — чисельний експеримент)

незалежних змінних u, t , які є статистично незалежними та підпорядковуються розподілам:

$$p(t)dt = (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}dt,$$

$$p(u)du = (2\pi)^{-1/2}e^{-u^2/2}du.$$

Уводячи нові змінні r, θ , для яких $t = r \cos \theta, u = r \sin \theta$, замість

$$p(t)p(u)dtdu = (2\pi)^{-1}e^{-(t^2+u^2)/2}dtdu,$$

маємо

$$p(r)p(\theta)drd\theta = (2\pi)^{-1}re^{-r^2/2}drd\theta.$$

Одержана конструкція подається у вигляді двох окремих розподілів, що моделюються методом інверсій:

$$r = [2 \ln(1/\xi_1)]^{1/2},$$

$$\theta = 2\pi\xi_2.$$

Повертаючись назад до гаусівських змінних, одержуємо

$$\eta_1 = [2 \ln(1/\xi_1)]^{1/2} \cos(2\pi\xi_2),$$

$$\eta_2 = [2 \ln(1/\xi_2)]^{1/2} \sin(2\pi\xi_1),$$
(1.49)

де η_1, η_2 є незалежними.

 Приклад 1.3 Розподіл Гауса

Для моделювання розподілу Гауса скористаємося методом Бокса-Мюллера, який можна узагальнити введенням середнього стохастичної величини x та її дисперсії. Це досягається додаванням, наприклад, до η_1 числа a , яке відповідає середньому значенню x та множенням виразу для η_1 на σ — середньоквадратичне відхилення. Отже, одержуємо узагальнення

$$\tilde{\eta}_1 = a + \sigma [2 \ln(1/\xi_1)]^{1/2} \cos(2\pi\xi_2).$$

Результат порівняння теоретичної кривої із експериментальною подано на рис. 1.2.

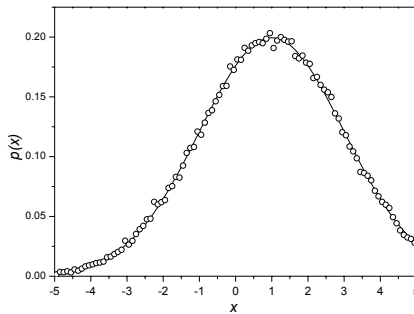


Рисунок 1.2 — Порівняння теоретичної та експериментальної кривих розподілу Гауса при $a = 1$, $\sigma = 2$ (суцільна лінія — теорія, кола — чисельний експеримент)

Метод фон Неймана. Нехай змінна x належить інтервалу $a \leq x \leq b$, який не обов'язково є фінітним. Розподіл можна записати у вигляді

$$p(x) = C\varphi(x)\psi(x).$$

Розподіл $\psi(x)$ генерується одним із вищенаведених методів, причому він має містити інтервал (a, b) . Функція $\varphi(x)$ є відношенням $p(x)$ та $\psi(x)$,

нормованим так, що максимальне значення дорівнює 1:

$$C\varphi(x) = \begin{cases} p(x)/\psi(x) & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Алгоритм моделювання є таким:

- 1 Вибрати змінну x' із $\psi(x)$.
- 2 Обчислити $\varphi(x)$ і порівняти його з ξ , вибраним із рівнорозподілу. Якщо $\varphi(x') > \xi$, то x' береться як змінна, що задовольняє розподіл $p(x)$, інакше — повернутись на крок 1.

Приклад 1.4 γ -розподіл

$$p(x)dx = \frac{x^{b-1}}{\Gamma(b)}e^{-x}dx, \quad x \geq 0, \quad b > 0.$$

Для розподілу $\psi(x)$ можна вибрати

$$\psi(x, \beta) = \beta e^{-\beta x} dx.$$

Тоді

$$C\varphi(x) = \frac{x^{b-1}}{\beta\Gamma(b)}e^{-x(1-\beta)}.$$

Функція $\varphi(x)$ має максимум при $x_0 = (b-1)/(1-\beta)$. У цій точці обчислюємо величину

$$C = \frac{(b-1)^{b-1}e^{(1-b)}}{\Gamma(b)\beta(1-\beta)^{b-1}}.$$

Вона мінімізується за умови $\beta = 1/b$. Тоді

$$\psi(x)dx = e^{-x/b}dx/b, \quad \varphi(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{b-1} e^{(b-1)(1-x/b)}, \quad C^{-1} = b^{-b}\Gamma(b)e^{b-1}.$$

Для більш детального вивчення подання та аналізу випадкових величин читач може звернутися до книг [16–19]. Додаткові методи моделювання випадкових величин можна знайти у книгах [20–22].

Питання для самоконтролю

- 1 Поняття фазового простору випадкової змінної.
- 2 Властивості інтегральної та диференціальної функцій розподілу
- 3 Зміст характеристичної та кумулянтної функцій, способи використання.
- 4 Відмінність статистично залежних та незалежних змінних.
- 5 Зміст коефіцієнта кореляції.

Задачі до розділу 1

ЗАДАЧА 1.1 Знайти функцію розподілу величини x , якщо характеристична функція має вигляд $\Phi(v) = \exp\left(ia v - \frac{\sigma^2 v^2}{2}\right)$.

ЗАДАЧА 1.2 Довести, що для випадкової величини $y = \sum_i^N x_i$, де густина ймовірності $p(y) = \prod_i^N p(x_i)$, $p(x) = \frac{1}{2}[\delta(x - a_0) + \delta(x + a_0)]$, характеристична функція $\Phi(v) = [\cos va_0]^N$. Знайти $\langle x_i \rangle$, $\langle\langle x_i \rangle\rangle$.

ЗАДАЧА 1.3 Для гаусівської величини x із $\langle x \rangle = 0$ довести справедливість виразу $\langle x e^{\alpha x} \rangle = \alpha \langle x^2 \rangle e^{\alpha^2 \langle x^2 \rangle / 2}$.

ЗАДАЧА 1.4 Побудувати генератор випадкових чисел, розподілених з густиною ймовірності $p(x) = (\gamma - 1)x_0^{\gamma-1}x^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, $x \geq x_0 > 0$. Порівняти аналітичний вигляд густини ймовірності з експериментально одержаним

ЗАДАЧА 1.5 Побудувати генератор випадкових чисел, розподілених з густиною ймовірності $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^3}} e^{-1/x}$, $x \geq 0$. Порівняти аналітичний вигляд густини ймовірності з експериментально одержаним

ЗАДАЧА 1.6 Провести моделювання розподілів $p(x) = C(x + 1)^{3/4}$ та $p(x) = C|\sin x|$. Порівняти аналітичний вигляд густин ймовірностей з експериментально одержаними.

ЗАДАЧА 1.7 Побудувати генератор випадкових чисел, розподілених з густиною ймовірності $p(E)dE = \frac{1}{\sqrt{\pi TE}} e^{-E/T}$. Порівняти аналітичний вигляд густини ймовірності з експериментально одержаним.

Розділ 2

Стохастичні процеси та поля

У даному розділі подано основні визначення та методи подання послідовностей випадкових величин, які реалізуються у часі, — випадкових процесів. Матеріал розділу є продовженням теорії ймовірностей, у ньому зібрано найбільш важливі теореми, підходи та методи аналізу випадкових процесів. Цей розділ є важливим для подальшого подання матеріалу, оскільки має на меті підготувати читача оперувати із стохастичними процесами та полями, які можуть бути незалежними або залежними один від одного.

У підрозділі 2.1 викладено основні положення для визначення випадкового процесу, його усереднених характеристик та кореляцій, розглянуто лінійні операції над процесами, перетворення Фур'є. Особливо розглянуто один із марковських процесів, на основі якого далі розвивається теорія. Аналіз кореляційних властивостей випадкових процесів проводиться у підрозділі 2.2, де розглядаються загальна процедура розчеплення кореляцій, її застосування для гаусівських процесів.

2.1 Загальні положення

Якщо задано випадкову (стохастичну) змінну ξ , то з неї можна вивести нескінченну кількість інших стохастичних змінних ζ за допомогою певного відображення $f(\xi)$, де сама функція f може залежати від часу t :

$$\zeta_{\xi}(t) = f(\xi, t). \quad (2.1)$$

Таку функцію називають *випадковим процесом*. Таким чином, стохастичний процес — функція двох змінних, перша з яких — час, а друга — стохастична змінна ξ . Якщо задано значення для ξ таке, що дорівнює x , то $x_z(t) = f(z, t)$ є *реалізацією*. Стохастичний процес подається як ансамбль реалізацій.

Якщо ми маємо випадкову функцію $x(t)$ (стохастичний процес), то всі її статистичні характеристики у фіксований момент часу t описуються

одночасовою густиною ймовірності

$$p(t; x) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle, \quad (2.2)$$

середнє обчислюється за формулою

$$\langle f(x(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) p(t; x).$$

Інтегральна функція розподілу для цього процесу, яка визначає ймовірність того, що в момент часу t процес $x(t) < X$, обчислюється за формулою

$$\mathcal{F}(t, X) = \mathcal{P}(x(t) < X) = \int_{-\infty}^X dx p(t; x),$$

а тому

$$\mathcal{F}(t, X) = \langle \Theta(X - x(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (2.3)$$

де $\Theta(x)$ — функція Хевісайда.

Зазначимо, що усереднена сингулярна дельта-функція Дірака у (2.2), яка параметрично залежить від часу

$$\varphi(t; x) = \delta(x(t) - x), \quad (2.4)$$

називається *індикаторною функцією*.

За індукцією можна одержати вираз для n - точкової густини ймовірності

$$p(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) \rangle,$$

де n - точкова індикаторна функція

$$\varphi(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = \delta(x(t_1) - x_1) \dots \delta(x(t_n) - x_n).$$

Процес $x(t)$ називається *стаціонарним у часі*, якщо всі його статистичні характеристики є інваріантними відносно зсування у часі на довільну величину τ , тобто

$$p(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; x_1, \dots, x_n) = p(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n)$$

або якщо ввести моменти

$$\langle x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n) \rangle = \int x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n)p(t; x)dx,$$

то стаціонарність означає

$$\langle x(t_1 + \tau)x(t_2 + \tau)\dots x(t_n + \tau) \rangle = \langle x(t_1)x(t_2)\dots x(t_n) \rangle.$$

Окремо потрібно розглядати кумулянтну функцію другого порядку

$$K(t_1, t_2) \equiv \langle \langle x(t_1)x(t_2) \rangle \rangle = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle, \quad (2.5)$$

яка задає кореляційні властивості випадкового процесу (*автокореляційна функція*). Якщо середнє $\langle x(t) \rangle = 0$, то перша складова подає автокорелятор у вигляді

$$C_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle. \quad (2.6)$$

Тоді як одночасова густина ймовірності взагалі не залежить від часу, автокорелятор залежить лише від часової різниці

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(t_1 - t_2) \quad (2.7)$$

і не змінюється при відніманні сталої. Кореляційна функція є симетричною функцією, тобто $C_x(\tau) = C_x(-\tau)$. Визначення (2.7) дозволяє записати

$$C_x(\tau) = \langle x(t_1)x(t_1 + \tau) \rangle = \langle x(0)x(\tau) \rangle.$$

За своїм змістом вона еквівалентна коефіцієнту кореляції: $C_x(\tau) > 0$ означає прямий зв'язок значень випадкового процесу у різних моментах часу; $C_x(\tau) < 0$ — збільшення значення змінної x у момент часу $t = 0$ буде приводити до зменшення x у момент $t = \tau$; при $C_x(\tau) = 0$ значення $x(0)$ та $x(\tau)$ є статистично незалежними. Кореляційна функція задає ефекти пам'яті у стохастичному процесі — як довго процес відчуває збурення, що відбулися у момент $t = 0$. Існує стала τ_c , при якій $C(t_1, t_2)$ спадає до нуля або стає нехтовно малою для $|t_1 - t_2| > \tau_c$. Константа τ_c називається *автокореляційним часом*.

Крім автокореляційної функції, на практиці використовується *крос-кореляційна функція*, визначена як $K_{xy}(t_1, t_2) = \langle \langle x(t_1)y(t_2) \rangle \rangle$. Якщо два процеси мають нульове середнє, то маємо крос-кореляційну функцію $C_{xy}(t_1, t_2) = \langle x(t_1)y(t_2) \rangle$, яка показує статистичну залежність одного процесу у момент t_2 від значення другого процесу у момент t_1 . При $K_{xy}(t_1, t_2) = 0$ два процеси є статистично незалежними.

Крос-кореляційна функція має таку властивість симетрії:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t), \quad (2.8)$$

яка говорить про те, що перестановка аргументів у кореляційній функції веде до тієї ж кореляційної функції для випадкових процесів, узятих у зворотному порядку.

Як і для випадкових величин, для процесів можна ввести нормовану кореляційну функцію $|R(t, t')| \leq 1$, що визначається як коефіцієнт кореляції значень двох випадкових процесів, які відповідають двом навмання вибраним значенням, наприклад, $x(t)$ та $y(t')$:

$$R(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{K_{xx}(t, t)K_{yy}(t', t')}}. \quad (2.9)$$

Така функція володіє всіма вищезазначеними властивостями кореляційних функцій.

2.1.1 Операції із випадковими процесами

Додавання. Розглянемо випадковий процес $z(t)$, що одержується як сума

$$z(t) = x(t) + y(t), \quad (2.10)$$

причому для вхідних вважається, що середні $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$ та кореляційні функції $K_{xx}(t, t')$, $K_{yy}(t, t')$, $K_{xy}(t, t')$ є відомими. Знайдемо середнє та автокореляційну функцію процесу $z(t)$.

Для середнього із теореми додавання випадкових величин маємо

$$\langle z(t) \rangle = \langle x(t) \rangle + \langle y(t) \rangle. \quad (2.11)$$

Обчислюючи флуктуацію $\delta z(t) = z(t) - \langle z(t) \rangle$, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} \langle \delta z(t) \delta z(t') \rangle = & \langle \delta x(t) \delta x(t') \rangle + \langle \delta y(t) \delta y(t') \rangle + \\ & + \langle \delta x(t) \delta y(t') \rangle + \langle \delta y(t) \delta x(t') \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оскільки за визначенням $K_{\mu\nu}(t, t') \equiv \langle \delta\mu(t) \delta\nu(t') \rangle$, то одержуємо результат

$$K_{zz}(t, t') = K_{xx}(t, t') + K_{yy}(t, t') + K_{xy}(t, t') + K_{yx}(t, t'). \quad (2.13)$$

Скориставшись властивістю симетрії (2.8), маємо

$$K_{zz}(t, t') = K_{xx}(t, t') + K_{yy}(t, t') + K_{xy}(t, t') + K_{xy}(t', t). \quad (2.14)$$

Узагальнюючи наведене, можемо записати основні формули. У разі подання

$$z(t) = \sum_{\mu=1}^N x_{\mu}(t), \quad (2.15)$$

для статистичних середніх одержуємо

$$\langle z(t) \rangle = \sum_{\mu=1}^N \langle x_{\mu}(t) \rangle, \quad (2.16)$$

$$K_{zz}(t, t') = \sum_{\mu, \nu=1}^N K_{x_{\mu}x_{\nu}}(t, t'). \quad (2.17)$$

Очевидно, що у разі статистичної незалежності вхідних випадкових процесів останній вираз спрощується:

$$K_{zz}(t, t') = \sum_{\mu=1}^N K_{x_{\mu}x_{\mu}}(t, t'), \quad (2.18)$$

де додаються лише автокореляційні функції.

Диференціювання. Нехай існує випадковий процес $x(t)$, такий, що для нього існує похідна

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (2.19)$$

яка теж є випадковим процесом, або випадковою функцією, можливі реалізації якої подають похідні відповідних реалізацій випадкової функції $x(t)$. Обчислимо статистичні середні для процесу $y(t)$.

Скориставшись дискретним визначенням похідної за часом, для середнього маємо

$$\langle y(t) \rangle = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \right\rangle = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle x(t + \delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle}{\delta t}. \quad (2.20)$$

Таким чином, приходимо до зв'язку

$$\langle y(t) \rangle = \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt}, \quad (2.21)$$

з якого можна бачити комутативність операцій усереднення та диференціювання.

Для автокореляційної функції слід розглянути флуктуацію $\delta y(t)$ та скористатись визначеннями $\delta y(t) = dx(t)/dt$ та $K_{yy}(t, t') = \langle \delta y(t) \delta y(t') \rangle$, що дає

$$K_{yy}(t, t') = \left\langle \frac{d\delta x(t)}{dt} \frac{d\delta x(t')}{dt'} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \langle \delta x(t) \delta x(t') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_{xx}(t, t'). \quad (2.22)$$

Аналогічним чином одержуємо крос-кореляційну функцію

$$K_{xy}(t, t') = \left\langle \delta x(t) \frac{d\delta x(t')}{dt'} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t'} \langle \delta x(t) \delta x(t') \rangle = \frac{\partial}{\partial t'} K_{xx}(t, t'). \quad (2.23)$$

Очевидно, що існує зв'язок

$$K_{yy}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} K_{xy}(t, t'). \quad (2.24)$$

Проводячи узагальнення, отримуємо, що для процесу $y_{(n)}(t)$, поданого у вигляді n -ї похідної від вихідного $x(t)$, маємо:

$$\langle y_{(n)}(t) \rangle = \frac{d^n \langle x(t) \rangle}{dt^n}, \quad (2.25)$$

$$K_{y_{(n)}y_{(n)}}(t, t') = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial t'^n} K_{xx}(t, t'), \quad (2.26)$$

$$K_{y_{(n)}y_{(m)}}(t, t') = \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n \partial t'^m} K_{xx}(t, t'). \quad (2.27)$$

Приклад 2.1 Обчислення середнього та кореляційних функцій

Вважається, що для випадкового процесу $x(t)$ задано

$$\langle x(t) \rangle = a + bt + ct^2,$$

$$K_{xx}(t, t') = \sigma^2 e^{-\alpha|t-t'|} \left(\cos \omega(t-t') + \frac{\alpha}{\omega \sin \omega|t-t_0|} \right).$$

Обчислимо середнє та автокореляційну функцію процесу $y(t) = dx(t)/dt$.

Для середнього безпосереднім диференціюванням отримуємо

$$\langle y(t) \rangle = b + 2ct.$$

Для знаходження $K_{xy}(t, t')$ отримаємо спочатку $K_{xy}(t, t')$. При $t' > t$

$$K_{xy}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} K_{xx}(t, t') = -\sigma^2 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\alpha(t'-t)} \sin \omega(t' - t).$$

У випадку $t' < t$ маємо

$$K_{xy}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} K_{xx}(t, t') = \sigma^2 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\alpha(t-t')} \sin \omega(t - t').$$

Тому загальний результат є таким:

$$K_{xy}(t, t') = \sigma^2 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\alpha|t-t'|} \sin \omega(t - t').$$

Аналогічним чином одержуємо $K_{yy}(t, t')$. При $t < t'$

$$K_{yy}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} K_{xy}(t, t') = \sigma^2 (\alpha^2 + \omega^2) e^{-\alpha(t'-t)} \left[\cos \omega(t - t') + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega(t - t') \right],$$

а при $t > t'$

$$K_{yy}(t, t') = \sigma^2(\alpha^2 + \omega^2)e^{-\alpha(t-t')} \left[\cos \omega(t-t') - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega(t-t') \right].$$

Узагальнюючи останні дві формули, приходимо до шуканого результату

$$K_{yy}(t, t') = \sigma^2(\alpha^2 + \omega^2)e^{-\alpha|t-t'|} \left[\cos \omega(t-t') - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega|t-t'| \right].$$

Інтегрування. Нехай існує інтеграл

$$y(s) = \int_a^b \phi(s, t)x(t)dt, \quad (2.28)$$

де $x(t)$, $\phi(s, t)$ — випадкова та детерміністична функції відповідно. Вважається, що заданими є $\langle x(t) \rangle$ та $K_{xx}(t, t')$. Скориставшись комутативністю операцій усереднення та диференціювання, можемо записати

$$\langle y(s) \rangle = \left\langle \int_a^b \phi(s, t)x(t)dt \right\rangle = \int_a^b \phi(s, t) \langle x(t) \rangle dt. \quad (2.29)$$

Для знаходження кореляційної функції скористаємося визначенням флуктуації $\delta y(t) = \int_a^b \phi(s, t)\delta x(t)dt$, що дає можливість обчислити

$$\begin{aligned} K_{yy}(s, s') &= \left\langle \int_a^b dt \int_a^b dt' \phi(s, t)\delta x(t)\phi(s', t')\delta x(t') \right\rangle = \\ &= \int_a^b dt \int_a^b dt' \phi(s, t)\phi(s', t') \langle \delta x(t)\delta x(t') \rangle = \\ &= \int_a^b \int_a^b \phi(s, t)\phi(s', t')K_{xx}(t, t')dtdt', \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$K_{yy}(s, s) = \int_a^b \int_a^b \phi(s, t)\phi(s, t')K_{xx}(t, t')dtdt'. \quad (2.31)$$

Для крос-корелятора отримуємо

$$K_{xy}(t, s) = \int_a^b \phi(s, t') K_{xx}(t, t') dt'. \quad (2.32)$$

Таким чином, знання середнього та кореляційної функції випадкового процесу дозволяє виконувати над стохастичним процесом елементарні перетворення, а також лінійні алгебраїчні операції.

Приклад 2.2 Середнє та кореляційна функція інтегрованого процесу

Вважається, що для випадкового процесу $x(t)$ задано

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= a + bt, \\ K_{xx}(t, t') &= \sigma^2 e^{-\alpha|t-t'|}. \end{aligned}$$

Обчислимо середнє та автокореляційну функцію процесу $y(s) = \int_0^s x(t) dt$.

Для середнього одержуємо

$$\langle y(t) \rangle = as + bs^2/2.$$

При обчисленні корелятора використовуємо формулу (2.30) з $\phi(s, t) = 1$ в інтервалі $(0, s)$, яка при $s < s'$ дає

$$\begin{aligned} K_{yy}(s, s') &= \int_0^s \int_0^{s'} K_{xx}(t, t') dt dt' = \sigma^2 \int_0^s \int_0^{s'} e^{-\alpha|t-t'|} dt dt' = \\ &= \sigma^2 \int_0^s dt \left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} + \int_t^{s'} e^{-\alpha(t-t')} dt' \right\} = \\ &= \sigma^2 \int_0^s \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha(s'-t)} - 1}{\alpha} \right\} dt = \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \left\{ 2\alpha s - 1 + e^{-\alpha s} + e^{-\alpha s'} - e^{-\alpha(s-s')} \right\}. \end{aligned}$$

Для обчислення випадку $s > s'$ достатньо скористатися властивістю симетрії кореляційної функції, переставляючи аргументи s та s' . Тоді шукана функція є такою:

$$K_{yy}(s, s') = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \left\{ 2\alpha \min(s, s') - 1 + e^{-\alpha s} + e^{-\alpha s'} - e^{-\alpha|s-s'|} \right\}.$$

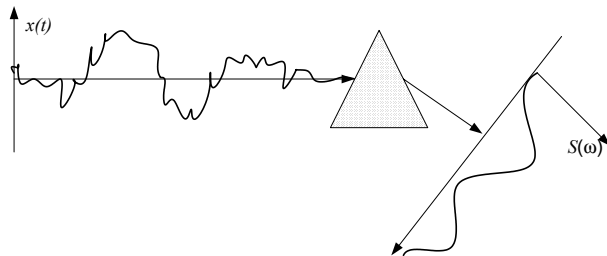


Рисунок 2.1 — Спектральне розкладання світла — спектральна густина світлового джерела

2.1.2 Перетворення Фур'є стаціонарних процесів

При експериментальних вимірюваннях маємо справу не стільки із кореляційною функцією, скільки з її фур'є-образом. Подання детерміністичного процесу/сигналу у просторі частот дозволяє визначити резонансні частоти, що задають періоди, та відповідне упорядкування у сигналі. Такі резонансні частоти відповідають положенням піків на рис.2.1 і задають часову структуру процесу. При розгляданні стохастичних процесів на відповідній частотній залежності піки взагалі можуть бути відсутніми, але можна прослідкувати спектр частот, які присутні у випадковому сигналі. При цьому вдається виділити частоту обрізання спектра, або встановити необхідні частотні асимптотики вимірюваних величин, відносячи систему або процес до певного класу універсальності.

Розглянемо процедуру переходу від кореляційної функції до її частотного образу. Нехай задано процес $x(t)$, який загалом може бути поданий у вигляді інтеграла Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.33)$$

За умови реальності $x(t)$ для амплітуд маємо співвідношення $A(-\omega) = A^*(\omega)$. Далі обчислимо інтеграл від $x^2(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A(\omega)e^{i\omega t} A^*(\omega')e^{-i\omega' t}.$$

Використовуючи властивість дельта-функції

$$\delta(\omega) = (1/2\pi) \int e^{i\omega t} dt,$$

приходимо до результату

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A(\omega)A^*(\omega')\delta(\omega - \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |A(\omega)|^2.$$

де враховано властивість дельта-функції

$$f(a) = \int \delta(x - a)f(x)dx.$$

Далі обчислимо середнє за часом за умови $|A(-\omega)|^2 \equiv |A(\omega)|^2$:

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \langle S(\omega) \rangle d\omega, \tag{2.34}$$

де введено позначення

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |A(\omega)|^2. \tag{2.35}$$

Розглянемо фур'є-образ корелятора $C(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' A(\omega)A^*(\omega')e^{i(\omega - \omega')t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Перепишучи інтеграл у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\omega = \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \cos(\omega\tau) d\omega$$

та усереднюючи за часом приходимо до шуканого результату

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (2.37)$$

де $C(0) = \langle x^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} \langle x^2(\omega) \rangle d\omega$. Очевидно, маємо зворотне перетворення Фур'є:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (2.38)$$

Одержаний результат відомий як теорема Вінера-Хінчина [18]. Функція $S(\omega)$ називається спектральною густиною.

Приклад 2.3 Експоненціальні кореляції

Для експоненціальної кореляційної функції

$$C(\tau) = C_0 e^{-\tau/\tau_c}$$

спектральна густина має вигляд

$$S(\omega) = C_0 \frac{2\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2}.$$

У граничних випадках $\omega \ll \tau_c^{-1}$ енергетичний спектр майже не залежить від частоти, тобто в спектрі можуть бути рівноправно подані всі частоти. У такому разі говорять про *білий шум* нижче граничної частоти $\omega_c = \tau_c^{-1}$.

2.1.3 Умова марковості випадкових процесів

Розглянемо n реалізацій випадкових змінних, де $n-1$ випадкові змінні набувають певних значень, наприклад, x_2, x_3, \dots, x_n . Задачею є визначення густини ймовірності для першої змінної. Така ймовірність є умовною $p(x_1|x_2, \dots, x_n)$ і виражає ймовірність реалізації x_1 за умови, що набір випадкових змінних, крім $\xi_1 = x_1$, визначено зі значеннями x_2, x_3, \dots, x_n .

Очевидно, ймовірність $p(x_1, \dots, x_n)dx_1, \dots, dx_n$ того, що випадкові змінні ξ_i , ($i = 1, \dots, n$) набувають значення в інтервалі $x_i \leq \xi_i \leq x_i + dx_i$, є ймовірністю $p(x_1|x_2, \dots, x_n)dx_1$ того, що перша змінна розміщена в інтервалі $x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + dx_1$ і що інші змінні набувають значень $\xi_i = x_i$, ($i = 2, \dots, n$) домножена на ймовірність $p(x_2, \dots, x_n)dx_2, \dots, dx_n$ того, що останні $n - 1$ змінні лежать в інтервалі $x_i \leq \xi_i \leq x_i + dx_i$ ($i = 2, \dots, n$), тобто

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1|x_2, \dots, x_n)p(x_2, \dots, x_n). \quad (2.39)$$

Інтегруючи за однією змінною, можна одержати

$$p(x_2, \dots, x_n) = \int dx_1 p(x_1, \dots, x_n),$$

що приводить до запису

$$p(x_1|x_2, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{\int dx_1 p(x_1, \dots, x_n)}.$$

і *Марковським* називається процес, якщо його умовна ймовірність залежить лише від величини $\xi(t_{n-1}) = x_{n-1}$, визначеної у попередній момент часу, тобто перехід у стан t_n із стану в момент t_{n-1} не залежить від передісторії.

Математично цей факт виражається як

$$p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.40)$$

Властивість марковості дозволяє записати

$$p(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1), \quad (2.41)$$

з іншого боку, можна одержати вираз

$$\begin{aligned} p(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) &= \\ &= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \times \dots \times \\ &\times p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Марковський процес — це найпростіший процес, що описує причинний зв'язок між подіями, які відбулися в різні моменти часу.

2.1.4 Вінерівський процес

Вінерівський процес є марковським і визначається як придатна границя процесу випадкових блукань. Формулювання задачі про випадкові блукання було дано Пірсоном у 1906 р. Вважається, що частинка, рухаючись із початкової точки, здійснює однакові кроки у довільному напрямку за однакові моменти часу. Імовірність того, що об'єкт у момент $t = n\tau$ буде перебувати в точці $x = ra$, виражається в термінах біноміального розподілу

$$F(x(nt) = ra) = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}.$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \langle x(n\tau) \rangle &= 0, \\ \langle x(n\tau)^2 \rangle &= na^2. \end{aligned}$$

Для $n \gg 1$ можна використати теорему Муавра–Лапласа та апроксимувати біноміальний розподіл гаусівським:

$$F(x(n\tau) \leq ra) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{r}{\sqrt{n}} \right), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

На неперервній границі маємо:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \infty, & \tau &\rightarrow 0, & n\tau &= t, \\ r &\rightarrow \infty, & a &\rightarrow 0, & ra &\rightarrow s, \end{aligned}$$

причому $a^2/\tau = 1$. На цій границі процес випадкових блукань $W(t)$ називається *вінерівським*, для якого

$$F(W(t) \leq s) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{s}{\sqrt{t}} \right).$$

Відповідна густина ймовірності є звичайним гаусіаном

$$p(W; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{W^2}{2t} \right). \tag{2.43}$$

Як і будь-який гаусівський процес, вінерівський процес характеризує-

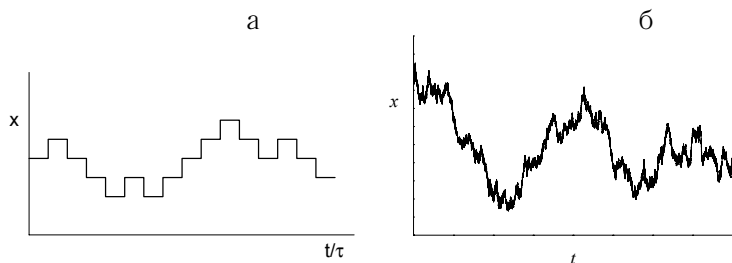


Рисунок 2.2 — Випадкові блукання (а) та вінерівський процес (б)

ться першими моментами та кореляційною функцією:

$$\begin{aligned} \langle W(t) \rangle &= 0, & \langle W^2(t) \rangle &= t, \\ \langle W(t)W(t') \rangle &= \min(t, t'). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Вінерівський процес хоча і неперервний, але не має першої похідної. Він розглядається як граничний випадок процесу випадкових блукань $x(t)$. Тоді якщо визначити процес

$$w_\epsilon(t) = \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon},$$

де $w_\epsilon(t)$ — гаусівський процес, оскільки він являє собою лінійну комбінацію гаусівських процесів, та припустити, що $\epsilon \rightarrow 0$, процес $W(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w_\epsilon(t)$ стає похідним від процесу випадкових блукань, корелятор — $\frac{a^2}{\tau} \delta(t_1 - t_2)$. Якщо тепер перейти до континуальної границі, то процес випадкових блукань стає вінерівським, а його похідна $\xi(t)$ — *білим шумом*. Білий шум розглядається як ідеальна границя фізичного стохастичного процесу при малому часі кореляції. Формально білий шум є марковським, гаусівським процесом із такими властивостями:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle &= \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Цей шум розглядається як похідна від вінерівського процесу

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt}. \quad (2.46)$$

2.2 Розчеплення кореляцій

2.2.1 Загальні співвідношення

При статистичному аналізі динамічних систем необхідно знати поведінку кореляцій $\langle x(t) \mathcal{R}[x(\tau)] \rangle$, де $\mathcal{R}[x(\tau)]$ — функціонал, який може залежати від процесу $x(t)$ як явно, так і неявно.

Для обчислення такого середнього введемо допоміжний функціонал

$$\mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)],$$

де $y(t)$ — довільна детермінована функція, та обчислимо величину

$$\langle x(t) \mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] \rangle.$$

Шукану кореляцію одержуємо, припустивши, що $y(\tau) = 0$.

Функціонал $\mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)]$ можна розвинути у функціональний ряд Тейлора за $x(\tau)$ та подати його у вигляді

$$\mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] = e^{-\int_0^\infty d\tau x(\tau) \frac{\delta}{\delta y(\tau)}} \mathcal{R}[y(\tau)],$$

де застосовано оператор функціонального зміщення. Тоді маємо вираз

$$\begin{aligned} \langle x(t)\mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] \rangle &= \left\langle x(t)e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau x(\tau)\frac{\delta}{\delta y(\tau)}} \right\rangle \mathcal{R}[y(\tau)] = \\ &= \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta y(\tau)} \right] \langle \mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

де функціонал $\Omega[t; v(\tau)]$ визначається як

$$\begin{aligned} \Omega[t; v(\tau)] &= \frac{\left\langle x(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x(\tau)v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x(\tau)v(\tau) \right\} \right\rangle} = \\ &= \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v(\tau)], \end{aligned} \tag{2.47}$$

як і раніше, $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$ — функціонал кумулянтів, а $\Phi[v(\tau)]$ — характеристичний функціонал випадкового процесу $x(t)$.

Враховуючи, що варіаційне диференціювання за $y(\tau)$ можна замінити диференціюванням за $x(\tau)$ та припустити після цього, що $y(\tau) = 0$, одержуємо для шуканої кореляції вираз

$$\langle x(t)\mathcal{R}[x(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[\frac{\delta}{i\delta x(\tau)} \right] \mathcal{R}[x(\tau)] \right\rangle. \tag{2.48}$$

Якщо скористатись розвиненням функціонала $\Theta[v(\tau)]$ у функціональний ряд Тейлора, то функціонал

$$\Omega[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n)$$

приводить до такого виразу:

$$\langle x(t)\mathcal{R}[x(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n \mathcal{R}[x(\tau)]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle. \tag{2.49}$$

У фізичних проблемах, що задовольняють умову динамічної причинності за часом t , статистичні характеристики розв'язку у момент часу t визначаються статистичними характеристиками випадкового процесу $x(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, які повністю описуються характеристичним функціоналом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \{ \Theta[t; v(\tau)] \} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau x(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

У такому випадку всі вищедержані формули залишаються справедливими для обчислення кореляцій $\langle x(t') \mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leq t$:

$$\langle x(t') \mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t', t; \frac{\delta}{i\delta x(\tau)} \right] \mathcal{R}[t; x(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (2.50)$$

де

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (2.51)$$

У випадку $t' = t - 0$ формула (2.50) є доцільною:

$$\langle x(t) \mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t, t; \frac{\delta}{i\delta x(\tau)} \right] \mathcal{R}[t; x(\tau)] \right\rangle. \quad (2.52)$$

Зауважимо, що (2.51) не завжди дає коректний граничний перехід при $t' \rightarrow t - 0$ (операції граничного переходу та розвинення у функціональний ряд можуть бути некомутивними). У такому разі

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{iv(t)dt} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t; v(\tau)], \quad (2.53)$$

а тому вирази (2.50) та (2.52) можуть бути розривними при $t' = t - 0$.

2.2.2 Гаусівський процес

Для гаусівського процесу $x(t)$ вищедержані формули спрощуються. Тут $\Omega[t; v(\tau)]$ (2.47) стає лінійним функціоналом ($\langle x(t) \rangle = 0$):

$$\Omega[t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 C(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (2.54)$$

формула (2.48) набирає вигляду

$$\langle x(t) \mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 C(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta y(\tau_1)} \langle \mathcal{R}[x(\tau) + y(\tau)] \rangle. \quad (2.55)$$

Замінивши диференціювання за $y(\tau)$ на диференціювання за $x(\tau)$ та припустивши, що $y(\tau) = 0$, одержуємо рівняння

$$\langle x(t) \mathcal{R}[x(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 C(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta x(\tau_1)} \mathcal{R}[x(\tau)] \right\rangle, \quad (2.56)$$

яке має назву *формули Новікова* [23].

Багатовимірне узагальнення (2.56) є таким:

$$\langle x_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) \mathcal{R}[\mathbf{x}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle x_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) x_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta \mathcal{R}[\mathbf{x}]}{\delta x_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (2.57)$$

де \mathbf{r} — неперервні аргументи випадкового векторного поля $\mathbf{x}(\mathbf{r})$; i_1, \dots, i_n — індексні аргументи. За індексами, що повторюються, виконується додавання.

Якщо випадковий процес $x(\tau)$ розподілено лише на відріжку часу $[0, t]$, то функціонал $\Theta[t, v(\tau)]$ задається виразом

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 C(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (2.58)$$

а функціонали $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ є лінійними:

$$\begin{aligned}\Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau C(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = \frac{i}{2} \int_0^t d\tau C(t, \tau) v(\tau),\end{aligned}\quad (2.59)$$

а тому формули (2.50), (2.52) мають такий вигляд:

$$\langle x(t') \mathcal{R}[t, x(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau C(t', \tau) \left\langle \frac{\delta \mathcal{R}[x(\tau)]}{\delta x(\tau)} \right\rangle \quad (t' < t), \quad (2.60)$$

який збігається з (2.56) за умови

$$\frac{\delta \mathcal{R}[t; x(\tau)]}{\delta x(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (2.61)$$

Для гаусівського дельта-корельованого процесу (границі білого шуму) кореляційна функція має вигляд

$$C(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = C(t_1)\delta(t_1 - t_2), \quad (\langle x(t) \rangle = 0).$$

У такому разі функціонали $\Theta[t; v(\tau)]$, $\Omega[t', t; v(\tau)]$ та $\Omega[t, t; v(\tau)]$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\Theta[t; v(\tau)] &= -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau C(\tau) v^2(\tau), \\ \Omega[t', t; v(\tau)] &= iC(t')v(t'), \quad \Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{i}{2}C(t)v(t),\end{aligned}$$

а формула (2.60) суттєво спрощується, що дає можливість записати:

$$\begin{aligned}\langle x(t') \mathcal{R}[t; v(\tau)] \rangle &= C(t') \left\langle \frac{\delta}{\delta x(t')} \mathcal{R}[t; v(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \\ \langle x(t) \mathcal{R}[t; v(\tau)] \rangle &= \frac{1}{2}C(t) \left\langle \frac{\delta}{\delta x(t)} \mathcal{R}[t; v(\tau)] \right\rangle.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Вирази (2.62) описують стрибок статистичних середніх при $t' = t$ для гаусівського дельта-корельованого процесу. Існування такого стрибка обумовлено особливістю дельта-корельованого процесу. У іншому випадку ніякого стрибка не існує (див. (2.60)).

У загальному випадку дельта-корельованого процесу $x(t)$ розвинуення у функціональний ряд логарифма характеристичного функціонала має вигляд

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \tag{2.63}$$

а всі кумулянтні функції при цьому задаються виразами

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = K_n(t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Зауважимо, що з (2.63) впливає рівняння

$$\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \dot{\Theta}[t; v(t)] \quad \left(\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; v(\tau)] \right). \tag{2.64}$$

Воно показує, що величина $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-корельованого процесу є не функціоналом, а просто функцією часу t . Тоді $\Omega[t', t; v(\tau)]$ і $\Omega[t, t; v(\tau)]$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') v^n(t') \quad (t' < t), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) v^n(t), \end{aligned}$$

а формули розчеплення кореляцій набирають вигляду

$$\langle x(t') \mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') \left\langle \frac{\delta^n \mathcal{R}[t; x(\tau)]}{\delta x^n(t')} \right\rangle & \text{при } t' < t, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) \left\langle \frac{\delta^n \mathcal{R}[t; x(\tau)]}{\delta x^n(t)} \right\rangle & \text{при } t' = t, \\ \langle x(t') \rangle \langle \mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle & \text{при } t' > t. \end{cases} \tag{2.65}$$

Ці формули описують стрибок при $t' = t$ статистичних середніх у загальному випадку дельта - корельованих процесів.

2.2.3 Перехід до білого шуму

Реальні процеси та поля мають кінцевий час кореляції, тому дельта-корельовані процеси та поля — результат асимптотичного розвинення, пов'язаного з часовими радіусами кореляції.

Розглянемо перехід до дельта-корельованого процесу на прикладі гаусівського стаціонарного процесу з часом кореляції τ_0 . Логарифм характеристичного функціонала записується у вигляді

$$\Theta[t; v(\tau)] = - \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 C\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_0}\right) v(\tau_2). \quad (2.66)$$

Припустимо, що $\tau_1 - \tau_2 = \xi\tau_0$, тоді вираз (2.66) набирає вигляду

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1/\tau_0} d\xi C(\xi) v(\tau_1 - \xi\tau_0).$$

Нехай $\tau_0 \rightarrow 0$. Тоді головний член асимптотичного розвинення за τ_0 визначається формулою

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^\infty d\xi C(\xi) \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1),$$

яку запишемо у вигляді

$$\Theta[t; v(\tau)] = -C^{\text{eff}} \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1), \quad (2.67)$$

де

$$C^{\text{eff}} = \int_0^\infty d\tau C\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\tau C\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right). \quad (2.68)$$

Асимптотичне розвинення (2.67) є справедливим не для будь-яких функцій $v(t)$, а лише для тих, що мало змінюються за інтервал порядку τ_0 . Так, коли $v(t) = v\delta(t - t_0)$, то асимптотичне розвинення (2.67) є

несправедливим і тому (2.66) замінюється виразом

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2}C(0)v^2 \quad (t > t_0),$$

що відповідає характеристичній функції процесу $x(t)$ для $t = t_0$.

Розглянемо кореляцію $\langle x(t)\mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle$, яка згідно з (2.60) записується у вигляді формули

$$\langle x(t)\mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 C\left(\frac{t-t_1}{\tau_0}\right) \left\langle \frac{\delta}{\delta x(t_1)} \mathcal{R}[t; x(\tau)] \right\rangle.$$

Виконуючи заміну змінних $t - t_1 \rightarrow \xi\tau_0$, одержуємо вираз

$$\langle x(t)\mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = \tau_0 \int_0^{t/\tau_0} d\xi C(\xi) \left\langle \frac{\delta}{\delta x(t - \xi\tau_0)} \mathcal{R}[t; x(\tau)] \right\rangle, \quad (2.69)$$

який при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходить у рівняння, що відповідає гаусівському дельта-корельованому процесу

$$\langle x(t)\mathcal{R}[t; x(\tau)] \rangle = C^{\text{eff}} \left\langle \frac{\delta}{\delta x(t)} \mathcal{R}[t; x(\tau)] \right\rangle.$$

Таким чином, апроксимація процесу $x(t)$ дельта-корельованим процесом обумовлена малістю зміни функціоналів від такого процесу за час порядку його часового радіуса кореляції.

2.2.4 Стохастичні поля

Аналогічно визначається одноточкова густина ймовірності для випадкового поля $u(\mathbf{r}, t)$:

$$p(t, \mathbf{r}; u) = \langle \varphi(t, \mathbf{r}; u) \rangle, \quad (2.70)$$

що параметрично залежна від просторово-часової точки (\mathbf{r}, t) , так і багатоточкова густина ймовірності

$$p(t_1, \dots, t_n, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; u_1, \dots, u_n) = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; u_1, \dots, u_n) \rangle, \quad (2.71)$$

де індикаторні функції:

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{r}; u) &= \delta(u(\mathbf{r}, t) - u), \\ \varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; u_1, \dots, u_n) &= \delta(u(\mathbf{r}_1, t_1) - u_1) \dots \delta(u(\mathbf{r}_n, t_n) - u_n).\end{aligned}\quad (2.72)$$

Випадкове поле $u(\mathbf{r}, t)$ називається *просторово однорідним*, якщо всі його статистичні характеристики є інваріантними відносно зсуву у просторі на довільний вектор \mathbf{a} , тобто

$$p(t_1, \dots, t_n, \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{r}_n + \mathbf{a}; u_1, \dots, u_n) = p(t_1, \dots, t_n, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; u_1, \dots, u_n).$$

У такому випадку одноточкова густина ймовірності $p(t, \mathbf{r}; u) = p(t; u)$ не залежить від \mathbf{r} , а просторова кореляційна функція залежить від різниці векторів $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, тобто

$$C_u(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle u(\mathbf{r}_1, t_1)u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = C_u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; t_1, t_2).$$

У разі коли випадкове поле до того ж є інваріантним відносно повороту всіх векторів \mathbf{r}_i на довільний кут, то випадкове поле $u(\mathbf{r}, t)$ називається *однорідним та ізотропним випадковим полем*. Тоді кореляційна функція залежить лише від відстані між точками \mathbf{r}_1 та \mathbf{r}_2 , тобто

$$C_u(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle u(\mathbf{r}_1, t_1)u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = C_u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|; t_1, t_2).$$

Фур'є–перетворення кореляційної функції за просторовою змінною визначає просторову спектральну функцію

$$S_u(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} C_u(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.73)$$

а перетворення Фур'є від кореляційної функції стаціонарного у часі та однорідного у просторі випадкового поля $u(\mathbf{r}, t)$ визначає просторово-часову спектральну функцію поля $u(\mathbf{r}, t)$:

$$S_u(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt C_u(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)}. \quad (2.74)$$

Для ізотропного випадкового поля $u(\mathbf{r}, t)$ просторова спектральна функція також ізотропна у \mathbf{k} -просторі, тобто

$$S_u(\mathbf{k}, \omega) = S_u(k, \omega). \tag{2.75}$$

Характеристичний функціонал випадкового скалярного поля $u(\mathbf{r}, t)$ визначається стандартно:

$$\Phi[v(\mathbf{r}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{r}', \tau)] \},$$

де для моментних та кумулянтних функцій n -го порядку маємо:

$$M_n(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{r}_n, t_n)} \Phi[v(\mathbf{r}', \tau)] \Big|_{v=0},$$

$$K_n(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{r}_n, t_n)} \Theta[v(\mathbf{r}', \tau)] \Big|_{v=0}.$$

Нехай існує векторне поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, для якого існують кумулянтні функції. Коли

$$K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n), \tag{2.76}$$

то поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ є дельта-корельованим випадковим полем за часом t . Тоді функціонал $\Theta[t; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', \tau)]$ набирає вигляду

$$\begin{aligned} \Theta[t; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', \tau)] &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; \tau) \times \\ &\quad \times \psi_{i_1}(\mathbf{r}_1, \tau) \dots \psi_{i_m}(\mathbf{r}_n, \tau), \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\tag{2.78}$$

при цьому аналогічне (2.64) рівняння запишеться так:

$$\dot{\Theta}[t; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', \tau)] = \dot{\Theta}[t; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}', t)]. \tag{2.79}$$

 Приклад 2.4 Виникнення випадкового поля

Нехай поле $u(\mathbf{r}, t)$ підпорядковується рівнянню

$$\nabla^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.80)$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді суперпозиції нормальних мод $u_k(\mathbf{r}, t)$:

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_k A_k u_k(\mathbf{r}, t). \quad (2.81)$$

Повна енергія розв'язків є сумою енергій нормальних мод:

$$E = \sum_k \epsilon_k A_k^2.$$

Умова теплової рівноваги при температурі T описується розподілом Гіббса

$$p \propto \exp(-E/T) = \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_k \epsilon_k A_k^2\right) = \prod_k \exp\left(-\frac{1}{T} \epsilon_k A_k^2\right).$$

Це означає, що A_k є випадковою гаусівськи розподіленою змінною, так, що

$$\langle A_k \rangle = 0, \quad \langle A_k A_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \sigma^2 = \delta_{kk'} T/2\epsilon_k,$$

а тому u — випадкове поле чотирьох змінних.

Обчислимо кореляцію випадкового поля

$$\langle u(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_{kk'} \langle A_k A_{k'} \rangle u_k(\mathbf{r}, t) u_{k'}(\mathbf{r}', t') = \sum_k \frac{T}{2\epsilon_k} u_k(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}', t'). \quad (2.82)$$

У нескінченному просторі нормальні моди створюють неперервну множину і (2.81) перетворюється у інтеграл. Для переходу до континууму поле розміщують у куб V .

Обчислимо кореляцію для реального поля. Нехай V — об'єм, що займає поле $u(\mathbf{r}, t)$, $V = L_x L_y L_z$, $L_x = L_y = L_z = L$. Дійсні розв'язки хвильового рівняння мають вигляд:

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(a_k e^{i(\mathbf{kr} - kt)} + a_k^* e^{-i(\mathbf{kr} - kt)} \right), \quad a_k^* = a_{-k}, \quad a_k = a'_k + i a''_k,$$

де $k = \{2\pi n_x/L, 2\pi n_y/L, 2\pi n_z/L\}$, $k = |\mathbf{k}|$, $n_i \in (-\infty, \infty)$.

Повна енергія визначається рівнянням

$$E = \frac{1}{2} \int_V ((\nabla u)^2 + (\partial u/\partial t)^2) \, d\mathbf{r} = V \sum_k 2k^2 (a'_k{}^2 + a''_k{}^2).$$

Таким чином, у тепловій рівновазі маємо:

$$\langle a'^2_k \rangle = \langle a''^2_k \rangle = \frac{T}{4Vk^2}, \quad \langle a_k a^*_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \frac{T}{2Vk^2}.$$

Тепер обчислюємо

$$\langle u(\mathbf{r}_1, t_1) u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \sum_k \frac{T}{2Vk^2} \left(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - ik(t_1 - t_2)} + e^{-i(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - ik(t_1 - t_2))} \right). \tag{2.83}$$

За умови великого об'єму сума переходить в інтеграл за правилом

$$\sum_k \dots \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int \dots \, d\mathbf{k}.$$

Припустивши, що $\rho = r_1 - r_2$, $\tau = t_1 - t_2$, одержуємо

$$\langle u(\mathbf{r}_1, t_1) u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{T}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \left(e^{i(\mathbf{k}\rho - k\tau)} + e^{-i(\mathbf{k}\rho - k\tau)} \right). \tag{2.84}$$

Для детальнішого ознайомлення із методами подання та аналізу стохастичних процесів читач може звернутися до підручників відповідного напрямку [6, 17–19, 24], фізичні властивості випадкових процесів добре подано у літературі з теоретичної фізики, наприклад [4, 25–27].

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1 Властивість стаціонарності випадкового процесу.
- 2 Зміст автокореляційної та крос-кореляційної функцій.
- 3 Визначення марковості випадкових процесів.
- 4 Фізичний зміст спектральної густини.
- 5 Поняття однорідного та ізотропного стохастичних полів.

Задачі до розділу 2

ЗАДАЧА 2.1 Визначити середнє $\langle x(t) \rangle$ та автокореляційну функцію $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ випадкового процесу $x(t) = Ae^{i\omega t}$, для якого амплітуда A та частота ω є випадковими змінними, що статистично незалежні. Відомо, що амплітуда має такі характеристики: $\langle A \rangle = 0$, $\langle A^2 \rangle = \sigma^2$; частота розподілена за законом Коші з густиною $p(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$.

ЗАДАЧА 2.2 Знайти спектральну густину процесу з кореляційною функцією

$$C(\tau) = Ae^{-\nu\tau} \cos(\Omega\tau).$$

ЗАДАЧА 2.3 Довести, що для двох дійсних процесів $x(t)$ і $y(t)$ крос-кореляційна функція яких має вигляд

$$C_{xy}(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|} \sin \omega_0\tau,$$

взаємна спектральна густина $S_{xy}(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau$ є комплексною.

ЗАДАЧА 2.4 За відомими функціями $\langle x(t) \rangle = 0$, $K_{xx}(t, t') = \sigma^2 e^{-\alpha|t-t'|}$ знайти середнє та дисперсію випадкового процесу $y(t) = dx(t)/dt$.

ЗАДАЧА 2.5 Для процесу $y(s) = \int_0^s x(t)dt$, де

$$\langle x(t) \rangle = a, \quad C_{xx}(t, t') = Ce^{-\alpha(t-t')^2},$$

знайти $\langle y(t) \rangle$, $C_{yy}(t, t')$.

ЗАДАЧА 2.6 Знайти кореляційну функцію, якщо відома спектральна густина у вигляді

$$S(\omega) = \sum_j \frac{a_j}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

ЗАДАЧА 2.7 Довести, що корелятор $\langle F[z(\tau)]R[z(\tau)] \rangle$ розчеплюється. Для цього розглянути допоміжний корелятор $\langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle$, де $\eta_1(\tau)$ та $\eta_2(\tau)$ — довільні детерміновані функції.

ЗАДАЧА 2.8 Розчепити корелятор $\left\langle e^{\int_{-\infty}^{\infty} i d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle$ для гаусівського випадкового процесу $z(t)$.

Розділ 3

Стохастичні рівняння

На відміну від попереднього розділу тут розглядаються випадкові процеси, які одержують при використанні еволюційного підходу. Отже, стохастичні процеси отримуються як розв'язки відповідних рівнянь, що містять випадкові функції. Використання динамічних рівнянь стохастичного характеру надає більших переваг, оскільки за їх допомогою вдається моделювати поведінку широкого кола динамічних систем, які знаходяться у зовнішньому середовищі. Останнє у реальних умовах постійно змінюється, причому випадковим чином. Охопити всю теорію стохастичних диференціальних рівнянь неможливо, тому в розділі наводяться у спрощеному вигляді лише основні положення, яких, на думку автора, буде достатньо для подальшого сприйняття матеріалу.

Починаємо вступ до теорії стохастичних рівнянь простим прикладом броунівського руху (підрозділ 3.1), де проводиться детальний опис статистичних характеристик відповідного процесу блукань частинки. Загальний підхід та нелінійні рівняння із білим шумом викладаються у підрозділі 3.2. Останній підрозділ містить алгоритми чисельного моделювання стохастичних процесів.

3.1 Броунівський рух

У 1827 році ботанік Браун описав рух спор плауна у рідині — зіткнення макроскопічної частинки з мікроскопічними — молекулами рідини. Броунівський рух дозволяє за макроскопічно спостережуваними величинами зробити висновок про процеси у мікроскопічних масштабах.

Розглянемо частинку маси m із характерним розміром R , яка рухається зі швидкістю v . Вона зазнає впливу сили тертя, для якої при великих швидкостях правильними стають напівемпіричні формули Стокса:

$$F = -m\gamma v, \quad \gamma = 6\pi R\eta/m,$$

де $\eta = \rho\nu$ — динамічна в'язкість; ρ — густина рідини; ν — кінематична в'язкість; γ — коефіцієнт тертя.

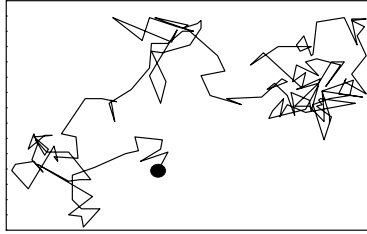


Рисунок 3.1 — Типова траєкторія броунівської частинки

Рівняння детермінованого руху

$$\dot{v}(t) = -\gamma v(t)$$

має розв'язок

$$v(t) = v(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Швидкість частинки спадає за експонентою, що незадовільно характеризує частинку.

3.1.1 Рівняння Ланжевена [28]

У 1908 році Ланжевен узагальнив рівняння руху за допомогою випадкової сили, що моделює зіткнення частинки з молекулами $F_s(t) = m\xi(t)$:

$$\dot{v}(t) = -\gamma v(t) + \xi(t). \quad (3.1)$$

Відносно цієї сили були застосовані такі положення:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t').$$

Спектральна густина ланжевенівського джерела $\xi(t)$ зводиться до сталої

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \sigma^2 \delta(t) dt = 2\sigma^2,$$

яка не залежить від частоти. Тому δ -корельоване ланжевенівське джерело є білим шумом, в іншому випадку шум є *кольоровим*. Процес, що має наведені властивості і задається рівнянням Ланжевена (3.1), має назву *процесу Орнштайна-Уленбека*.

Формальний розв'язок (3.1) можна записати у вигляді

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \xi(t') dt', \quad v_0 = v(t_0). \quad (3.2)$$

Використовуючи властивості $\xi(t)$, одержуємо кореляційну функцію

$$\begin{aligned} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle &= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \\ &+ \sigma^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_1+t_2-t'_1-t'_2)} \delta(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При обчисленні інтеграла у (3.3) проведемо спочатку інтегрування за t'_2 . Тоді інтегрування за t'_1 проводиться від 0 до t_2 . У результаті

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots dt'_1 dt'_2 &= \sigma^2 \int_0^{\min(t_1, t_2)} e^{-\gamma(t_1+t_2-2t'_1)} dt'_1 = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)} \right). \end{aligned}$$

Тоді кореляційна функція швидкостей має вигляд

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)} \right). \quad (3.4)$$

На границі тривалого часу t_1, t_2 , тобто з $\gamma t_1 \gg 1, \gamma t_2 \gg 1$, впливає

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma|t_1-t_2|}. \quad (3.5)$$

У стаціонарному стані середня енергія частинки визначається співвідношенням

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle [v(t = \infty)]^2 \rangle = \frac{m\sigma^2}{4\gamma}.$$

Фізичне значення σ^2 (інтенсивність шуму) може бути встановлене із співвідношення зі статистичної фізики [25, 27] для одновимірного руху

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}T,$$

звідси маємо $\sigma^2 = 2\gamma T/m$, де T — температура.

Середньоквадратичне зміщення може бути обчислено виходячи з припущення про малість похідної у рівнянні Ланжевена:

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{1}{\gamma^2} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} \delta(t - t').$$

Застосовуючи визначення

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle &\approx \left\langle \left[\int_0^t v(t_1) dt_1 \right]^2 \right\rangle = \left\langle \int_0^t v(t_1) dt_1 \int_0^t v(t_2) dt_2 \right\rangle = \\ &= \int_0^t \int_0^t \langle v(t_1)v(t_2) \rangle dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

одержуємо

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle \approx \frac{\sigma^2}{\gamma^2} \int_0^t \int_0^t \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} t = \frac{2T}{m\gamma} t. \quad (3.7)$$

Це співвідношення відоме як формула Айнштейна (див.рис.3.2), яка задає розповнення дифузійного пакета.

3.1.2 Густина ймовірності

У зв'язку з тим що $\xi(t)$ змінюється від системи до системи у ансамблі, тобто є стохастичним процесом, то швидкість броунівської частинки також є стохастичною. Обчислимо ймовірність реалізації інтервалу швидкостей $[v, v + dv]$ або кількість частинок, швидкості яких розміщені у такому інтервалі. Швидкість частинки є неперервною величиною, тому задача зводиться до обчислення густини ймовірності $p(v)$.

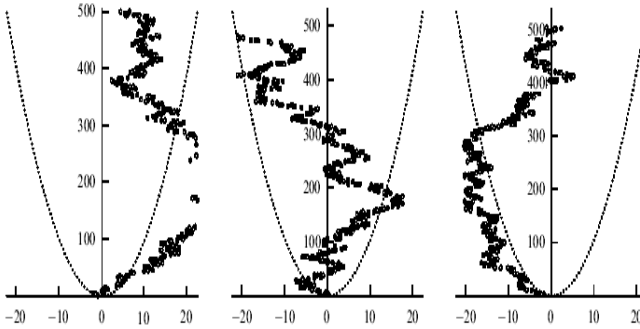


Рисунок 3.2 — Типова поведінка процесу $x(t) = \int_0^t v(t') dt'$ (квадрати) та величини $\sqrt{\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle} \propto t^{1/2}$ (пунктирні криві). Вертикальна вісь — час t

Для розв'язання задачі скористаємось формалізмом характеристичної функції. Виходячи з формального розв'язку рівняння Ланжевена у границі великого часу, маємо

$$v(t) = \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} \xi(t - \tau) d\tau,$$

де ми скористалися підстановкою $\tau = t - t'$. Запроваджуючи усереднення, одержуємо:

$$\begin{aligned} \langle v(t)^{n+1} \rangle &= 0, \\ \langle v(t)^{2n} \rangle &= \iiint_0^\infty e^{-\gamma(\tau_1 + \dots + \tau_{2n})} \langle \xi(t - \tau_1) \dots \xi(t - \tau_{2n}) \rangle d\tau_1 \dots d\tau_{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2)} \langle \xi(t - \tau_1) \xi(t - \tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \right]^n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

де використано властивість гаусівського процесу

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_{2n-1}) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_{2n}) \rangle &= \sigma^{2n} \left[\sum_{Pd} \delta(t_{i_1} - t_{i_2}) \delta(t_{i_3} - t_{i_4}) \dots \delta(t_{i_{2n-1}} - t_{i_{2n}}) \right], \end{aligned}$$

де підсумовування проводиться за всіма $(2n)!/2^n n!$ перестановками¹⁾. Оскільки $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2)} \langle \xi(t-\tau_1)\xi(t-\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 = \sigma^2/(2\gamma)$, то

$$\langle v(t)^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} \right)^n. \quad (3.9)$$

Застосовуючи розвинення характеристичної функції у ряд Тейлора за моментами, одержуємо

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (iu)^n \langle v(t)^n \rangle / n! = \sum_{n=0}^{\infty} (iu)^{2n} \langle v(t)^{2n} \rangle / (2n)! = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^{2n}}{2^n n!} \left(\frac{\sigma^2}{2\gamma} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-u^2 \sigma^2}{4\gamma} \right)^n = \\ &= \exp \left(\frac{-u^2 \sigma^2}{4\gamma} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Згідно із зворотним перетворенням Фур'є маємо

$$\begin{aligned} p(v) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e^{-iuv} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-iuv - \frac{u^2 \sigma^2}{4\gamma} \right) du = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \sigma^2}} \exp \left(-\frac{\gamma v^2}{\sigma^2} \right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Останній вираз відомий як розподіл Максвелла.

¹⁾ Наприклад, при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle &= (\sigma^2)^2 [\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) + \\ &\quad + \delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)]. \end{aligned}$$

3.2 Стохастичні диференціальні рівняння

Рівняння Ланжевена є *стохастичним диференціальним рівнянням*, яке належить до сім'ї рівнянь типу

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) + g(x, t)\zeta(t). \quad (3.12)$$

Функції $f(x, t)$, $g(x, t)$ вважаються заданими і характеризують дрейф (детерміновану частину еволюції системи) та дифузію, коефіцієнт якої зводиться до квадрата функції $g(x, t)$. Згідно з цим рівнянням вважається, що кожній реалізації $\zeta(t)$ випадкового процесу $\Theta(t)$ ставиться у відповідність реалізація $x(t)$ нового випадкового процесу $\Xi(t)$.

Рівняння (3.12) може бути одержане з детерміністичного рівняння руху

$$\frac{dx(t)}{dt} = \gamma f_\alpha(x), \quad (3.13)$$

де $\gamma = \text{const}$ — кінетичний коефіцієнт. Перейдемо до безрозмірного часу $t' = t\gamma$, опускаючи далі штрих. Враховуємо, що величина сили $f = f_\alpha(x)$ у (3.13) залежить не тільки від змінної x , що визначає стохастичну систему, а також від керуючого параметра α , який задається середовищем, в якому розміщено систему (для броунівської частинки роль такого параметра відіграє інтенсивність її зіткнень із молекулами середовища). У лінійному (при $\alpha \ll 1$) наближенні можна записати

$$f_\alpha(x) \approx f_0(x) + \alpha g(x), \quad g(x) \equiv \left. \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.14)$$

Для врахування зовнішніх флуктуацій (стохастичного впливу середовища) у розвиненні (3.14) слід надати стохастичного характеру не лише внутрішній силі $f_0(x)$, але й керуючому параметру α , надаючи йому залежності від часу:

$$\alpha(t) = \beta + \sigma \xi(t), \quad (3.15)$$

де параметр β описує середню дію середовища, σ^2 — його дисперсію. У випадку білого шуму величина останньої вибирається так, щоб стохастична складова $\xi(t)$ мала δ -корельований характер:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (3.16)$$

Підставляючи (3.15) у (3.14), а результат у (3.13), знаходимо загальний вигляд стохастичного рівняння руху, що зазнає дії *зовнішнього* ζ_e та *внутрішнього* ζ шумів:

$$\dot{x} = f_\beta(x) + \zeta_e(x, t) + \zeta(t), \quad (3.17)$$

$$f_\beta(x) \equiv f_0(x) + \beta g(x), \quad (3.18)$$

$$\zeta_e(x, t) \equiv \sigma g(x)\xi(t). \quad (3.19)$$

Внутрішній шум у даному випадку є адитивним, оскільки $\gamma = \text{const}$, тоді як для зовнішнього з урахуванням (3.16) маємо

$$\langle \zeta_e(x, t)\zeta_e(x, t') \rangle = \sigma^2 g^2(x)\delta(t - t'). \quad (3.20)$$

Згідно з визначенням (3.14) реакція системи на дію середовища залежить від її стану, що задається стохастичною змінною x . Інакше кажучи, існує зворотний зв'язок між станами стохастичної системи та навколишнього середовища.

3.2.1 Стохастичне інтегрування [2, 6, 18, 19, 26]

Формальний розв'язок рівняння (3.12) має вигляд

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(t'))dt' + \sigma \int_{W(0)}^{W(t)} g(x(t'))dW(t'). \quad (3.21)$$

Розглянемо особливості, пов'язані з обчисленням значення другого інтеграла.

Нехай існує деяка функція часу $\psi(t)$, $W(t)$ — вінерівський процес. Визначимо такий стохастичний інтеграл:

$$\int_{t_0}^t \psi(t')dW(t').$$

Розіб'ємо часовий відрізок $[t_0, t]$ на інтервали:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t$$

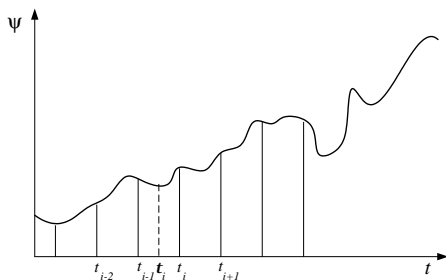


Рисунок 3.3 — Розбиття часового інтеграла для обчислення стохастичного інтеграла

та виберемо проміжні точки на кожному інтервалі:

$$t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i.$$

Стохастичний інтеграл будемо визначати як набір частинних сум, тобто

$$\int_{t_0}^t \psi(t') dW(t') \approx S_n = \sum_{i=1}^n \psi(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})].$$

Такий інтеграл повинен залежати від конкретного вибору проміжної точки τ_i . Якщо для будь-якого i вибрати

$$\tau_i = \lambda t_i + (1 - \lambda)t_{i-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{3.22}$$

то при $\psi(\tau_i) = W(\tau_i)$

$$\begin{aligned} \langle S_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n W(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n [\min(\tau_i, t_i) - \min(\tau_i, t_{i-1})] = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Стохастичний інтеграл Іто, введений до розгляду в 1950 році, задає вибір

$$\tau_i = t_{i-1}, \quad (3.23)$$

що приводить до визначення

$$\int_{t_0}^t \psi(t') dW(t') = \text{ms-lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \psi(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\}, \quad (3.24)$$

де під ms-lim розуміється середньоквадратична границя.

Приклад 3.1 Обчислення інтеграла $\int_{t_0}^t W(t') dW(t')$

Розглянемо частинні суми

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n W_{i-1} [W_i - W_{i-1}] \equiv \sum_{i=1}^n W_{i-1} \delta W_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(W_{i-1} + \delta W_i)^2 - (W_{i-1})^2 - (\delta W_i)^2] = \\ &= \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\delta W_i)^2. \end{aligned}$$

Визначимо середньоквадратичну границю:

$$\langle \sum_{i=1}^n (\delta W_i)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle (W_i - W_{i-1})^2 \rangle = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t - t_0.$$

Згідно з визначенням інтеграла Іто через середньоквадратичну границю

$$\int_{t_0}^t W(t') dW(t') = \text{ms-lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n W_{i-1} [W_i - W_{i-1}] \right\}$$

одержуємо

$$\int_{t_0}^t W(t') dW(t') = \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0) - (t - t_0)].$$

Зауважимо, що у випадку визначення точки вибору згідно з (3.22) одержуємо

$$\int_{t_0}^t W(t')dW(t') = \frac{1}{2}[W^2(t) - W^2(t_0)] + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(t - t_0).$$

Стохастичний інтеграл Стратоновича, введений до розгляду в 1966 році, визначає вибір проміжної точки за умови

$$\tau_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}. \quad (3.25)$$

У результаті визначення стохастичний інтеграл Стратоновича набирає вигляду

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t W(t')dW(t') &= \text{ms-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{W_i + W_{i-1}}{2} [W_i - W_{i-1}] \right\} = \\ &= \frac{1}{2}[W^2(t) - W^2(t_0)]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Можна стверджувати, що існує нескінченна множина визначень стохастичного інтеграла, оскільки при будь-якому значенні λ ми приходимо до коректного математичного визначення інтеграла. Однак більшість таких інтегралів не має необхідних властивостей. Вважається, що існує два варіанти вибору параметра λ : $\lambda = 0$ та $\lambda = 1/2$. За останнім зберігаються відомі правила інтегрування, та інтеграл розглядається як звичайний інтеграл Рімана. Якщо зовнішній шум описується як більш реалістичний випадковий процес, то використовують звичайні правила інтегрування, що обумовлює вибір $\lambda = 1/2$. Стохастичне диференціальне рівняння можна розглядати як сукупність детермінованих рівнянь. Білий шум у такому разі розглядається як границя $\tau_{\text{кор. шуму}} \rightarrow 0$. Тоді вибір числення Стратоновича підкріплюється фізичними додатками. З математичної точки зору більш зручним є вибір $\lambda = 0$. У такому разі задовольняються вимоги, що накладаються на вінерівський процес: незалежність прирощувань. Якщо τ_i збігаються із лівими кінцями інтервалів, то $\psi(\tau_i)$ та $W(t_i) - W(t_{i-1})$ — незалежні. Таким чином, у дійсності білий шум відповідає вибору $\lambda = 0$.

3.2.2 Властивості інтеграла Іто

Існування. Інтеграл Іто $\int_{t_0}^t \psi(t') dW(t')$ існує, якщо функція $\psi(t')$ є неперервною та невинерджуючою на інтервалі інтегрування.

Інтегрування багаточленів. Скористаємось визначенням

$$dW^n(t) = [W(t) + dW(t)]^n - W^n(t) = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} W^{n-r}(t) dW^r(t).$$

Згідно з припущенням $dW^r(t) \rightarrow 0$ при $r > 2$ маємо

$$dW^n(t) = nW^{n-1}(t)dW(t) + \frac{n(n-1)}{2}W^{n-2}(t)dt,$$

або

$$\int_{t_0}^t W^n(t') dW(t') = \frac{1}{n+1} [W^{n+1}(t) - W^{n+1}(t_0)] - \frac{n}{2} \int_{t_0}^t W^{n-1}(t) dt.$$

Правила диференціювання. При записі диференціалів вінерівського процесу необхідно зберігати члени до другого порядку. Тоді

$$d\phi(W(t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial \phi}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial W^2} (dW)^2 + \dots \quad (3.27)$$

Згідно з поданням

$$(dt)^2 \rightarrow 0, \quad dt dW(t) \rightarrow 0 \quad (dW(t))^2 = dt$$

члени вищих порядків спадають до нуля, у результаті одержуємо диференціал Іто

$$d\phi(W(t), t) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial W^2} \right) dt + \frac{\partial \phi}{\partial W} dW. \quad (3.28)$$

Приклад 3.2 Перехід до адитивного шуму

Визначимо новий стохастичний процес із реалізацією $dy(t) = dx(t)/g(x(t))$ (перейдемо від мультиплікативного шуму до адитивного). Правило Іто стверджує, що у поданні диференціала $dy(t)$ необхідно зберігати члени не вище другого порядку:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}(dx)^2, \quad (3.29)$$

де диференціал dx виражається з рівняння Ланжевена з мультиплікативним шумом

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t), \quad (3.30)$$

яке можна записати у вигляді стохастичного диференціального рівняння

$$dx = f(x)dt + g(x)dW(t). \quad (3.31)$$

Використовуючи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dg(x)/dx}{g(x)^2}, \quad (dx)^2 = g(x)^2dt$$

та підставляючи (3.31) у (3.29), маємо

$$dy = \left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{2} \frac{dg(x)}{dx} \right] dt + dW. \quad (3.32)$$

Йдучи за прикладом числення Стратоновича, замість (3.32) маємо

$$dy = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] dt + dW. \quad (3.33)$$

Усереднення та кореляція. Для невипереджуючої функції маємо

$$\left\langle \int_{t_0}^t \psi(t') dW(t') \right\rangle = 0.$$

Це впливає з визначення невинпереджуючої функції у стохастичному інтегралі

$$\left\langle \sum_i \psi_{i-1} \delta W_i \right\rangle = \sum_i \langle \psi_{i-1} \rangle \langle W_i \rangle = 0.$$

Якщо існує дві невинпереджуючі функції $\psi(t)$ та $\phi(t)$, то

$$\left\langle \int_{t_0}^t \psi(t') dW(t') \int_{t_0}^t \phi(t') dW(t') \right\rangle = \int_{t_0}^t \langle \psi(t') \phi(t') \rangle dt'.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i \psi_{i-1} \delta W_i \sum_j \phi_{j-1} \delta W_j \right\rangle &= \left\langle \sum_i \psi_{i-1} \phi_{i-1} (\delta W_i)^2 \right\rangle + \\ &+ \left\langle \sum_{i>j} (\psi_{i-1} \phi_{j-1} + \psi_{j-1} \phi_{i-1}) \delta W_i \delta W_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Незалежність прирощувань вінерівського процесу обнуляє другий доданок, що приводить до шуканого результату.

Теорема 3.2 (Вонг–Закаї). *Нехай $W^{(n)}$ — послідовність випадкових процесів, неперервних, з обмеженою дисперсією, таких, що мають неперервну похідну та збігаються майже рівномірно до вінерівського процесу W . Тоді при деяких слабких припущеннях відносно f та g розв'язки стохастичного диференціального рівняння*

$$dx^{(n)} = f(x^{(n)}) + \sigma g(x^{(n)}) dW^{(n)},$$

де всі інтеграли розуміються як звичайні інтеграли Рімана, збігаються майже рівномірно до розв'язку стохастичного диференціального рівняння Іто:

$$dx = \left[f(x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{dg(x)}{dx} g(x) \right] dt + \sigma g(x) dW. \quad (3.34)$$

Це означає, що при виборі за вихідне феноменологічне рівняння з реальним шумом наведеного вище вигляду та переходу до границі білого шуму останнє можна інтерпретувати як стохастичне диференціальне рівняння Стратоновича.

У випадку, коли визначення стохастичного інтеграла залежить від вибору точки на елементарному часовому інтервалі, що задається сталою λ , стохастичне рівняння можна записати у вигляді

$$dx = \left[f(x) + \lambda \sigma^2 \frac{dg(x)}{dx} g(x) \right] dt + \sigma g(x) dW. \quad (3.35)$$

Це дає привід до спекуляцій, пов'язаних із вибором числення. Виправданими є лише два вибори: Іто і Стратоновича. Перший із них зодовольняє математичне визначення марковості, другий відповідає фізичній інтерпретації стохастичного процесу $W(t)$.

Приклад 3.3 Розрахунки за Іто та Стратоновичем: мультиплікативний процес

Розглянемо стохастичний процес $x(t)$, який задається розв'язком рівняння Ланжевена із білим шумом $\xi(t)$:

$$\dot{x} = \sigma x \xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (3.36)$$

де точка означає похідну за часом. Відповідний процес називається *мультиплікативним*. Для нього можна записати стохастичне диференціальне рівняння

$$dx = \sigma x dW(t), \quad W(t) = \int_0^t \xi(t') dt', \quad (dW(t))^2 = dt. \quad (3.37)$$

Обчислимо середнє та кореляційну функцію для $x(t)$.

Підхід Іто. Рівняння Ланжевена у такому вигляді не може бути проінтегровано у стандартний спосіб. Тому необхідно перейти до рівняння із адитивним шумом, з яким простіше оперувати. Для цього визначимо новий процес $y(t) = \ln x(t)$, диференціал якого подається у вигляді

$$dy = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 = \sigma dW(t) - \frac{\sigma^2}{2} dt. \quad (3.38)$$

Елементарне інтегрування дає

$$y(t) = y(t_0) + \sigma (W(t) - W(t_0)) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0). \quad (3.39)$$

Повертаючись до вихідного процесу, маємо:

$$x(t) = x(t_0) \exp \left(\sigma(W(t) - W(t_0)) - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right). \quad (3.40)$$

Проводячи усереднення, отримуємо

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t_0) \rangle \left\langle \exp \left(\sigma(W(t) - W(t_0)) - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right) \right\rangle. \quad (3.41)$$

Оскільки $W(t)$ – є гаусівським процесом, то, скориставшись виразом $\langle e^x \rangle = e^{\langle x^2 \rangle / 2}$, приходимо до висновку:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t_0) \rangle \exp \left(\frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right) = \langle x(t_0) \rangle. \quad (3.42)$$

Цей вираз може бути одержаний безпосереднім усередненням рівняння Ланжевена за умови врахування некорельованості процесів $\xi(t)$ та $x(t)$, що випливає із теореми Новікова або формалізму Іто.

Для кореляційної функції маємо:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \\ &= \langle x^2(t_0) \rangle \left\langle \exp \left(\sigma(W(t) - W(s) - 2W(t_0)) - \frac{\sigma^2}{2}(t + s - 2t_0) \right) \right\rangle = \\ &= \langle x^2(t_0) \rangle \exp \left(\frac{\sigma^2}{2} \langle (W(t) - W(s) - 2W(t_0))^2 \rangle - \frac{\sigma^2}{2}(t + s - 2t_0) \right) = \\ &= \langle x^2(t_0) \rangle \exp \left(\frac{\sigma^2}{2}(t + s - 2t_0 + 2 \min(t, s)) - \frac{\sigma^2}{2}(t + s - 2t_0) \right) = \\ &= \langle x^2(t_0) \rangle \exp (\sigma^2 \min(t - t_0, s - t_0)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Підхід Стратоновича. У випадку числення Стратоновича інтегрування можна провести відразу, скориставшись стохастичним диференціальним рівнянням. Тоді маємо:

$$x(t) = x(t_0) \exp (\sigma(W(t) - W(t_0))). \quad (3.44)$$

Для середнього та кореляційної функції отримуємо:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t_0) \rangle \exp \left(\frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right), \quad (3.45)$$

$$\langle x(t)x(s) \rangle = \langle x^2(t_0) \rangle \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} [t + s - 2t_0 + 2 \min(t - t_0, s - t_0)]\right). \quad (3.46)$$

Таким чином, відповіді, одержані для двох різних типів числень, відрізняються. Тому для встановлення істини необхідне порівняння із реальним експериментом щодо даної задачі.

Приклад 3.4 Осцилятор Кубо

Розглянемо осцилятор, у якого частота є величиною флуктуаційною, тобто $\omega \rightarrow \omega_0 + \sqrt{2\gamma}\tilde{\xi}(t)$. Відповідне рівняння першого порядку (рівняння Ланжевена) буде таким:

$$\dot{z}(t) = i\left(\omega_0 + \sqrt{2\gamma}\tilde{\xi}(t)\right) z(t). \quad (3.47)$$

При інтерпретації цього рівняння за Іто ми приходимо до висновку, що флуктуації не зумовлюються на середньому, тобто

$$\langle z(t) \rangle = \langle z(0) \rangle \exp(i\omega_0 t). \quad (3.48)$$

Якщо це рівняння інтерпретувати у сенсі Стратоновича, то замість нього, використовуючи теорему Вонга-Закаї, приходимо до рівняння

$$dz(t) = \left((i\omega_0 - \gamma)dt + i\sqrt{2\gamma}W(t) \right) z(t), \quad (3.49)$$

де $W(t)$ розуміється як чисто вінерівський процес, і відповідно далі застосовується формалізм Іто. Безпосереднє інтегрування дає

$$\langle \dot{z} \rangle = (i\omega_0 - \gamma)\langle z \rangle, \quad (3.50)$$

або

$$\langle z(t) \rangle = \langle z(t_0) \rangle \exp((i\omega_0 - \gamma)t). \quad (3.51)$$

Кореляційна функція береться як

$$\begin{aligned} \langle z(t)z^*(s) \rangle &= \langle |z(0)|^2 \rangle \left\langle \exp(i\omega_0(t-s) + i\sqrt{2\gamma}(W(t) - W(s))) \right\rangle = \\ &= \langle |z(0)|^2 \rangle \exp(i\omega_0(t-s) - \gamma(t+s-2\min(t,s))) = \\ &= \langle |z(0)|^2 \rangle \exp(i\omega_0(t-s) - \gamma|t-s|). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Отже, приходимо до затухання, яке індуковане дією шуму. У реальному експерименті спостерігався саме такий ефект. Тому для даної задачі коректним є формалізм Стратоновича.

3.3 Чисельне розв'язання рівняння Ланжевена [4, 28]

Методи Мільштайна та Ойлера. Розглянемо процедуру розв'язання рівняння Ланжевена

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)\xi(t)$$

за допомогою рекурсії

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(x(s))ds + \int_t^{t+h} g(x(s))\xi(s)ds.$$

Припустимо, що функції f та g є такими, що диференціюються та для них можна провести розвинення в ряд Тейлора поблизу $x = x(t)$:

$$f(x(s)) = f(x(t)) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x(t)} (x(s) - x(t)) + O[(x(s) - x(t))^2],$$

$$g(x(s)) = g(x(t)) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x(t)} (x(s) - x(t)) + O[(x(s) - x(t))^2].$$

Після підстановки членів найменшого порядку маємо

$$x(t+h) - x(t) = hf(x(t)) + hO[(x(s) - x(t))] + w_h(t)g(x(t)) + w_h(t)O[(x(s) - x(t))],$$

де

$$w_h(t) = \int_t^{t+h} ds\xi(s) = h^{1/2}u(t)$$

має порядок $h^{1/2}$. Окрім того, стохастичний інтеграл має порядок $h^{1/2}$, для якого

$$x(s) - x(t) = g(x(t)) \int_t^s dv\xi(v) = O[h^{1/2}].$$

Далі скористаємося розвиненням у ряд функції $g(x(s))$ так, що додатак від складової порядку $h^{1/2}$ дає

$$\begin{aligned} & [\partial g(x(t))/\partial x] \int_t^{t+h} ds(x(s) - x(t))\xi(s) + O[(x(s) - x(t))]^2 w_h(t) = \\ & = g(x(t))[\partial g(x(t))/\partial x] \int_t^{t+h} ds \int_t^s dv \xi(s)\xi(v) + O[h^{3/2}]. \end{aligned}$$

Змінюючи порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} ds \int_t^s dv \xi(s)\xi(v) &= \int_t^{t+h} dv \int_v^{t+h} ds \xi(s)\xi(v) = \\ &= \int_t^{t+h} ds \int_s^{t+h} dv \xi(s)\xi(v), \end{aligned}$$

робимо висновок, що перший та третій вирази є однаковими, тому однаковими є половини їх сум і попередній вираз може бути замінений на

$$\frac{1}{2} \int_t^{t+h} dv \int_t^{t+h} ds \xi(s)\xi(v) + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} ds \xi(s) \int_t^{t+h} dv \xi(v) = \frac{1}{2} [w_h(t)]^2.$$

Об'єднавши всі частини, одержуємо

$$x(t+h) = x(t) + h^{1/2}g(x(t))u(t) + h \left[f(x(t)) + \frac{g(x(t))\partial g(x(t))/\partial x}{2} u(t)^2 \right]. \tag{3.53}$$

Цей вираз відомий як метод Мільштайна. Методу Ойлера відповідає така конструкція

$$x(t+h) = x(t) + h^{1/2}g(x(t))u(t) + hf(x(t)). \tag{3.54}$$

Фактично метод Мільштайна відповідає використанню правила Стратоновича, у той час як метод Ойлера — інтерпретації рівняння у сенсі Іто.

Метод Рунге—Кутта. При розв'язанні звичайного рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

метод Ойлера

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)) + O[h^2]$$

може бути модифікованим:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))].$$

Метод Рунге—Кутта заміняє $x(t+h)$ у правій частині за допомогою метода Ойлера, що приводить до алгоритму точності $O[h^3]$:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t) + hf(t, x(t)))] + O[h^3].$$

Останнє записується у вигляді

$$\begin{aligned} k &= hf(t, x(t)), \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t) + k)]. \end{aligned}$$

Аналогічний підхід може бути використаний для стохастичного диференціального рівняння з мультиплікативним шумом

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t+h))] + \\ &+ \frac{h^{1/2}u(t)}{2}[g(t, x(t)) + g(t+h, x(t+h))]. \end{aligned}$$

Замінюючи $x(t+h)$ у правій частині за допомогою метода Ойлера, одержуємо

$$\begin{aligned} k &= hf(t, x(t)), \\ l &= h^{1/2}u(t)g(t, x(t)), \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t) + l + k)] + (3.55) \\ &\quad \frac{h^{1/2}u(t)}{2}[g(t, x(t)) + g(t+h, x(t) + l + k)]. \end{aligned}$$

За порядком точності цей метод не перевищує метод Мільштайна, але толерантно поводитьься з детермінованою силою та запобігає нестійкості методу Ойлера.

Основна література з теорії стохастичних диференціальних рівнянь є суто математичною і доволі складною до сприйняття. У спрощеному поданні можна порекомендувати джерела, що стосуються фізичних систем. Найбільшою популярністю користуються книги Ван Кампена [18], Гардинера [19] та Хорстхемке [6]. Методи чисельних експериментів у більшості випадків можна знайти лише в англійських виданнях [4, 5] та наукових статтях.

Питання для самоконтролю

- 1 Принципи переходу від детерміністичного до стохастичного рівняння.
- 2 Фізичний зміст формули Айнштайна для броунівського руху.
- 3 Стохастичний інтеграл та диференціал Іто.
- 4 Наслідки теореми Вонга-Закаї.
- 5 Відмінність алгоритмів моделювання для підходу Іто та Стратоновича.

Задачі до розділу 3

ЗАДАЧА 3.1 Одержати спектральну густину швидкостей для броунівської частинки за допомогою перетворення Фур'є рівняння Ланжевена.

ЗАДАЧА 3.2 Одержати спектральну густину швидкостей та координат для броунівської частинки за допомогою перетворення Фур'є рівняння Ланжевена.

ЗАДАЧА 3.3 Знайти співвідношення Айнштайна, подаючи рівняння броунівського руху у вигляді рівняння другого порядку $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$.

ЗАДАЧА 3.4 Дослідити статистичну поведінку броунівського вібратора, рівняння руху якого $m\ddot{x} = -\alpha x - \gamma\dot{x} + \xi(t)$, встановивши умови коливань $\langle x^2(t) \rangle$ та аперіодичної зміни.

ЗАДАЧА 3.5 Провести чисельне моделювання броунівської частинки у двовимірному просторі та експериментально підтвердити закони часової поведінки середньої швидкості та корелятора швидкостей.

Розділ 4

Рівняння Фоккера–Планка [2, 6, 19, 28]

Стохастичний характер системи проявляється у тому, що, незважаючи на фіксацію початкових умов, рівняння руху має не один розв'язок $x(t)$, а континуальну множину $\{x(t)\}$ таких розв'язків, розподілених випадково. Ця обставина є тривіальним результатом наявності випадкової сили ζ у рівнянні руху (3.12). Тому є актуальною задача визначення функції

$$p(x, t) = \int \delta\{x - x(t)\} P\{x(t)\} \mathcal{D}x(t),$$

яка за поданим функціоналом $P\{x(t)\}$ розподілу розв'язків стохастичного рівняння дозволяє знайти густину ймовірності реалізації значення x у даний момент часу t . Інтегрування тут проводиться за всім набором функцій $\{x(t)\}$. Функція розподілу $p(x, t)$ є розв'язком рівняння Фоккера–Планка, одержанню якого присвячено цей розділ.

У підрозділі 4.1 кінетичне рівняння, яке пов'язує процеси, що проходять на мікроскопічному та макроскопічному рівнях. Безпосередньому одержанню рівняння Фоккера–Планка присвячено підрозділ 4.2, де розглянуто використання мікроскопічного підходу, зв'язок рівняння Фоккера–Планка із рівнянням Ланжевена. Способи розв'язання рівняння Фоккера–Планка подано у підрозділі 4.3. У підрозділі 4.4 викладаються алгоритми чисельної процедури одержання розподілів із такого рівняння.

4.1 Рівняння Чепмена–Колмогорова та кінетичне рівняння

Розглянемо багаточастинкову систему. Розподіл $p(x_3, t_3; x_1, t_1)$ одержується із $p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1)$ інтегруванням за однією з координат:

$$p(x_3, t_3; x_1, t_1) = \int p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) dx_2.$$

Для марковського процесу цей вираз можна переписати у вигляді

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) = \int p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) dx_2,$$

де використано припущення $t_3 \geq t_2 \geq t_1$. Оскільки функція $p_1(x_1, t_1)$ є довільною, то маємо

$$p(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int p(x_3, t_3|x_2, t_2)p(x_2, t_2|x_1, t_1)dx_2. \quad (4.1)$$

Рівняння Чепмена–Колмогорова (4.1) інтерпретується так: ймовірність переходу із x_1 у момент t_1 до x_3 у момент t_3 зводиться до ймовірності переходу зі стану x_1 у момент t_1 до x_2 у момент t_2 помножену на ймовірність переходу із x_2 у момент t_2 до x_3 у момент t_3 . При цьому за проміжними станами проводиться складання (інтегрування) (див. рис.4.1а).

Під час розгляду переходу в певний стан у момент часу $t_3 = t_2 + \delta t$ у границі $\delta t \rightarrow 0$ одержуємо рівняння Чепмена–Колмогорова у диференціальній формі. Skorистаємося співвідношенням $p(x_2, t_1|x_1, t_1) = \delta(x_1 - x_2)$, яке означає, що система не може перебувати в один момент часу в двох різних станах. Розвиваючи $p(x_1, t_1|x_2, t_2)$ у ряд за степенями $\delta t = t_2 - t_1$, одержуємо

$$p(x_2, t_1 + \delta t|x_1, t_1) = [1 - \bar{w}(x_1; t_1)\delta t]\delta(x_1 - x_2) + w(x_2, x_1; t_1)\delta t + O(\delta t)^2,$$

де величина $w(x_2, x_1; t_1)$ описує частоту переходів (ймовірність переходу

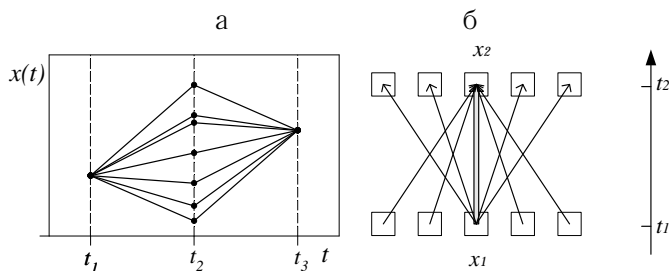


Рисунок 4.1 — Ймовірнісний опис: а) рівняння Чепмена–Колмогорова (інтегрування проводиться за усіма проміжними станами); б) master equation

в одиницю часу) із стану x_1 у x_2 в момент t_1 . Згідно з умовою нормування

$$\int p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = 1.$$

Звідси випливає

$$\int w(x_2, x_1; t_1) dx_2 = \bar{w}(x_1; t_1).$$

У границі $\delta t \rightarrow 0$ можна записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) &= \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [p(x_2, t_2 + \delta t | x_1, t_1) - p(x_2, t_2 | x_1, t_1)]. \end{aligned}$$

Нехтуючи членами вищих порядків, із рівняння (4.1) для ймовірності переходу із x_1 у момент t_1 у x_2 у момент $t_3 = t_2 + \delta t$ маємо

$$\begin{aligned} p(x_2, t_2 + \delta t | x_1, t_1) &= \int dx_i p(x_i, t_2 | x_1, t_1) p(x_2, t_2 + \delta t | x_i, t_2) = \\ &= \int dx_i p(x_i, t_2 | x_1, t_1) \{ [1 - \bar{w}(x_i; t_2) \delta t] \delta(x_i - x_2) + w(x_2, x_i; t_2) \delta t \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

що дає

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) &= \int dx_i w(x_2, x_i; t_2) p(x_i, t_2 | x_1, t_1) - \\ &- \int dx_i w(x_i, x_2; t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Домножуючи обидві частини на $p_1(x_1, t_1)$ та інтегруючи за x_1 , одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int dx' [w(x, x'; t) p(x', t) - w(x', x; t) p(x, t)], \quad (4.4)$$

де проведено заміни: $t_2 \rightarrow t$, $x_2 \rightarrow x$, $x_i \rightarrow x'$. Рівняння (4.4) називається *основним кінетичним рівнянням (master equation)*, перший член якого описує збільшення ймовірності перебування системи у

стані x внаслідок переходів із інших станів (x') у даний стан x . Другий член описує відповідне зменшення ймовірності (див. рис.4.1). Важливе значення марковського процесу полягає в тому, що він описується простими рівняннями і в той самий час дає загальну математичну модель. У припущенні, що для малих часових інтервалів δt ймовірності переходів пропорційні δt , одержується кінетичне рівняння. Воно дозволяє встановити поведінку системи на великих інтервалах часу, виходячи з її поведінки на малих часових інтервалах. Ймовірність (частота) переходів $w(x, x'; t)$ виражає марковську поведінку системи на малому часовому інтервалі (відображає мікроскопічну природу).

4.2 Рівняння Фоккера–Планка

4.2.1 Мікроскопічний підхід

При мікроскопічному описі ми користуємось формалізмом основного кінетичного рівняння, оскільки ймовірності мікроскопічних переходів належать йому. Перепишемо (4.4) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int dx' [w(x, x')p(x', t) - w(x', x)p(x, t)]. \quad (4.5)$$

Запишемо ймовірність переходу як функцію стрибка u із початкової точки:

$$w(x, x') = w(x', u), \quad u = x - x'.$$

Тоді (4.5) набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int w(x - u, u)p(x - u, t)du - p(x, t) \int w(x, -u)du. \quad (4.6)$$

Далі основне припущення полягає в тому, що існують лише малі стрибки, тобто $w(x', u)$ має гострий пік за змінною u і повільно змінюється із x , тобто для деякої величини $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} w(x', u) &\approx 0, & \text{при } |u| > \Delta, \\ w(x' + \delta x, u) &\approx w(x', u), & \text{при } |\delta x| < \Delta. \end{aligned}$$

Подальше припущення полягає у тому, що $p(x, t)$ також повільно змінюється зі зміною x . Тоді можна виконати зсув із x у $x - u$ у першому інтегралі (4.6) за допомогою розвинення Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= \int w(x, u) p(x, t) du - \int u \frac{\partial}{\partial x} [w(x, u) p(x, t)] du + \\ &+ \frac{1}{2} \int u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [w(x, u) p(x, t)] du - \\ &- p(x, t) \int w(x, -u) du. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Розвинення ймовірності переходу за другим аргументом є неприпустимим, оскільки вона швидко змінюється із перетворенням u . Тому перший та четвертий члени скорочуються. Для інших складових можна записати

$$D_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u^\nu w(x, u) du = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^\nu p(x', t + \delta t | x, t) dx'. \quad (4.8)$$

У результаті одержуємо *рівняння Фоккера–Планка* у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} D_1(x) p(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(x) p(x, t), \quad (4.9)$$

де перші моменти у (4.8) визначають детерміновану силу $D_1(x) \equiv f(x)$ і коефіцієнт дифузії $D_2(x) = \sigma^2 g^2(x)$. Включаючи у розвинення ймовірності переходу всі члени, одержуємо *ряд Крамерса–Мойала*:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu D_\nu(x) p(x, t). \quad (4.10)$$

Приклад 4.1 Броунівський рух

Члени ряду Крамерса–Мойала визначаються як перший та другий моменти:

$$\begin{aligned} D_1 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (v - v_0) p(v, t_0 + \delta t | v_0, t_0) dv = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \langle v(t) - v_0 \rangle_{v_0} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} (v_0 e^{-\gamma \delta t} - v_0) = -\gamma v_0 = -\gamma v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (v - v_0)^2 p(v, t_0 + \delta t | v_0, t_0) dv = \\
 &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \langle (v(t) - v_0)^2 \rangle_{v_0} = \sigma^2 = \frac{2\gamma T}{m}.
 \end{aligned}$$

У результаті рівняння Фоккера–Планка має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} p(v, t) - \gamma \frac{\partial}{\partial v} v p(v, t) = \frac{\gamma T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} p(v, t), \tag{4.11}$$

де права частина (інтеграл зіткнень Фоккера–Планка) із коефіцієнтом дифузії $D = \gamma kT/m$ описує дифузію у просторі швидкостей — “розпливання” розподілу як функції швидкості, а другий член у лівій частині, що відповідає динамічному тертю, називається дрейфом. Згідно з останнім розподіл імовірності затримується поблизу $v = 0$.

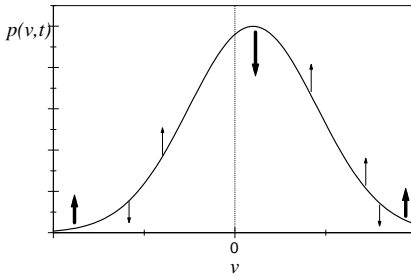


Рисунок 4.2 — Еволюція розподілу $p(v, t)$. Тонкі стрілки показують дію дрейфового члена, товсті — дифузійного

4.2.2 Зв’язок із рівнянням Ланжевена

Чисто білий шум. Розглянемо довільну аналітичну функцію $y(x)$, диференціал якої можна подати у вигляді стохастичного диференціала Іто. Як зазначалося, необхідність урахування членів другого порядку зумовлена тим, що дрейфова та дифузійна складові мають різний порядок малості.

Підставляючи у

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} (dx)^2$$

диференціали

$$dx = f(x)dt + g(x)dW(t), \quad dx^2 = \sigma^2 g(x)^2 dt$$

та усереднюючи їх, одержуємо

$$\begin{aligned} d \langle y(x) \rangle = & \left\langle \frac{dy}{dx} f(x) \right\rangle dt + \sigma \left\langle \frac{dy}{dx} g(x) dW \right\rangle + \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \left\langle \frac{d^2 y}{dx^2} g(x)^2 \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

У лівій частині змінено порядок операцій усереднення й диференціювання, а також враховано, що $(dW)^2 = dt$. У численні Іто ($\lambda = 0$) величини $g(x)$ та $dW = \xi dt$ не корелюють, у зв'язку з чим у другому доданку (4.12) можна виділити множник $\langle dW \rangle = 0$. Тоді, переходячи до похідної за часом та враховуючи визначення середнього

$$\langle y \rangle = \int y(x) p(x, t) dx, \quad (4.13)$$

маємо

$$\begin{aligned} \int y(x) \dot{p}(x, t) dx = & \int f(x) p(x, t) \frac{dy}{dx} dx + \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \int g(x)^2 p(x, t) \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Проводячи у правій частині інтегрування за частинами, виділяємо функцію $y(x)$ як множник у підінтегральних виразах (4.14) (за цієї умови операція диференціювання $\partial/\partial x$ перекидається на функцію розподілу $p(x, t)$). Оскільки функція $y(x)$ є довільною, то рівняння інтегралів виконується лише при однаковості відповідних підінтегральних виразів. У результаті, скорочуючи на $y(x)$, приходимо до рівняння Фоккера–Планка

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-f(x)p + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} g(x)^2 p \right]. \quad (4.15)$$

Воно може бути поданим у вигляді рівняння неперервності

$$\dot{p} + \frac{\partial}{\partial x} J = 0 \quad (4.16)$$

у просторі стохастичної змінної x , де потік імовірності

$$J = J_{dr} + J_{dif}$$

складається із дрейфової J_{dr} та дифузійної J_{dif} компонент:

$$J_{dr} = fp, \quad J_{dif} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2 p. \quad (4.17)$$

Відповідно до рівняння руху f забезпечує швидкість руху $\langle \dot{x} \rangle = f$, а величина

$$D(x) = \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) \quad (4.18)$$

подається як узагальнений коефіцієнт дифузії.

Границя слабкорельованого шуму. Розглянемо граничний випадок реального шуму, кореляційна функція якого може бути зведена до дельта-функції Дірака.

Нехай стохастична система описується рівнянням

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t),$$

де

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma C(t, t') \rightarrow \sigma^2 \delta(t - t').$$

Розв'язок детерміністичного рівняння руху з початковою умовою $x_0 = x(0)$ подається функцією $x(t, x_0)$. Ми можемо припустити, що $x(t)$ є випадковою змінною з густиною ймовірності

$$\rho_d(x; t) = \delta(x - x(t, x_0)).$$

Припускаючи, що початкова умова є випадковою, робимо висновок, що $x(t)$ — випадковий процес. Його густина ймовірності подається усередненням вищенаведеної функції розподілу:

$$\rho(x; t) = \langle \delta(x - x(t, x_0)) \rangle_{x_0}.$$

Функція розподілу має задовольняти рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}\rho) = 0.$$

Підставляючи сюди вираз для похідної \dot{x} із рівняння Ланжевена, маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(f(x) + \sigma g(x)\xi(t))\rho].$$

У результаті густина ймовірності $p(x, t)$ буде середньою від $\rho(x; t)$ за шумовим розподілом, тобто

$$p(x, t) = \langle \rho(x; t) \rangle = \langle \delta(x - x(t, x_0)) \rangle_{x_0, \xi}.$$

Усреднюючи за шумом одержане рівняння неперервності, маємо

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}f(x)p - \frac{\partial}{\partial x}g(x)\langle \xi(t) \rangle \rho(x, \xi(t)).$$

Згідно з формулою Новікова одержуємо

$$\langle \xi(t)\rho(x, \xi(t)) \rangle = \int_0^t dt' \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \left\langle \frac{\delta \rho}{\delta \xi(t')} \right\rangle.$$

Застосовуючи границю дельта–корельованого процесу $\xi(t)$, маємо

$$\langle \xi(t)\rho(x, \xi(t)) \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \left\langle \frac{\delta \rho}{\delta \xi(t')} \right\rangle_{t'=t}.$$

Використовуючи функціональне числення, можна записати

$$\left\langle \frac{\delta \rho}{\delta \xi(t')} \right\rangle_{t'=t} = \left\langle \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} \bigg|_{t'=t} \frac{\delta \rho}{\delta x(t)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} \bigg|_{t'=t} \rho \right\rangle.$$

За формальним розв'язком рівняння Ланжевена

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' f(x(t')) + \int_0^t dt' g(x(t'))\xi(t')$$

одержуємо

$$\left. \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} \right|_{t'=t} = g(x(t)), \quad \left\langle \frac{\delta \rho}{\delta \xi(t')} \right\rangle_{t'=t} = -\frac{\partial}{\partial x} g(x) \langle \rho \rangle = -\frac{\partial}{\partial x} g(x) p.$$

У результаті рівняння Фоккера–Планка набирає вигляду

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-fp + \frac{\sigma^2}{2} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) p \right]. \quad (4.19)$$

4.2.3 Подання багатопараметричних систем

У припущенні існування набору змінних $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ рівняння еволюції усього вектора \mathbf{x} можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(t). \quad (4.20)$$

Ланжевенівські джерела $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ будемо розглядати як білі шуми зі стандартними статистичними властивостями:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (4.21)$$

Далі скористаємося формалізмом Стратоновича. Рівнянню (4.20) можна надати вигляду

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(\{x\}, t) + g_{ij}(\{x\}) \xi_j(t). \quad (4.22)$$

Визначимо коефіцієнти ряду Крамерса–Мойала. Для цього необхідно знати вирази для коефіцієнтів дрейфу та дифузії:

$$\begin{aligned} D^{(i)}(\{x\}, t) &\equiv D_1^{(i)}(\{x\}, t) = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \langle x_i(t + \delta t) - x_i(0) \rangle |_{x_k(t) = x_k(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
D^{(ij)}(\{x\}, t) &\equiv D_2^{(ij)}(\{x\}, t) = \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \langle [x_i(t + \delta t) - x_i(0)][x_j(t + \delta t) - x_j(0)] \rangle |_{x_k(t) = x_k(0)}, \\
&\quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Запишемо формальний розв'язок рівняння Ланжевена, припускаючи, що шум є слабокорельованим (майже білим), у вигляді

$$x_i(t + \delta t) - x_i = \int_t^{t + \delta t} [f_i(\{x(t')\}, t') + g_{ij}(\{x(t')\}, t') \xi_i(t')] dt', \quad x_i \equiv x_i(0).$$

Розвиваючи детерміністичну силу f_i та мультиплікативну функцію g_{ij} в ряд

$$\begin{aligned}
f_i(\{x(t')\}, t') &= f_i(\{x\}, t') + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\{x_i\}, t') \right) (x_k(t') - x_k) + \dots, \\
g_{ij}(\{x(t')\}) &= g_{ij}(\{x\}, t') + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\{x_i\}, t') \right) (x_k(t') - x_k) + \dots
\end{aligned}$$

і підставляючи їх у розв'язок рівняння Ланжевена, маємо

$$\begin{aligned}
x_i(t + \delta t) - x_i &= \int_t^{t + \delta t} f_i(\{x(t')\}, t') dt' + \\
&+ \int_t^{t + \delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\{x_i\}, t') \right) (x_k(t') - x_k) dt' + \dots + \\
&+ \int_t^{t + \delta t} g_{ij}(\{x(t')\}, t') \xi_i(t') dt' + \\
&+ \int_t^{t + \delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\{x_i\}, t') \right) (x_k(t') - x_k) dt' + \dots
\end{aligned}$$

Проводячи усереднювання отриманого виразу і залишаючи доданки, що не перевищують порядок dt , одержуємо

$$D^{(i)}(\{x\}, t) = f_i(\{x\}, t) + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \int_t^{t'} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\{x\}, t') \right) g_{kl}(\{x\}, t'') \delta_{jl} \delta(t' - t'') dt' dt''.$$

Оскільки підінтегральна функція містить дельта-функцію Дірака, то робимо висновок, що

$$D^{(i)}(\{x\}, t) = f_i(\{x\}, t) + \frac{1}{2} g_{kj}(\{x\}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\{x\}, t). \tag{4.25}$$

Дифузійний коефіцієнт стає дифузійною матрицею і набирає вигляду

$$D^{(ij)}(\{x\}, t) = g_{ik}(\{x\}, t) g_{kj}(\{x\}, t). \tag{4.26}$$

У результаті рівняння Фоккера-Планка багатопараметричної системи записується у такий спосіб:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\{x\}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} D^{(i)}(\{x\}, t) p(\{x\}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D^{(ij)}(\{x\}, t) p(\{x\}, t), \tag{4.27}$$

де за індексами, що повторюються, виконується підсумовування.

4.2.4 Границі дифузійного процесу

У фізичних прикладах простір станів випадкового процесу не завжди збігається з дійсною віссю \mathbb{R} . Процес може бути обмежений підмножиною дійсної осі, наприклад \mathbb{R}_0^+ (якщо стохастична змінна відіграє роль концентрації). У загальному випадку вважається, що простір станів дифузійного процесу обмежено інтервалом $[b_1, b_2]$, де один або обидва кінці можуть прямувати до нескінченності. Окрім того, вважається, що функції $f(x)$ та $g(x)$, що входять до рівняння Ланжевена, задовольняють умову Ліпшица на будь-якому інтервалі $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ відрізка (b_1, b_2) — існує певна стала K , така, що

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|, \quad x, y \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2].$$

Ця умова виконується, якщо функції, що входять до нього, є неперервно диференційованими. Якщо процес не досягає своїх границь, то він вважається найкращим дифузійним процесом і обмеження на його простір станів не проводяться. Такі границі є недосяжними.

Недосяжні границі. Природні границі при $t \rightarrow \infty$ досягаються лише з нульовою ймовірністю. Нехай β — точка поблизу однієї із границь (b_1). Нехай початковий стан такий, що $x_0 \in (b_1, \beta)$.

i **Границя є природною,** якщо з ймовірністю 1 дифузійний процес досягає точки β раніше, ніж точки b_1 .

Звідси випливає, що границя b_1 ніколи не буде досягнута, якщо процес Z_t , досягнувши точки β , повертається у інтервал (b_1, β) , то з ймовірністю 1 він досягне β ще раз раніше за b_1 .

Класифікація границь ґрунтується на розгляді інтегрування деяких функцій. Розглянемо функцію

$$\phi(x) = \exp \left(- \int_{\beta}^x \frac{2f(y)}{\sigma^2 g(x)^2} dy \right). \quad (4.28)$$

Математично природність границі b_1 впливає із нескінченності такого інтеграла

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \phi(x) dx, \quad (4.29)$$

тобто b_1 — природна границя, коли $L_1(b_1) = \infty$.

Нехай при $t = 0$ процес перебуває у стані $x_0 \in (b_1, \beta)$.

i **Границя називається притягувальною,** коли процес залишає інтервал (b_1, β) за кінцевий час, причому через праву точку, або не залишає його, тоді $x(t) \rightarrow b_1$ при $t \rightarrow \infty$.

Для такої границі:

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \phi(x) dx < \infty,$$

$$L_2(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \frac{dx}{\sigma^2 g(x)^2} \int_{b_1}^y \phi(x) \phi(y)^{-1} dy = \infty. \quad (4.30)$$

Якщо не виконується ні $L_1(b_i) = \infty$, ні $L_2(b_i) = \infty$, то з ненульовою ймовірністю деякі траєкторії досягають границі b_i за кінцевий час. У такому разі процес відчуває границю і його поведінка визначається не лише дрейфовою та дифузійною складовими, але й граничними умовами, які мають бути накладені відповідним чином.

Типи граничних умов:

- *поглинання* — досягнувши границі b_i , дифузійний процес залишається там само;
- *віддзеркалення* — досягнувши границі b_i , дифузійний процес неперервно або миттєво повертається у інтервал (b_1, b_2) (миттєве віддзеркалення) або залишається впродовж певного часового періоду на границі (відображення із запізненням);
- *віддзеркалення з відскоком* — досягнувши границі b_i , дифузійний процес стрибком повертається у випадкову точку інтервалу (b_1, b_2) .

Комбінації цих умов породжують більш складні граничні умови.

i **Досяжна границя є поглинальною, якщо $L_1(b_i) < \infty$ та $L_2(b_i) < \infty$ при**

$$L_3(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \frac{1}{\sigma^2 g(x)^2} \phi(x)^{-1} dx = \infty. \quad (4.31)$$

Отже, якщо процес мав початковий стан $x_0 \in (b_1, \beta)$, то ймовірність досягнення точки β збігається з нулем, коли $x_0 \rightarrow b_1$.

i *Границя є регулярною, якщо $L_1(b_i) < \infty$, $L_2(b_i) < \infty$, $L_3(b_i) < \infty$.*

У такому разі можуть накладатися будь-які обмеження.

4.3 Розв'язання рівняння Фоккера–Планка

4.3.1 Стаціонарний випадок

Оскільки флуктуації середовища допускають моделювання випадкового процесу за допомогою стаціонарного процесу, можна очікувати, що у загальному випадку в границі $t \rightarrow \infty$ система переходить у стаціонарний режим. Стаціонарність означає, що з подальшою зміною часу в системі встановлюється густина ймовірності $p(x)$, форма якої далі не змінюється. Інакше кажучи, ймовірність стає незалежною від часу. Однак, траєкторії не збігаються до часонезалежної; змінна x продовжує флуктувати, вона змінюється із плином часу на крок τ (тобто $x(t) \rightarrow x(t + \tau)$). Однак, флуктуації є такими, що $x(t)$ та $x(t + \tau)$ мають однакову густину ймовірності $p(x)$.

Однопараметрична система. Далі буде розглянуто стаціонарний випадок, що відповідає визначенню білого шуму. Запишемо рівняння Фоккера–Планка у вигляді

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) = 0,$$

де введено потік густини ймовірності

$$J(x, t) = f(x)p(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x)p(x, t).$$

Одержане рівняння неперервності виражає факт зберігання ймовірності. Стаціонарне рівняння вироджується у

$$\frac{\partial}{\partial x} J(x, t) = 0.$$

Звідси випливає, що стаціонарний потік імовірності сталий у просторі станів $[b_1, b_2]$:

$$J \equiv J_s(x) = J(b_1) = J(b_2), \quad x \in [b_1, b_2].$$

У результаті стаціонарна густина ймовірності задовольняє рівняння

$$-J = -f(x)p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x)p(x, t).$$

Для його розв'язання введемо допоміжну функцію $\phi(x) = g^2(x)p_s(x)$. Тоді маємо

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g^2(x)} \phi(x) - \frac{2}{\sigma^2} J.$$

У результаті розв'язання цього рівняння

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) - \frac{2J}{\sigma^2 g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) \int^x \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int^{x'} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) dx'.$$

Стала інтегрування визначається за умови нормування густини ймовірності, а потік імовірності визначається залежно від характеру границь дифузійного процесу. У випадку природної границі або регулярної з миттєвим відображенням потоку ймовірності не існує, тому $J \equiv 0$. У такому разі

$$p_s(x) = N \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} U_{ef}(x)\right), \tag{4.32}$$

де введено позначення для ефективного потенціалу

$$U_{ef}(x) = \ln g^2(x) - 2 \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du. \tag{4.33}$$

Для того щоб (4.32) була густиною ймовірності, її необхідно нормувати:

$$N^{-1} = \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) < \infty.$$

Очевидно, що у випадку дрейфової складової $f(x) + \sigma^2 g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x)/2$ стаціонарна густина ймовірності має вигляд

$$p_s(x) = \frac{N}{g(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right).$$

Таким чином, можна стверджувати, що стаціонарна густина ймовірності визначається функцією

$$p_s(x) = \frac{N}{g^{2(1-\lambda)}(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right), \quad (4.34)$$

де $\lambda = 0$ відповідає численню Іто, а $\lambda = 1/2$ — Стратоновича.

Двопараметрична система: броунівський рух у потенціалі. Розглянемо рух броунівської частинки у полі потенціалу $V(x)$. Припускається, що зіткнення частинки з молекулами середовища не зазнає впливу потенціалу. Тоді рівняння Ланжевена набирає вигляду

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\gamma v + f(x) + \xi(t), \\ \dot{x} &= v, \end{aligned} \quad (4.35)$$

де $f(x) = -\partial V(x)/\partial x$, $\xi(t)$ — білий шум з інтенсивністю $\sigma^2 = 2\gamma T/m$. Тоді дрейфові та дифузійні коефіцієнти мають вигляд

$$\begin{aligned} D_x &= v, & D_{xx} &= D_{xv} = D_{vx} = 0, \\ D_v &= -\gamma v + f(x), & D_{vv} &= \sigma^2/2 = \gamma T/m. \end{aligned}$$

У результаті рівняння еволюції густини ймовірності перетворюється у рівняння Крамерса:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, v, t) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v - f(x)] + \frac{\gamma T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} p(x, v, t). \quad (4.36)$$

Розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$p(x, v, t) = \Phi(x, t) \exp(-mv^2/2T).$$

Підстановка його у рівняння (4.36) дає

$$\dot{\Phi} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{mf(x)}{T} \right\} v\Phi.$$

Оскільки Φ від швидкості не залежить, то у стаціонарному випадку $\dot{\Phi} = 0$ одержуємо

$$\Phi(x) = \Phi_0 \exp(-V(x)/T),$$

що приводить до розподілу Максвелла-Больцмана

$$p(x, v) = N \exp(-[mv^2/2 + V(x)]/T). \quad (4.37)$$

Для того щоб отримати залежність тільки від координати x , необхідно проінтегрувати за швидкостями. У результаті маємо розподіл Больцмана $p(x) = N_x \exp(-V(x)/T)$. Останнє еквівалентне розв'язку рівняння Фоккера–Планка з детерміністичною силою еволюції $f = -V'$ і адитивним шумом інтенсивності $2T$.

4.3.2 Нестационарний розподіл

Дослідження нестационарного розподілу досягається лише в автономному режимі [29–32], де залежність від двох аргументів x, t виражається через єдину змінну $y = x/a(t)$:

$$p(x, t) = a^\alpha \varphi(y), \quad (4.38)$$

функції $a(t)$, $\varphi(y)$ та показник α підлягають подальшому визначенню. Із математичної точки зору рівняння (4.38) означає, що розподіл імовірності подається однорідною функцією порядку α . Із фізичної точки зору перехід до нової змінної $y = x/a$ відповідає вибору масштабу вимірювання величини x , величина якого $a(t)$ змінюється із часом. Властивість однорідності (4.38) віддзеркалюється *самоподібністю фазового простору* стохастичної системи, наявність якого дозволяє вимірювати величину x у довільному масштабі $a(t)$. Як відомо, зазначену властивість мають фрактальні об'єкти [33–35]. Таким чином, припущення

(4.38) означає, що область визначення фазового простору стохастичної системи є фрактальною множиною, розмірність якого D обмежена значеннями 2 (звичайна фазова площина) та 0 (точка, що відповідає положенню рівноваги).

Для визначення показника α підставимо залежність (4.38) в умову нормування $\int p(x, t) dx = 1$. У результаті отримуємо

$$(a(t))^{-(1+\alpha)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy, \quad (4.39)$$

ліва частина якого містить залежність від часу, а права — ні. Звідси випливає результат

$$\alpha = -1, \quad (4.40)$$

урахування якого приводить до звичайної умови нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = 1. \quad (4.41)$$

Вигляд функції $\varphi(x)$ може бути знайдено лише за скейлінгових властивостях сили $f(x)$ та мультиплікативної функції $g(x)$. За аналогією із (4.38) приймемо

$$f(x) = a^\beta F(y), \quad (4.42)$$

$$g(x) = a^\gamma G(y), \quad y = x/a, \quad (4.43)$$

де залежності $F(y)$, $G(y)$ та показники β , γ вважаються заданими. Підставляючи співвідношення (4.38), (4.42), (4.43) у рівняння Фоккера–Планка, із урахуванням рівнянь

$$\dot{p} = (\alpha\varphi - y\varphi')a^{\alpha-1}\dot{a},$$

$$\nabla \equiv \partial/\partial x = a^{-1}\partial/\partial y$$

одержуємо

$$(a^{-\beta}\dot{a})(\alpha\varphi - y\varphi') = -[F\varphi]' + \frac{\sigma^2}{2}a^{2\gamma-\beta-1}(G^2\varphi)'' \quad (4.44)$$

Тут штрих означає диференціювання за y . Рівняння (4.44) стає звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{\sigma^2}{2} (G^2 \varphi)'' - [F\varphi]' + \mu (y\varphi' - \alpha\varphi) = 0 \quad (4.45)$$

за умови, що його коефіцієнти втрачають залежність від часу. Із цією метою слід припустити, що $a^{-\beta} \dot{a} = \text{const} \equiv \mu$, $2\gamma - \beta - 1 = 0$, звідки одержуємо співвідношення

$$a = [\mu(1 - \beta)]^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (4.46)$$

$$\gamma = (1 + \beta)/2. \quad (4.47)$$

Таким чином, перетворення подібності дозволили знайти часову залежність (4.46) характерного значення $a(t)$ стохастичної змінної $x(t)$, а також зафіксувати показник (4.40) функції розподілу (4.38). Залежність $\varphi(y)$ підпорядковується рівнянню (4.45). Легко бачити, що вона подається у вигляді

$$\sigma^2 (G^2 \varphi)'' = (\tilde{F}_{ef} G^2 \varphi)', \quad (4.48)$$

де введено ефективну силу

$$\tilde{F}_{ef}(y) = -\frac{\partial \tilde{U}_{ef}(y)}{\partial y}, \quad (4.49)$$

величина якої визначається *синергетичним потенціалом*:

$$\tilde{U}_{ef}(y) = U_\mu(y) + U(y), \quad (4.50)$$

$$U_\mu(y) = \mu \int G^{-2}(y) dy^2, \quad (4.51)$$

$$U(y) = -2 \int \frac{F(y)}{G^2(y)} dy. \quad (4.52)$$

Знижуючи порядок диференціального рівняння (4.48), із урахуванням граничних умов

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = 0 \quad y = \pm\infty \quad (4.53)$$

знаходимо загальний розв'язок рівняння Фоккера–Планка у автономному режимі:

$$\varphi(y) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{ef}(y)}{\sigma^2}\right). \quad (4.54)$$

Тут ефективний синергетичний потенціал $U_{ef} \equiv \tilde{U}_{ef} + 2\sigma^2 \ln G$, перенормований за рахунок множника G^2 у (4.48), має вигляд

$$U_{ef}(y) = U_\sigma(y) + U_\mu(y) + U(y), \quad (4.55)$$

де

$$U_\sigma(y) = 2\sigma^2 \ln G(y), \quad (4.56)$$

а решта складових визначаються рівняннями (4.51), (4.52). Стала нормування Z задається умовою (4.41).

Проведений розгляд показує, що опис нестационарного автономного режиму може бути проведений за аналогією зі стаціонарним, якщо від вихідної змінної x та функцій $p(x, t)$, $f(x)$, $g(x)$ перейти до змінних $y = x/a$, $\varphi = p/x^\alpha$, $F = f/a^\beta$, $G = g/a^\gamma$, величини яких визначаються масштабом $a = a(t)$, що задає характерне значення змінної x . Порівняння виразів для стаціонарного рівноважного та нестационарного розподілів показує, що перехід до нестационарного режиму приводить до появи додаткової складової (4.51), яка обумовлена зміною масштабу $a(t)$ згідно з законом (4.46).

Зазначимо, що опис нестационарної стохастичної системи, яка перебуває у автономному режимі, було застосовано І.М. Ліфшицем та В.В. Сльозовим [36] до задачі про виділення нової фази. У наш час ідеї скейлінгу та подібності широко застосовуються при опису фракталів, еволюції просторових структур, які виникають при фазових перетвореннях, а також статистичному аналізу складних систем [37].

4.3.3 Ергодична теорема

Припустимо, що дифузійний процес, який задається стохастичним диференціальним рівнянням, допускає стаціонарний розв'язок усередині простору станів, тобто $p_s(x) > 0$ при всіх $x \in (b_1, b_2)$. Це означає, що

простір станів процесу $x(t)$ не поділяється на два або більше інтервалів, які не сполучаються між собою. Тому незалежно від початкових умов процесу $x(t)$ він буде нескінченну кількість разів повертатися до околу будь-якої точки $x \in (b_1, b_2)$. Для цього необхідно, щоб усередині простору станів флуктуації не пропадали, тобто при всіх $x \in (b_1, b_2)$ виконувалось $g(x) > 0$. У такому разі розв'язок рівняння Фоккера—Планка $p(x, t)$ збігається до стаціонарного розв'язку $p(x, t) \rightarrow p_s(x)$ при $t \rightarrow \infty$.

Можна показати, що коли існує стаціонарна густина ймовірності і дифузійний процес у початковий момент часу починається з неї, то такий процес є *ергодичним*. Для такого процесу виконується *ергодична теорема*, яка стверджує, що коли стала нормування стаціонарного розподілу є скінченною величиною, то з імовірністю 1 виконується співвідношення

$$\overline{f(x)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt = \int_{b_1}^{b_2} f(x) p_s(x) dx \equiv \langle f(x) \rangle. \quad (4.57)$$

Це означає, що середнє будь-якої величини може бути обчислено звичайним усередненням за часом.

Аналогічно можна обчислити стаціонарну густина ймовірності. Для цього скористаємося характеристичною функцією інтервалу $[x - \delta_x, x + \delta_x]$, тобто

$$I_x^{\delta_x}(z) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z \in [x - \delta_x, x + \delta_x], \\ 0, & \text{якщо } z \notin [x - \delta_x, x + \delta_x]. \end{cases}$$

Ергодична теорема стверджує, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_x^{\delta_x}(x(t)) dt = \int_{x-\delta_x}^{x+\delta_x} p_s(z) dz. \quad (4.58)$$

Співвідношення (4.58) показує, що добуток $p_s(x) dx$ дорівнює проміжку часу, який довільна траєкторія дифузійного процесу проводить у нескінченно малому околі стану x .

4.4 Моделювання дифузійних процесів [21]

4.4.1 Дифузія частинки у ґратковому газі

Нехай існує сукупність частинок із концентрацією $0 < c \leq 1$, розмішених на квадратній ґратці. Кожна частинка переміщується у сусідній (найближчий) вузол випадково, так що дві частинки не можуть поміщатися в одному вузлі (взаємодія виключається). Така модель є прикладом ґраткового газу. Фізичним прикладом є дифузія за вакансіями, кількість яких залежить від температури речовини. Основною величиною для розглядання є коефіцієнт дифузії D міченої (індикаторної) частинки.

Алгоритм Монте–Карло для обчислення коефіцієнта дифузії:

- 1 Розподілити частинки з концентрацією c випадково по вузлах ґратки. Позначити частинки та запам'ятати їхні положення у масиві.
- 2 На кожному кроці випадково вибрати частинку та один із сусідніх із нею вузлів. Якщо сусідній вузол не зайнятий, то частинка переходить у нього; у протилежному разі вона зберігає своє поточне положення.

Час вимірюється у довільних одиницях. Взята одиниця вимірювання часу відповідає одному крокові методу Монте–Карло на частинку. За один крок кожна частинка здійснює один (у середньому) перехід. У стаціонарній границі ($t \rightarrow \infty$) коефіцієнт дифузії визначається згідно з формулою

$$D = \frac{1}{2dt} \langle \delta x(t)^2 \rangle,$$

де $\langle \delta x(t)^2 \rangle$ — середньоквадратичне зсунення на одну частинку за час t у d -вимірному просторі.

Випадкові блукання (континуальна границя). В одновимірній моделі випадкових блукань частинка починає рух із точки $x = 0$ при $t = 0$.

Часову вісь розділяють на інтервали δt , за які частинка здійснює стрибок на величину δx із імовірністю переходу $w_+ = w_- = 1/2$ в обох напрямках. Напрямок подальшого руху не залежить від попереднього, що є вираженням умови марковості. Симетрія задачі виявляється у тому, що частинка може мати координату як $-x$, так і $+x$, причому $\langle x_N \rangle = 0$, $\sigma = \sqrt{\langle x_N^2 \rangle}$, де $t = N\delta t$.

Імовірність, що частинка досягне положення x за $N + 1$ крок, тобто за час $(N + 1)\delta t$, залежить лише від імовірності досягання точок $x \pm \delta x$ у попередній момент часу. Таку ймовірність $p(x, t)$ можна виразити із рівняння

$$p(x, t + \delta t) = p(x - \delta x, t)w_+ + p(x + \delta x, t)w_-. \quad (4.59)$$

Для будь-якого t за припущенням $N \rightarrow \infty$ одержуємо, що положення x подаються просторовим континуумом. Якщо припустити, що $w_- = w_+ = 1/2$ і відняти $p(x, t)$ з обох частин (4.59), а також розділити все на δt , то одержимо

$$\frac{1}{\tau}[p(x, t + \delta t) - p(x, t)] = \frac{(\delta x^2)}{2\delta t}[p(x + \delta x, t) - 2p(x, t) + p(x - \delta x, t)](\delta x^2)^{-1}.$$

Розвиваючи $p(x \pm \delta x, t)$ в ряд за δx , у границі $\delta x \rightarrow 0$, $\delta t \rightarrow 0$ одержуємо

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \delta t) - p(x, t)}{\delta t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad D = (\delta x^2)/2\delta t.$$

Можна показати, що розв'язок рівняння дифузії набуває вигляду розподілу Гауса

$$p(x, t) = (2\pi Dt)^{-1/2} \exp(-x^2/4Dt).$$

Безпосереднє інтегрування дає

$$\langle x(t) \rangle = \int xp(x, t)dx = 0,$$

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int x^2 p(x, t)dx = 2Dt.$$

Таким чином, дифузійне рівняння можна записати у вигляді простого “породжуючого” рівняння

$$p_n^i = \frac{1}{2}p_{n-1}^{i+1} + \frac{1}{2}p_{n-1}^{i-1}, \quad (4.60)$$

де верхній індекс є просторовим, а нижній — часовим.

Метод Монте—Карло. В одновимірному випадку стрибки випадкового блукання можуть бути постійними, такими, що дорівнюють Δ . Це означає коефіцієнт дифузії $D = \Delta^2/2\delta t$ у рівнянні

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Метод Монте—Карло полягає в тому, що M частинок із початковими положеннями, визначеними згідно з $p(x, 0) = p_0(x)$, здійснюють стрибки за кожен часовий інтервал δt вздовж просторової осі на величину $\pm(2D\delta t)^{1/2}$, де знак на кожен крок (у кожному напрямку) вибирається з однаковою ймовірністю. Гістограма положень частинок після N таких стрибків має апроксимувати $Mp(x, t)$, де $p(x, t)$ — розв’язок рівняння дифузії, $t = N\delta t$. Апроксимація пов’язана, по-перше, із тим, що число частинок є обмеженим, що призводить до статистичних флуктуацій, і, по-друге, — система моделюється випадковими блуканнями, які відображають диференціальне рівняння лише при $\delta t \rightarrow 0$.

Якщо спочатку система розподілена згідно з дельта-функцією, центрованою за x_0 , тобто $p(x_0) = \delta(x - x_0)$, то для $N \gg 1$ можна одержати розв’язок у вигляді

$$p(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp[-(x - x_0)^2/2\sigma(t)], \quad \sigma(t) = \sqrt{2Dt}.$$

Загальний вигляд густини ймовірності дифузійного процесу подано на рис.4.3. Після N кроків за часом одержуємо $2Dt = N\Delta x$. Найбільш швидке сходження з наведеним розподілом одержується за рахунок використання гаусівськи розподіленої величини стрибка Δ , тобто

$$w(\Delta)d\Delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\Delta^2/2\sigma)d\Delta, \quad \sigma^2 = 2D\delta t.$$

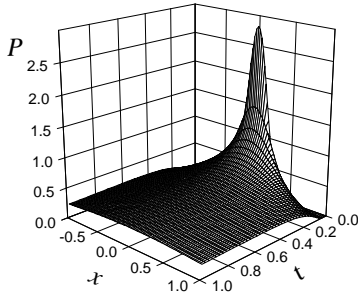


Рисунок 4.3 — Вигляд функції розподілу звичайного дифузійного процесу

Отже, в моделюванні стрибків величина стрибка визначається згідно з

$$\Delta_i = \eta_i \sqrt{2D\delta t}, \quad (4.61)$$

де η_i — нормально розподілена випадкова величина.

4.4.2 Метод Ланжевена

Розглянемо метод чисельного моделювання густини ймовірності, визначеної рівнянням Фоккера–Планка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-f(x)p + D \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad D = \text{const.}$$

У стаціонарному стані маємо

$$p(x) = N \exp \left(D^{-1} \int f(x) dx \right). \quad (4.62)$$

За методом альтернативного випадкового блукання (метод марковських ланцюжків) проводиться вибірка із розподілу у вигляді

$$p(x) dx = N e^{-U(x)} dx, \quad f(x) = -D \frac{dU(x)}{dx}.$$

Тоді до дифузійної складової $\Delta_i = \eta_i \sqrt{2D\delta t}$ має бути додано дрейфовий член $f(x)\delta t$. У результаті точки, що обчислюються за цим алгоритмом, розподіляються за (4.62). Крок марковського ланцюжка є таким:

$$\Delta_i = \eta_i \sqrt{2D\delta t} - D \frac{dU(x)}{dx} \delta t, \quad \Delta_i \equiv x_{i+1} - x_i. \quad (4.63)$$

Корисними при детальнішому розгляді теорії даного розділу можуть стати книги таких “піонерів” синергетики та теорії нерівноважних процесів, як Хакен [1, 2] Лоскутов та Михайлов [38], Ніколс та Пригожин [39, 40], а також книги [6, 18, 19], не говорячи про те, що є окрема монографія Ріскена [28] присвячена розглянутим питанням. Процеси моделювання висвітлені у підручниках [5, 20, 21].

Питання для самоконтролю

- 1 Яким чином пов'язані мікро- та макроскопічні рівні в основному кінетичному рівнянні?
- 2 Яким чином пов'язуються стохастичне рівняння та рівняння Фоккера-Планка?
- 3 Фізичні наслідки ергодичної теореми.
- 4 Фізичний зміст стаціонарної густини ймовірності.
- 5 Особливості систем з автотельним режимом поведінки.

Задачі до розділу 4

Задача 4.1 Одержати основне кінетичне рівняння для дискретних процесів.

Задача 4.2 Одержати точний розв'язок рівняння дифузії $\frac{\partial}{\partial t} p = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p$ та безпосереднім інтегруванням підтвердити закон $\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = 2Dt$.

Задача 4.3 Одержати розв'язок рівняння дифузії у автотельному режимі.

Задача 4.4 Підтвердити закон $\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = 2Dt$ моделюванням дифузії частинки у ґратковому газі.

Задача 4.5 Методом випадкових блукань провести моделювання часової поведінки густини розподілу у одновимірному просторі.

Задача 4.6 Методами Монте-Карло та Ланжевена провести моделювання процесу дифузії та порівняти результат із теорією.

Розділ 5

Індуковані шумом переходи [6]

У даному розділі увагу буде зосереджено на застосуванні викладених підходів для дослідження ефектів самоорганізації нелінійних стохастичних систем, викликані дією стохастичних джерел. Під такими ефектами самоорганізації розуміють виникнення нових стаціонарних станів, індукованих флуктуаціями. Така картина реалізується за сценарієм фазових переходів. Оскільки вони відбуваються у сильно нерівноважних системах завдяки стохастичним потокам, то їх відносять до нерівноважних переходів. Окремо для них виділено термін *індуковані шумом переходи*, коли густина ймовірності розподілу станів змінює кількість своїх екстремумів. Картину *нерівноважних фазових переходів* буде розглянуто у розділі 7.

Структура розділу подається у такий спосіб. Підрозділ 5.1 присвячено висвітленню якісної перебудови стаціонарної поведінки системи, на прикладі однопараметричних систем біологічного типу та узагальненої системи із самоподібним фазовим простором. Також розглядаються способи опису поведінки багатопараметричних систем на прикладі синергетичної моделі Лоренца-Хакена. Польовий метод дослідження часової поведінки та найбільш імовірних траєкторій еволюції стохастичних систем подано у підрозділі 5.2.

5.1 Стаціонарна картина нерівноважних переходів

5.1.1 Загальний підхід

Загалом границю малих флуктуацій/шумів можна розглядати як випадок рівноважних фазових переходів. При великих інтенсивностях шуму обмінними потоками вже не можна знехтувати. Тому система буде нерівноважною. Такі переходи описуються біфуркаційною діаграмою. За певних умов характеристики системи випробовують тільки кількісні зміни. Проте під час переходу параметрів системи через критичні значення відбувається якісна перебудова поведінки системи, яка виявляє-

ться у вигляді переходів першого та другого роду. Флуктуації зовнішніх зв'язків вимагають описувати систему випадковою величиною. Перехід відбувається всякий раз, коли якісно змінюється випадкова величина, яка є функцією, що відображує простір елементарних подій у простір станів. Тому *перехід відбувається, коли характер функції, що відображає простір елементарних подій Ω у простір станів $[b_1, b_2]$, якісно змінюється.*

Враховуючи теорію рівноважних переходів, якісну перебудову системи можна виявити за екстремумами стаціонарної густини ймовірності $p_s(x)$ (змінною їхньої кількості). Статистичні моменти в цьому випадку є неінформативними, оскільки при усереднюванні втрачається інформація. За цієї умови макроскопічним станам (фазам) відповідають максимуми функції розподілу (найбільш імовірні стани). Проте не завжди навіть максимуми описують стаціонарний розподіл імовірності. Зовнішній шум має макроскопічну природу і не є малим порівняно з внутрішніми флуктуаціями, що приводить до розширення перехідної зони й розширення піків, але не виключає можливість експериментального спостереження. Число і положення екстремумів $p_s(x)$ у стохастичному випадку являють собою особливості стаціонарної поведінки.

Важливість екстремумів $p_s(x)$ пояснюється ергодичною теоремою. Для ергодичного процесу величина $p_s(x)dx$ подає частку часу, протягом якого система перебуває в околі точки x . Тому максимуми $p_s(x)$ — стани, в околі яких система перебуває довго. Якщо розглядати густину ймовірності у квазігібсівському вигляді

$$p_s(x) = N \exp(-2U_{ef}(x)/\sigma^2), \quad (5.1)$$

де ефективний синергетичний потенціал

$$U_{ef}(x) = - \left[\int^x \frac{f(x')}{g^2(x')} dx - \nu \frac{\sigma^2}{2} \ln g(x) \right] \quad (5.2)$$

задається дрейфовою $f(x) = -dV(x)/dx$ та дифузійною $g(x)$ компонентами, то максимуми $p_s(x)$ відповідають мінімумам ефективного потенціалу $U_{ef}(x)$; ν — визначає вибір числення ($\nu = 2$ — Іто, $\nu = 1$ —

Стратонович). У випадку $g(x) = \text{const}$ маємо $U_{ef}(x) = V(x)$. За цієї умови мінімуми потенціалів (максимуми $p_s(x)$) відповідають стійким станам, тоді як максимуми потенціалів (мінімуми $p_s(x)$) характеризують нестійкі стани. Як і у разі рівноважних переходів, максимуми $p_s(x)$ відповідають макроскопічним “фазам”. Такі фази спостерігаються експериментально. Під дією зовнішнього шуму система переходить з однієї фази в іншу швидше, ніж під дією внутрішніх шумів.

Екстремуми функції розподілу $p_s(x)$ завжди збігаються із детермінованими станами лише у випадку білого шуму. Адитивний шум приводить лише до розкидання значень по долині потенціалу, тобто має *дезорганізуючий характер*. При мультиплікативному шумі флуктуації залежать від стану системи. Це означає, що частинка не тільки коливається в долинах потенціалів, але й окремі ділянки такого ландшафту можуть випадково підійматися й опускатися і частинка переходить від одного мінімуму до іншого. Для малого шуму останнє явище не виявляється. Долини потенціалу можуть підводитися, але залишатися долинами, а горби опускатися, але залишатися горбами. Система за цієї умови може перебувати у стані з вищим мінімумом. При великих інтенсивностях флуктуацій і значній нелінійності $f(x)$ і $g(x)$ поведінка системи може сильно змінитися — мультиплікативний шум може призвести до утворення нових ям (виникає “фазовий” перехід). Таким чином, *мультиплікативний шум приводить до утворення нових станів*. Він індукує нові нерівноважні переходи, не передбачувані в рамках детерміністичного (феноменологічного) підходу. Фізично це означає, що система не пристосовує свою поведінку до середніх властивостей середовища, а реагує на неї певним і активним чином. Такі переходи називаються *індукованими шумом переходами*. Термін “фаза” опущено, оскільки вважається, що випадкова величина x не залежить від просторової координати (*нуль-вимірна система*), і тому макроскопічні стани не мають границь, тоді як звичайна термодинамічна фаза реалізується у розподілених системах і обов’язково має границі. Отже, лише за аналогією із фазовими переходами для макроскопічних станів можна ввести споріднений термін “фаза”.

Малий білий шум. Розглянемо границю малого білого шуму: $\sigma^2 \ll 1$. Уведемо позначення

$$U(x) = - \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du,$$

тоді стаціонарний розподіл можна записати у вигляді

$$p_s(x) = N \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}U(x_0)\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\left[-U(x) + U(x_0) - \frac{\nu\sigma^2}{2}\ln g(x)\right]\right),$$

де x_0 — положення найменшого мінімуму функції $U(x)$. Якщо $\sigma^2 \rightarrow 0$ при $x \neq x_0$, основний внесок у стаціонарну густину ймовірності дає окіл головного мінімуму функції $U(x)$. Використовуючи метод якнайшвидшого спуску, можна отримати

$$\langle x \rangle = x_0 - \frac{\sigma^2}{2U''(x_0)} \left(\frac{1}{2} \frac{U'''(x_0)}{U''(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} \right),$$

$$\sigma_x^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{2\sigma^2}{U''(x_0)}.$$

У разі адитивного шуму мінімуми вихідного потенціалу $V(x)$ збігаються із мінімумами потенціалу $U(x)$. У цьому випадку достатньо проаналізувати детерміноване рівняння еволюції для з'ясування стійкості стаціонарного стану в усіх локально стійких станах. За винятком найглибшого мінімуму $V(x)$, всі локальні мінімуми характеризують метастабільні стани. Якщо шум є мультиплікативним, то мінімуми вихідного потенціалу можуть не збігатися з мінімумами потенціалу $U(x)$. Тому детермінований опис у даному випадку не є інформативним.

5.1.2 Модель популяційної динаміки

Поняття індукованих фазових переходів уперше було введено на основі моделі Мальтуса–Ферхюльста для опису поведінки біологічної популяції. Феноменологічне рівняння еволюції чисельності біологічної популяції, яка описується змінною $x \in [0, \infty)$, має вигляд

$$\dot{x} = \alpha x - x^2, \tag{5.3}$$

де мальтусівський параметр зростання α — різниця між смертністю особин і їхньою народжуваністю. Другий доданок має обмежувальний характер та виражає обмеженість ресурсів популяції. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = \frac{x(0)e^{\alpha t}}{1 + x(0)[(e^{\alpha t} - 1)/\alpha]}. \quad (5.4)$$

При $\alpha < 0$ існує один стаціонарний розв'язок $x = 0$. При $\alpha = 0$ відбувається біфуркація, внаслідок чого з'являється новий стійкий розв'язок $x = \alpha$.

Розглянемо вплив флуктуацій середовища, що проходять швидко порівняно з часом релаксації системи $\tau_{macro} = \alpha^{-1}$, який визначає макроскопічний масштаб еволюції. Середовище діє через керуючий параметр. Передбачимо, що керуючий параметр флюктує з амплітудою σ поблизу середнього значення

$$\alpha \rightarrow \alpha(t) = \alpha + \sigma\xi(t).$$

Тоді одержуємо рівняння Ланжевена ¹⁾

$$\dot{x} = \alpha x - x^2 + \sigma x \xi(t) = f(x) + g(x)\xi(t). \quad (5.5)$$

Еквівалентне (5.5) рівняння Фоккера—Планка має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha x - x^2 + (2 - \nu) \frac{\sigma^2}{2} x \right) p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 p(x, t). \quad (5.6)$$

¹⁾ Одержане рівняння Ланжевена може бути сконструйовано із рівнянь узагальнених реакцій



Дійсно, позначивши концентрації реагентів через n_i , $i = X, A, B, C$, для концентрації реагента X маємо

$$\dot{n}_X = k_1 n_X n_A - k_2 n_X^2 - k_3 n_X n_B,$$

де k_1, k_2 — швидкості прямої та зворотної реакції утворення двох молекул X та їх розпадання, k_3 — швидкість реакції утворення молекул типу C . Якщо далі припустити, що концентрації $n_{A,B}$ змінюються із часом випадково: $n_{A,B} = n_{A,B}^0 + \delta n_{A,B}(t)$, то приходимо до рівняння типу (5.5).

Оскільки процес обмежений позитивним простором, то 0 та $+\infty$ — внутрішні границі процесу, якщо $g(0) = 0$, $f(\infty) = -\infty$. Ці границі є природними:

$$\begin{aligned} L_1(0) &= C \int_0^\beta x^{-2\alpha/\sigma^2-2+\nu} \exp(2x/\sigma^2) dx = \infty, \\ L_1(\infty) &= C \int_0^\infty x^{-2\alpha/\sigma^2-2+\nu} \exp(2x/\sigma^2) dx = \infty. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Границя $+\infty$ завжди є природною при всіх α , σ^2 . При $\alpha > \sigma^2(\nu - 1)/2$ границя нуль — природна. При $\alpha < \sigma^2(\nu - 1)/2$ маємо

$$L_2(0) = \infty, \quad (5.8)$$

тому нуль — границя, що притягує.

Стаціонарний розв'язок рівняння Фоккера—Планка має вигляд

$$p_s(x) = N x^{2\alpha/\sigma^2-\nu} \exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right). \quad (5.9)$$

Густина ймовірності буде інтегрованою за умови

$$2\alpha/\sigma^2 - \nu + 1 > 0, \quad (5.10)$$

тобто при $\alpha > \sigma^2(\nu - 1)/2$, що і визначає природність границі $b_1 = 0$. Нормуюча константа має вигляд

$$N^{-1} = \left(\left[\frac{2}{\sigma^2} \right]^{2\alpha/\sigma^2-\nu+1} \right)^{-1} \Gamma(2\alpha/\sigma^2 - \nu + 1). \quad (5.11)$$

Якщо нормування стає неможливим, то необхідно врахувати, що точка $x = 0$ — стаціонарна, й оскільки ця точка притягувальна, то вся система зосереджується в нулі. Математично це виражається у виникненні дельта-функції при $\alpha < (1/2 - \nu)\sigma^2$, тобто

$$p_s(x) = \delta(x). \quad (5.12)$$

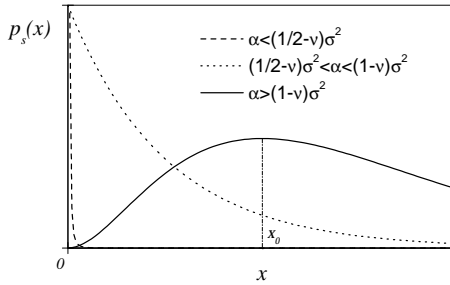


Рисунок 5.1 — Наближений хід густини ймовірності в моделі Мальтуса-Ферхюльста

Макроскопічні фази визначаються параметром порядку з рівняння екстремумів

$$\alpha x_0 - x_0^2 - \frac{\nu \sigma^2}{2} x_0 = 0, \quad (5.13)$$

розв'язками якого є

$$x_0^{(1)} = 0, \quad x_0^{(2)} = \alpha - \nu \sigma^2 / 2. \quad (5.14)$$

Другий корінь існує при $\alpha > \nu \sigma^2 / 2$ і завжди максимум. Корінь $x_0^{(1)}$ — максимум при $0 < \alpha < \nu \sigma^2 / 2$.

Таким чином, дана модель демонструє два типи індукованих шумом переходів. Перший перехід при $\alpha_c^{(1)} = \sigma^2(\nu - 1)/2$ пов'язаний із зміною границі дифузійного процесу. З перевищенням $\alpha_c^{(1)}$ дельта-функція починає розпливатися вправо і точка нуль стає нестійкою, хоча є найімовірнішим значенням. Другий перехід реалізується, якщо α перевищує $\alpha_c^{(2)} = \sigma^2 \nu / 2$. У цьому випадку на стаціонарній густині ймовірності з'являється новий максимум і виникає нова фаза, індукована шумом. Звідси випливає, що, підтримуючи постійним стан середовища, можна перевести систему в новий стан за рахунок зміни тільки рівня шуму в самому середовищі.

Згідно з відомим розподілом (в інтерпретації Стратоновича) можна

отримати

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \alpha, & \langle x^2 \rangle &= \alpha^2 + \alpha\sigma^2/2, \\ \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &\equiv \langle (\delta x)^2 \rangle &= \alpha\sigma^2/2.\end{aligned}$$

Останнє означає, що статистичні моменти не змінюють свого характеру при переході через критичні значення керуючого параметра. Тому тільки екстремуми густини ймовірності дозволяють виявити другу точку переходу (перша обумовлена зміною характеру границі). Зазначимо, що другий перехід відбувається, коли $\langle x \rangle = \langle (\delta x)^2 \rangle$.

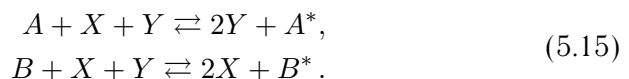
Перший перехід означає перехід від виродженої випадкової величини до достовірно випадкової. Його можна простежити за значенням дисперсії (ширини розподілу) або за лінійним наближенням рівняння еволюції (втрата стійкості стаціонарної точки).

Другий перехід обумовлений внутрішньою нелінійністю системи. Стан системи визначається взаємодією всієї нелінійної динаміки і зовнішнього шуму (зовнішній шум уже не становить величину $O(V^{-d})$).

Наведений перехід має сенс *індукованого шумом зсуву* — зсув детермінованого переходу. Індуковані шумом переходи типу зсуву відбуваються в околі тих точок, в яких утрачають стійкість системи, які перебувають під впливом мультиплікативного білого шуму.

5.1.3 Модель генного відбору

Розглянемо фазовий перехід, який стає можливим тільки за рахунок впливу шуму — безпосередньо індукований шумом перехід. Однією з найпростіших моделей цього класу є модель, запропонована Арнольдом, Хорстхемке, Лефевром. Ця модель описує хімічну реакцію двох речовин X , Y в одній посудині за умови збереження повної кількості молекул $N = X + Y = \text{const}$ реагуючих речовин:



Кількість частинок X від загальної кількості еволюціонує згідно з детерміністичним рівнянням вигляду

$$\dot{x} = \varkappa - x + \alpha x(1 - x), \quad x \in [0, 1],$$

де x — параметр стану; α — керуючий параметр, що характеризує середовище. Припустимо, що $\varkappa = 1/2$. Тоді стаціонарний стан детермінованої системи буде характеризуватися одним розв'язком

$$x_s = [\alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2 + 1}]/2\alpha.$$

Цей розв'язок є глобально стійким, незалежно від параметра α .

Припустимо, що система стає шумливою і зовнішні флуктуації швидкі, тоді $\alpha \rightarrow \alpha + \sigma\xi(t)$. Переходячи до границі дельта-корельованого гаусівського шуму, можемо записати рівняння Ланжевена

$$\dot{x} = \frac{1}{2} - x + \alpha x(1 - x) + \frac{\sigma^2}{2} x(1 - x)(1 - 2x) + \sigma x(1 - x)\xi(t). \quad (5.16)$$

Границі дифузійного процесу $b_1 = 0$ $b_2 = 1$ є внутрішніми і природними. Стаціонарна густина ймовірності має вигляд

$$p_s(x) = Nx^{-1}(1 - x)^{-1} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \left[-\frac{1}{2x(1 - x)} - \ln\left(\frac{1 - x}{x}\right)\right]\right), \quad (5.17)$$

де нормуюча константа в даному випадку ($\alpha = 0$) дорівнює

$$N = \frac{1}{2} \exp(2/\sigma^2) K_0^{-1}(2/\sigma^2), \quad (5.18)$$

де K_0 — модифікована функція Бесселя.

У даній системі границі свій характер не змінюють, тому всі можливі переходи простежуються за поведінкою екстремумів густини ймовірності. Рівняння екстремумів має вигляд

$$\frac{1}{2} - x_0 + \alpha x_0(1 - x_0) - \frac{\sigma^2}{2} x_0(1 - x_0)(1 - 2x_0) = 0. \quad (5.19)$$

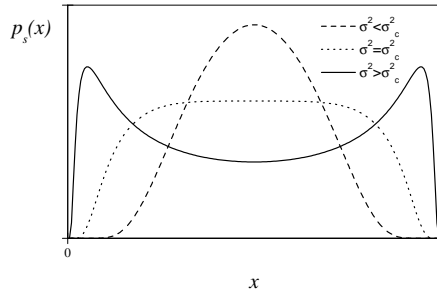


Рисунок 5.2 — Наближений хід густини ймовірності в моделі генного відбору

При $\alpha = 0$ із детерміністичного рівняння одержуємо розв'язок $x_s = 1/2$, у разі швидких флуктуацій маємо

$$x_0^{(1)} = 1/2, \quad x_0^{(2,3)} = (1/2)[1 \pm (1 - 4/\sigma^2)^{1/2}]. \quad (5.20)$$

У випадку $\alpha \neq 0$ система перебуває під впливом поля, що призводить до асиметрії функції розподілу, хоча якісної зміни картини не відбувається. Зростання інтенсивності шуму приводить до появи максимумів. Таким чином, переходи в такій системі мають шумовий характер. При $\alpha = 0$ одержуємо м'який перехід другого роду. При $\sigma^2 = \sigma_c^2$ функція розподілу має подвійний максимум і для відстані між фазами одержуємо

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [x_0^{(2)}(\sigma^2 + \epsilon) - x_0^{(3)}(\sigma^2 + \epsilon)] \sim (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2} \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

Це означає, що зовнішній гаусівський шум індукує критичну поведінку системи з критичною точкою $\alpha = 0$, $x_0^{(1)} = 1/2$, $\sigma^2 = 4$. При довільному значенні α один із піків функції розподілу зміщується вправо або вліво залежно від знака α . Під час переходу інтенсивності шуму через критичне значення тип фазового переходу змінюється. З'являється гістерезис, і перехід стає переходом першого роду. Екстремуми густини ймовірності зазнають катастрофи типу “збірка”.

Таким чином, мультиплікативний шум може виконувати організуючу функцію і стабілізувати нові макроскопічні стани. За рахунок уведення ефективного потенціалу в розподіл (подання розподілу у квазігібсьському вигляді) можна застосовувати до аналізу переходів теорію катастроф.

Критична поведінка. Для дослідження критичної поведінки вводиться параметр порядку, який в індукованих шумом переходах відповідає екстремуму функції розподілу. Для даної моделі доречно ввести параметр порядку у вигляді $\eta \equiv |x_0 - 1/2|$. Роль температури відіграє інтенсивність шуму, а роль спряженого поля h відводиться параметру середовища α .

Для визначення показника β скористаємося рівнянням екстремумів. При $\sigma^2 \rightarrow 4$ одержуємо

$$\eta = \frac{1}{2}[(\sigma^2 - 4)/\sigma^2]^{1/2} \sim (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2}, \quad (5.22)$$

тобто $\beta = 1/2$. Для знаходження критичного показника δ розглядаємо систему при $\alpha \ll 1$. Тоді з рівняння екстремумів при $\sigma^2 = \sigma_c^2 = 4$ маємо

$$\eta^3 + \frac{\alpha}{4}\eta^2 - \frac{\alpha}{16} = 0. \quad (5.23)$$

Звідси з розв'язку кубічного рівняння для складових, які дають найістотніший внесок, одержуємо

$$\eta \sim \alpha^{1/3}, \quad (5.24)$$

тобто $\delta = 1/3$. Для визначення показника γ обчислимо сприйнятливості $\chi = (\partial\eta/\partial\alpha)|_{\alpha=0}$. Диференціюючи кубічне рівняння (рівняння екстремумів) за α , одержуємо асимптоту

$$\chi(\sigma^2) \sim (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{-1}. \quad (5.25)$$

Виявляється, що нижче точки переходу ($\sigma^2 < \sigma_c^2$) одержуємо збіг індексів, тобто $\gamma = \gamma' = 1$.

Таким чином, критичні показники чисто індукованої точки збігаються із своїми класичними значеннями. Тобто рівноважні, нерівноважні та індуковані шумом переходи тісно пов'язані між собою і розглядаються як єдине фундаментальне явище — фазовий перехід.

5.1.4 Переходи у системі із шумом довільної інтенсивності

За наявності мультиплікативного шуму, крім виникнення нових екстремумів функції розподілу, можливим стає нескінченне зростання густини ймовірності в околі особливих стаціонарних точок, наприклад, у точці $x = 0$ в моделі Мальтуса-Ферхюльста. Якщо зазначена особливість є неінтегрованою, то втрачається умова нормування, і вся динаміка системи визначається границею дифузійного процесу, у стохастичній системі випадає детерміністичний конденсат — кінцева частина із повного набору степенів вільності, що зводиться до всіх можливих часових залежностей $x(t)$, набуває вигляду $x(t) = 0$. У зв'язку з цим виникає питання: яким чином будуть перерозподілятися стани системи поміж максимумами, що відповідають детерміністичному режимові та упорядкованому станові?

Задача полягає у з'ясуванні особливостей рівноважного розподілу

$$p(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{ef}(x)}{T}\right) \quad (5.26)$$

Вихідний синергетичний потенціал системи будемо апроксимувати x^4 -моделлю Ландау

$$V(x) = \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{4}x^4, \quad (5.27)$$

$$A = \alpha(T - T_c), \quad (5.28)$$

де α , T_c , B — позитивні сталі; T — інтенсивність шуму (температура). Маючи на увазі дослідження особливостей в околі точки $x = 0$, для мультиплікативної функції візьмемо

$$g(x) = 2^{1/2}x^a, \quad (5.29)$$

де $0 \leq a \leq 1$ — довільний показник. Тоді ефективний синергетичний потенціал у стаціонарному розподілі набуде вигляду

$$U_{ef}(x) = 2Ta \ln x + U(x), \quad (5.30)$$

$$U(x) = \frac{A}{2(1-a)}x^{2(1-a)} + \frac{B}{2(2-a)}x^{2(2-a)}. \quad (5.31)$$

Характерна особливість систем із мультиплікативним шумом полягає у неаналітичному вигляді залежності (5.31) перенормованого потенціалу $U(x)$, незважаючи на те, що вихідний $V(x)$ має найпростіший вигляд (5.27). При $a = 0$ шум стає адитивним і потенціали $V(x)$, $U(x)$ збігаються. У разі $a = 1$ маємо узагальнення моделі Мальтуса—Ферхюльста і поведінка системи описується окремо. Нарешті, при переході до нестационарного автомодельного режиму ефективний потенціал (5.30) набуває додатку U_μ , що має такий самий характер, як і перший член виразу (5.31). Це означає, що дана складова може бути врахована перенормуванням критичної температури T_c , яка входить до виразу (5.28).

Нерівноважні переходи. Даний перехід полягає у тому, що при зменшенні інтенсивності шуму T розподіл (5.26) набуває максимумів у точках $\pm x_0 \neq 0$. Їхнє положення задається умовою $\partial U_{ef}(x)/\partial x = 0$, що визначає мінімуми ефективного синергетичного потенціалу. Підставляючи вирази (5.28), (5.30), (5.31) для положення максимуму x_0 , виміряного в одиницях $\alpha T_c/B$, знаходимо рівняння

$$x_0^2 + (2a/\alpha)\Theta x_0^{-2(1-a)} = 1 - \Theta, \quad (5.32)$$

де введено безрозмірну температуру

$$\Theta \equiv \frac{T}{T_c}. \quad (5.33)$$

Це рівняння має розв'язок лише при величинах Θ , обмежених максимальним значенням Θ_0 . Для його обчислення врахуємо, що у точці $\Theta = \Theta_0$ залежність $U_{ef}(x)$ має нульову похідну не лише першого, але й другого порядків. Це приводить до додаткового рівняння

$$x_0^{2(2-a)} = (2a/\alpha)(1-a)\Theta_0. \quad (5.34)$$

Вилучаючи із рівнянь (5.32), (5.34) величину x_0 , для температури переходу знаходимо вираз

$$\frac{(1 - \Theta_0)^{2-a}}{\Theta_0} = \frac{2a}{\alpha} \frac{(2-a)^{2-a}}{(1-a)^{1-a}}, \quad \Theta_0 \equiv \frac{T_0}{T_c}. \quad (5.35)$$

Залежність граничної температури T_0 від показника a при різних значеннях α подано на рис.5.3. У границі $a = 0$, що відповідає адитивному

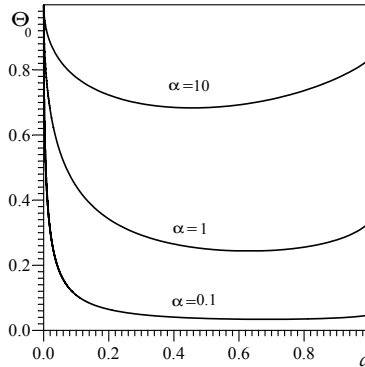


Рисунок 5.3 — Залежність граничного значення інтенсивності шуму Θ_0 від показника мультиплікативного шуму a

шуму, точка переходу T_0 збігається з критичним значенням T_c . Зростання показника в області малих значень a приводить до зниження величини T_0 — більш сильного чим менше параметр α , який визначає рушійну силу фазового переходу. Із подальшим збільшенням a величина T_0 проходить через мінімум і далі зростає до значення (5.38), що відповідає $a = 1$. При цьому найбільш імовірне значення $x_0(T)$ зменшується із зростанням інтенсивності шуму згідно з рис.5.4.

Характерно, що у граничних випадках $a = 0$, $a = 1$ фазовий перехід має неперервний характер, тоді як у проміжній області величина x_0 зазнає стрибка у точці переходу T_0 .

У випадку $a = 1$ замість (5.30) одержуємо

$$\tilde{U} = 2T \ln x + U(x), \quad U = A \ln x + (B/2)x^2. \quad (5.36)$$

При цьому розподіл (5.26) має максимум у точці

$$x_0 = (1 - (1 + 2/\alpha)\Theta)^{1/2}, \quad \Theta \equiv T/T_c, \quad (5.37)$$

а інтенсивність шуму, яка відповідає появі такого максимуму, набирає

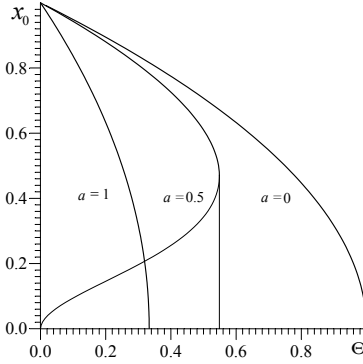


Рисунок 5.4 — Залежність найбільш імовірного значення x_0 від інтенсивності шуму $\Theta = T/T_c$

вигляду

$$T_0 = (1 + 2/\alpha)^{-1} T_c. \quad (5.38)$$

Перехід стохастичної системи у детерміністичний режим. Поданий вище максимум розподілу $p(x)$ не є єдином можливим. Дійсно, підставляючи (5.30) у (5.26), бачимо, що при позитивних значеннях параметра a функція розподілу має особливість $p \simeq Z^{-1} x^{-2a}$ при $x \rightarrow 0$. Це означає, що стала нормування Z має на нижній границі інтегрування $b \rightarrow 0$ вигляд $Z \sim b^{1-2a}$. Тому, якщо показник a лежить в інтервалі від 0 до $1/2$, то зазначена особливість розподілу (5.26) є інтегрованою, і система поводить ся у звичайний спосіб. Однак при $a > 1/2$ маємо $Z = \infty$ і розподіл $p(x)$ на границі $x = 0$ стає ненормованим. Це означає утворення конденсату, що відповідає детерміністичній поведінці системи при $x = 0$ — зумовлюється границя дифузійного процесу. Відповідно до функції розподілу (5.26) маємо застосувати процедуру ренормалізації. Для цього за умови (5.30) розіб'ємо її на два множники:

$$p(x) = p_0(x)p'(x), \quad (5.39)$$

$$p_0(x) = Z_0^{-1} x^{-2a}, \quad p'(x) = (1/Z') \exp(-U(x)/T), \quad (5.40)$$

де потенціал $U(x)$ задається виразом (5.31). У першому множнику, що відповідає за формування конденсату, стала Z_0 є нескінченною, у другому $Z' = \tilde{Z}/Z_0 < \infty$. При $a = 1$ множники у (5.39) набирають вигляду

$$p_0(x) = Z_0^{-1} x^{-(2+A/T)}, \quad p'(x) = (1/Z') \exp \left[-(B/2T)x^2 \right]. \quad (5.41)$$

Таким чином, у системах із мультиплікативним шумом (5.29) точка $x = 0$ стає атрактором, наявність якого суттєвим чином зумовлюється на всій осі значень x . Моделюючи стохастичну систему дифузійним процесом частинки із координатою x , можна подати такий атрактор як притягуючу границю. Тому далі необхідним стає класифікація границь стохастичного процесу.

Із визначення граничних функціоналів випливає, що детерміністичний режим $x = 0$ не досягається за нескінченний час, якщо величина $L_1 = \infty$ у границі $b \rightarrow 0$. При $L_1 < \infty$ та розбіжності L_2 детерміністична поведінка досягається лише у границі $t \rightarrow \infty$. Інакше кажучи, незважаючи на те що така поведінка проявляється при $x \rightarrow 0$ у вигляді нескінченного максимуму сингулярного множника $p_0(x)$, у дійсності вона не досягається. Тому при нормуванні розподілу (5.39) слід увести обрізання на нижній границі $b \rightarrow 0$, тоді для відповідної сталої нормування маємо

$$Z_0 = 2(2a - 1)^{-1} b^{1-2a}. \quad (5.42)$$

Якщо $L_1, L_2 < \infty$, але $L_3 = \infty$, то детерміністичний режим досягається за кінцевий час, оскільки система із нескінченною густиною ймовірності зосереджена в області $[b, \beta]$. Це означає, що при нормуванні функції розподілу слід явно враховувати наявність конденсату, який приводить до виділення δ -подібної особливості:

$$p(x) = C\delta(x) + p_0(x)p'(x). \quad (5.43)$$

Тут інтенсивність C детерміністичного конденсату визначається зазначеною умовою нормування. І нарешті, якщо всі параметри $L_1, L_2, L_3 < \infty$, то у будь-який момент часу детерміністичний режим реалізується, як і стохастичний, згідно з розподілом $p_0(x)$.

Безпосереднє обчислення граничних функціоналів показує, що в області $x \ll 1$ функція розподілу задається виразом

$$2Zp(x) \simeq x^{-2a} \exp(-\lambda x^{2(1-a)}), \quad \lambda = A/2T(1-a). \quad (5.44)$$

Підставляючи його у визначення L_2 , маємо

$$L_2 = \frac{1}{2T} \int_b^\beta x^{-2a+1} e^{-\lambda x^{2(1-a)}} dx. \quad (5.45)$$

Після переходу до змінної $y = x^{2(1-a)}$ цей інтеграл дає

$$L_2(b, \beta) = (2A)^{-1} \left[\exp(\lambda \beta^{2(1-a)}) - \exp(\lambda b^{2(1-a)}) \right]. \quad (5.46)$$

Звідси випливає, що у границі $b \rightarrow 0$ величина $L_2 < \infty$. Аналогічно для L_3 одержуємо

$$L_3(b, \beta) = [2(2a-1)]^{-1} (\beta^{1-2a} - b^{1-2a}). \quad (5.47)$$

Отже, $L_3 < \infty$ при $a < 1/2$ і $L_3 = \infty$ при $a > 1/2$.

Проведений аналіз показує, що в області $0 < a \leq 1/2$ детерміністичний режим реалізується поряд зі стохастичним у будь-який момент часу, а при $1/2 < a < 1$ система досягає положення $x = 0$ за кінцевий час. При цьому характерний час τ_{ef} еволюції стохастичної підсистеми визначається при $x \ll 1$ виразом $\tau_{ef}^{-1} = (T/2)(g^2)''$, що випливає із рівняння Фоккера–Планка, у якому враховуються члени, які проявляють сингулярну поведінку у границі $x \rightarrow 0$. У результаті одержуємо рівняння

$$\tau_{ef} = [2a(2a-1)]^{-1} x^{2(1-a)}, \quad (5.48)$$

із якого маємо, що $\tau_{ef} < 0$ в області $a < 1/2$ і $\tau_{ef} > 0$ при $a > 1/2$. Очевидно, перше з них означає релаксацію стохастичної системи у стаціонарний стан, а друге визначає час досягнення детерміністичного режиму при $x \ll 1$. Згідно з (5.48) при $a < 1/2$ значення $|\tau_{ef}|$ зростає при збільшенні x , а в області $a > 1/2$, навпаки, спадає. Це означає, що

при $a < 1/2$ релаксація стохастичної системи затримується із зростанням змінної $x \ll 1$, а перехід у детерміністичний режим при $a > 1/2$, навпаки, прискорюється.

Самоузгоджена поведінка конденсату, що визначається сталою C , задається умовою нормування розподілу (5.43). Використовуючи залежності (5.40) та сталу нормування (5.42), знаходимо

$$C = 1 - [(2a - 1)/Z'] b^{2a-1} \int_b^{\infty} x^{-2a} \exp\{-U(x)/T\} dx. \quad (5.49)$$

Перейдемо до змінної $y = x/b$, що нормується на величину $b \rightarrow 0$, яка обмежує нижню границю інтегрування. Тоді

$$C = 1 - [(2a - 1)/Z'] \int_1^{\infty} y^{-2a} \exp\{-U(by)/T\} dy. \quad (5.50)$$

При $a \neq 1$ одержуємо

$$C = 1 - 1/Z', \quad (5.51)$$

$$Z' = \int_0^{\infty} \exp\left(-\lambda x^{2(1-a)} - \mu x^{2(2-a)}\right) dx, \quad (5.52)$$

де вираз для сталої нормування Z' впливає із (5.26), (5.30), (5.31), $\mu = B/2T(2 - a)$, $1/2 < a < 1$.

Чисельне інтегрування у (5.51) приводить до залежностей $C(\Theta)$, показаних при різних значеннях параметрів a , α на рис.5.5. Отже, із зростанням інтенсивності шуму $\Theta = T/T_c$ густина детерміністичного конденсату плавно спадає від значення $C = 1$ при $\Theta = 0$ до $C = 0$ при критичній величині Θ_c . При великих значеннях сталої α (рис.5.5а) спадання густини конденсату C відбувається при тим більших значеннях Θ інтенсивності шуму, чим вище значення показника a . При величинах $\alpha \simeq 1$ залежність $C(\Theta)$ набуває складнішого вигляду (рис.5.5б): при малих Θ зростання показника a , як і раніше, приводить до збільшення густини конденсату, а при великих Θ — до зменшення.

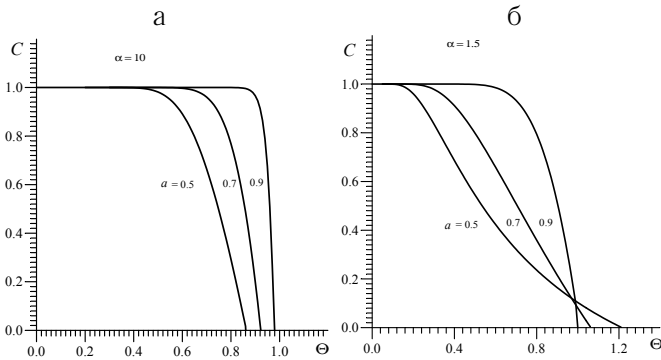


Рисунок 5.5 — Залежність густини детерміністичного конденсату від інтенсивності шуму при різних α

На рис.5.6 наведено залежності критичної інтенсивності шуму Θ_C від показника a при різних значеннях α . Бачимо, що при малих значеннях α вона монотонно спадає, а при великих — зростає. Характерно, що при $\alpha < 1$ критичне значення Θ_C при зменшенні показника a стає нескінченним. Це означає, що при повільному зростанні мультиплікативного шуму (5.29) із величиною стохастичної змінної x внаслідок малості термодинамічного стимулу до упорядкування детерміністичний конденсат реалізується при всіх значеннях інтенсивності шуму Θ .

5.1.5 Багатопараметрична модель

Часто дослідження фазових переходів у стохастичних системах у більшості випадків обмежується системами, що описуються однією гідродинамічною модою. З мікроскопічної точки зору адитивний шум у рівнянні Ланжевена асоціюється із тепловими флуктуаціями і залежить від розміру системи. Інша інтерпретація стохастичного доданка виникає у випадку впливу на систему флуктуючого зовнішнього середовища. Математичну модель таких флуктуацій звичайно отримують виходячи із відповідного детерміністичного рівняння, припускаючи, що керуючий параметр флюктує в околі середнього. У зв'язку з цим постає питання: наскільки реалістичними є отримані у такий спосіб моделі? Очевидно,

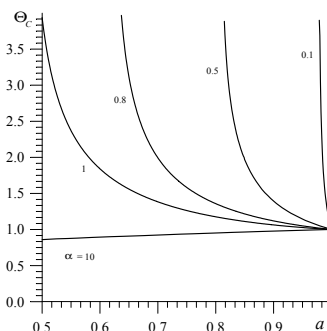


Рисунок 5.6 — Залежність критичної інтенсивності шуму $\Theta_C = T_C/T_c$ від показника a

що для відповіді на це питання потрібно розглянути самоузгоджену поведінку декількох гідродинамічних ступенів вільності, кожна з яких має стохастичний характер. Виділивши згодом одну із них, ми автоматично повинні отримати вигляд шуканої мультиплікативної функції. Крім того, розгляд багатопараметричних систем дозволить суттєво розширити клас моделей, необхідних для опису ефектів самоорганізації під дією зовнішнього середовища. Найпростішою моделлю такої системи, що описує не лише ефекти самоорганізації, а й узагальнену картину фазових переходів є трипараметрична система Лоренца-Хакена.

Відомо, що при термодинамічному описі фазових переходів із термостата виділяється мала підсистема, стан якої визначається параметром порядку. Термостат впливає на стан підсистеми через варіацію механічних та термічних параметрів, які зводяться до поля, спряженого параметра порядку, та керуючого параметра і входять до еволюційного рівняння як параметри, при цьому зворотного зв'язку між підсистемою і термостатом не існує. При синергетичному підході вважається, що підсистема є відкритою, тобто всі степені вільності — параметр порядку, спряжене поле та керуючий параметр — є рівноправними і еволюція кожної з мод визначається впливом інших. Наочним прикладом такої системи є система лазера зі спонтанним випромінюванням, де наведені величини зводяться до напруженості індукованого поля, електричної по-

ляризації середовища та інверсної заселеності електронних рівнів. У даному підрозділі ми розглянемо синергетичну (трипараметричну) систему, узагальнену за рахунок уведення шумів кожної з мод. Ми покажемо, що у рамках загальновідомого принципу підпорядкування [2, 19, 28, 41] внутрішні шуми спряженого поля та керуючого параметра стають зовнішніми відносно параметра порядку.

Переходячи до побудови синергетичної схеми Лоренца-Хакена, введемо величини η , h , ϵ , які згідно з термінологією називаються параметром порядку, спряженим полем і керуючим параметром відповідно. Задача зводиться до визначення часових залежностей $\eta(t)$, $h(t)$, $\epsilon(t)$. З цією метою скористаємося феноменологічним підходом, в рамках якого рівняння руху являють собою залежності швидкостей $\dot{\eta}$, \dot{h} , $\dot{\epsilon}$, зміни величин η , h , ϵ залежно від їх значень. При записі цих рівнянь потрібно врахувати перш за все те, що в автономному режимі зміна всіх мод має дисипативний характер. Крім того, важливе значення має принцип Ле-Шательє: оскільки причиною самоорганізації є зростання керуючого параметра ϵ , то параметр порядку η і спряжене поле h повинні змінюватися так, щоб перешкоджати зростанню ϵ . З формальної точки зору цей факт можна відобразити як наявність негативного зворотного зв'язку між величинами η і h . І нарешті, принципово важливе значення має позитивний зворотний зв'язок між параметром порядку η і керуючим параметром ϵ , що приводить до зростання спряженого поля h , саме наявність цього зв'язку є причиною самоорганізації.

Система Лоренца найпростішим чином ураховує зазначені вище обставини. З урахуванням флуктуаційних доданків вона має вигляд [41]:

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{\tau_{\eta}} + \gamma h + \sigma_{\eta} \xi, \quad (5.53)$$

$$\dot{h} = -\frac{h}{\tau_h} + g_h \eta \epsilon + \sigma_h \xi, \quad (5.54)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\tau_{\epsilon}} - g_{\epsilon} \eta h + \sigma_{\epsilon} \xi, \quad (5.55)$$

де перші доданки в правих частинах описують автономну релаксацію величин η , h , ϵ до стаціонарних значень $\eta = 0$, $h = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ з періодами

релаксації τ_η , τ_h , τ_ϵ ; γ — кінетичний коефіцієнт; позитивні константи g_h , g_ϵ є мірою зворотного зв'язку системи; ξ — δ -корельована стохастична складова; σ_η^2 , σ_h^2 , σ_ϵ^2 — інтенсивності шумів відповідних величин.

При виконанні умов $\tau_h, \tau_\epsilon \ll \tau_\eta$ принцип підпорядкування дозволяє припустити в (5.54), (5.55) $\tau_h \dot{h} \sim \tau_\epsilon \dot{\epsilon} \approx 0$, зберігаючи, проте, стохастичні доданки. Тоді останні два рівняння дозволяють виразити спряжене поле і керуючий параметр через параметр порядку:

$$h = \left(1 + \eta^2/\eta_m^2\right)^{-1} [A_h \eta(\epsilon_0 + \sigma_\epsilon \tau_\epsilon \xi) + \sigma_h \tau_h \xi], \quad (5.56)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 - A_\epsilon \eta h + \sigma_\epsilon \tau_\epsilon \xi, \quad (5.57)$$

де введено позначення

$$A_h = g_h \tau_h, \quad A_\epsilon = g_\epsilon \tau_\epsilon, \quad \eta_m^{-2} = A_\epsilon A_h. \quad (5.58)$$

Підставляючи (5.56) у (5.53), одержуємо стохастичне диференціальне рівняння у формі Іто:

$$\tau_\eta \dot{\eta} = -\eta + \frac{\epsilon_c^{-1} \eta(\epsilon_0 + \sigma_\epsilon \tau_\epsilon \xi) + \sigma_h \tau_\eta \gamma \tau_h \xi}{1 + \eta^2/\eta_m^2}, \quad (5.59)$$

де позначено

$$\epsilon_c^{-1} = \gamma \tau_\eta g_h \tau_h. \quad (5.60)$$

Розділяючи детерміністичну й стохастичні складові, надамо рівнянню (5.59) канонічної форми

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} + [\sigma_\epsilon g_\epsilon(\eta) + \sigma_h g_h(\eta)] \xi + \sigma_\eta \xi, \quad (5.61)$$

де час t вимірюється в одиницях τ_η ; параметр порядку в масштабі η_m ; інтенсивності шумів σ_η , σ_h та σ_ϵ в одиницях τ_η^{-1} ; $(\tau_\eta \tau_h \gamma)^{-1}$ та ϵ_c/τ_ϵ відповідно. Потенціал $V(\eta)$ має вигляд

$$V \equiv V(\eta) = \frac{1}{2} \left[\eta^2 - \Theta \ln(1 + \eta^2) \right], \quad \Theta \equiv \frac{\epsilon_0}{\epsilon_c}. \quad (5.62)$$

Розкладаючи за ступенями $\eta^2 \ll 1$, спостерігаємо, що цей вираз зводиться до розкладу Ландау з параметрами $A = 1 - \Theta$, $B = \Theta \approx 1$. Мультиплікативні функції $g_\epsilon(\eta)$, $g_h(\eta)$ мають вигляд

$$g_\epsilon(\eta) = \eta g_h(\eta) = \eta(1 + \eta^2)^{-1}, \quad (5.63)$$

$$g_h(\eta) = (1 + \eta^2)^{-1}. \quad (5.64)$$

Проведений розгляд показує, що в рамках адиабатичного наближення $\tau_h, \tau_\epsilon \ll \tau_\eta$ синергетична система з адитивними шумами зводиться до однопараметричної стохастичної системи з мультиплікативним шумом. Синергетичний потенціал (5.62) набирає мінімуму в точці

$$\eta_0 = \pm(\Theta - 1)^{1/2}, \quad \Theta = \epsilon_0/\epsilon_c. \quad (5.65)$$

Наведемо основні співвідношення, які визначають екстремальні точки стаціонарного розподілу $p(\eta)_s = Z^{-1} \exp\{-U_{ef}(\eta)\}$ синергетичної системи (5.53) — (5.55). Ефективний потенціал

$$U_{ef}(\eta) = \ln g^2(\eta) - 2 \int \frac{\partial V/\partial \eta}{g^2(\eta)} d\eta \quad (5.66)$$

визначається синергетичним потенціалом (5.62) і квадратом ефективної мультиплікативної функції

$$g^2(\eta) = \sigma_\eta^2 + \sigma_h^2 g_h^2(\eta) + \sigma_\epsilon^2 g_\epsilon^2(\eta). \quad (5.67)$$

Цей вираз впливає з відомого твердження про адитивність квадратів дисперсій незалежних випадкових величин, розподілених за нормальним законом. Комбінуючи формули (5.62) — (5.64), (5.66), (5.67), можна знайти явний вигляд залежності $U_{ef}(\eta)$. Рівняння, що визначають положення максимумів стаціонарного розподілу:

$$z^3 - \Theta z^2 - \sigma_\epsilon^2 z + 2(\sigma_\epsilon^2 - \sigma_h^2) = 0, \quad z \equiv 1 + \eta^2. \quad (5.68)$$

Вони визначаються стаціонарною величиною Θ керуючого параметра та співвідношенням інтенсивностей $\sigma_\epsilon^2, \sigma_h^2$ мультиплікативних шумів.

Опис синергетичного переходу при адитивному шумі. У найпростішому випадку $\sigma_\eta = \sigma_h = \sigma_\epsilon = 0$ рівняння (5.53)—(5.55) зводяться до класичної системи Лоренца, а стохастичне рівняння (5.61) набирає вигляду

$$\dot{\eta} = -\eta \left(1 - \frac{\Theta}{1 + \eta^2} \right). \quad (5.69)$$

Переходячи до змінної $z = 1 + \eta^2$, маємо

$$dt = \frac{-2zdz}{z^2 - z(\Theta + 1) + \Theta}, \quad (5.70)$$

звідки випливає

$$t = -\ln \left[(z^2 - (\Theta + 1)z + \Theta) \left(\frac{z - \Theta}{z - 1} \right)^{(\Theta+1)/(\Theta-1)} \right], \quad (5.71)$$

де введено позначення $\beta = (\Theta - 1)^2$. Таким чином, при $\Theta < 1$ система релаксує в стан $\eta_0 = 0$, а при $\Theta > 1$ — в $\eta_0 \neq 0$. Згідно з термінологією [27] будемо називати фази $\eta_0 = 0$ і $\eta_0 \neq 0$ — симетричною й несиметричною. Стаціонарна функція розподілу має один центральний максимум у першому випадку і два максимуми в точках (5.65) — у другому. Характерно, що через відсутність шуму всі ці максимуми мають δ -подібний характер:

$$p(\eta)_s \propto \delta\{dV/d\eta\}. \quad (5.72)$$

З появою адитивного шуму параметра порядку ($\sigma_\eta \neq 0, \sigma_h = \sigma_\epsilon = 0$) стаціонарні стани системи не змінюються. Проте δ -подібні піки функції розподілу розмиваються, що приводить до

$$p(\eta)_s = Z^{-1} \exp\{-V(\eta)/\sigma_\eta^2\}. \quad (5.73)$$

Їх ширина визначається інтенсивністю шуму параметра порядку.

Опис синергетичного переходу при мультиплікативному шумі. Інтегральний внесок $U(\eta)$ у виразі (5.66) для ефективного потенціалу при $\sigma_\eta = 0$ задається функцією

$$U(\eta) \equiv \int \frac{\eta(1 + \eta^2)(1 - \Theta + \eta^2)}{\sigma_h^2 + \sigma_\epsilon^2 \eta^2} d\eta. \quad (5.74)$$

Введемо відношення інтенсивностей шуму $\alpha^2 \equiv \sigma_h^2/\sigma_\epsilon^2$ та змінну $y \equiv \alpha^2 + \eta^2$. Тоді (5.69) набирає вигляду

$$\sigma_\epsilon^2 U(y) = \frac{y^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - \alpha^2\right)y + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2 - \Theta) \ln y - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (5.75)$$

Повертаючись до початкових змінних і враховуючи, що потенціал визначено з точністю до довільної константи, яку можна перенести в нормувальну сталу розподілу, для ефективного синергетичного потенціалу остаточно одержуємо

$$\begin{aligned} U_{ef}(\eta) &= \frac{1}{2} \left[(\eta^4/2) + (2 - \Theta - \alpha^2)\eta^2 + \right. \\ &+ \left. (1 - \alpha^2)(1 - \Theta - \alpha^2) \ln(\alpha^2 + \eta^2) \right] + \\ &+ \sigma_\epsilon^2 \ln[g_\epsilon^2(\eta) + \alpha^2 g_h^2(\eta)], \quad \alpha^2 \equiv \frac{\sigma_h^2}{\sigma_\epsilon^2}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Урахування стохастичності спряженого поля. У цьому випадку в (5.76) потрібно знайти границю при $\sigma_\epsilon \rightarrow 0$. Проводячи розкладання за σ_ϵ з точністю до неістотної сталої, одержуємо

$$\sigma_h^2 U_{ef}(\eta) = \frac{2^{1/2}}{3} (g_h(\eta))^{-3} - 2\Theta (g_h(\eta))^{-2} + 2\sigma_h^2 \ln g_h(\eta). \quad (5.77)$$

Відповідна функція розподілу має мінімум у точці $\eta_0 = 0$, якщо стаціонарне значення Θ керуючого параметра не перевищує критичного значення

$$\Theta_c^h = 1 - 4\sigma_h^2, \quad (5.78)$$

величина якого спадає із зростанням інтенсивності шуму спряженого поля. У цьому випадку система перебуває в симетричному стані. При $\Theta > \Theta_c^h$ розв'язок рівняння (5.68) задає положення $\eta_{0+} = -\eta_{0-}$ максимумів у несиметричній фазі. Залежність $\eta_{0+}(\Theta, \sigma_h)$ має монотонно наростаючий вигляд при перевищенні критичних значень Θ, σ_h .

При малих значеннях Θ і σ_h стаціонарні значення:

$$\eta_{0\pm}^2 \approx \begin{cases} (4\sigma_h^2)^{1/3} - 1 + (\Theta/3) \left(1 + 3^{-1/2}\right), & \text{якщо } \Theta \rightarrow 0 \\ \Theta - 1 + 4\sigma_h^2/\Theta^2, & \text{якщо } \sigma_h^2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Отримані вирази показують наявність переходу другого роду при критичному значенні $\Theta = \Theta_c$. Характерно, що і при $\Theta = 0$ може відбуватися синергетичний перехід у несиметричний стан, якщо виконується умова $\sigma_h > \sigma_c = 1/4$. Очевидно, такий перехід належить до категорії індукованих шумом.

Урахування стохастичності керуючого параметра. Будемо досліджувати тепер стаціонарні стани синергетичної системи за наявності шуму керуючого параметра. Аналогічно до попереднього випадку стаціонарна функція розподілу параметра порядку визначається ефективним потенціалом

$$U_{ef}(\eta) = \frac{\eta^4}{4} + \left(1 - \frac{\Theta}{2}\right)\eta^2 + (1 - \Theta + 2\sigma_\epsilon^2)\ln\eta - 2\sigma_\epsilon^2\ln(1 + \eta^2). \quad (5.79)$$

Рівняння мінімуму (5.79) отримуємо, припускаючи в (5.68), що $\sigma_h = 0$. Проведемо аналіз розв'язків цього рівняння залежно від значень параметрів Θ і σ_ϵ . Аналіз показує, що крива

$$\Theta = 1 + 2\sigma_\epsilon^2 \quad (5.80)$$

визначає існування нульового кореня рівняння (5.68). Крім того, існують ще два розв'язки. Виключаючи корінь $\eta^2 = 0$, одержуємо квадратне рівняння

$$\eta^4 + (3 - \Theta)\eta^2 - (2\Theta + 2\sigma_\epsilon^2 - 3) = 0, \quad (5.81)$$

при цьому тривіальний розв'язок задається рівністю

$$\Theta = (3 - 2\sigma_\epsilon^2)/2. \quad (5.82)$$

Для інших розв'язків рівняння (5.81) маємо

$$\eta^2_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\Theta - 3 + \sqrt{(\Theta - 3)^2 + 4(2\Theta - 3 + 2\sigma_\epsilon^2)} \right]. \quad (5.83)$$

Тоді на лінії (5.80) є два ненульові розв'язки

$$\eta^2_{0\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \Theta - 3 + [(\Theta - 3)^2 - 4(4 - 3\Theta)]^{1/2} \right\}, \quad (5.84)$$

які нефізичні (оскільки η комплексне), якщо $\Theta < 4/3$, в точці $\Theta = 4/3$ вони спадають до нуля, а при $\Theta > 4/3$ є дійсними і $\eta_{0+} = -\eta_{0-}$. Таким чином, у точці

$$\Theta = 4/3, \quad \sigma_\epsilon^2 = 1/6 \quad (5.85)$$

є кратний нуль рівняння (5.68). Із симетрії потенціалу (5.79) легко переконатися, що при виконанні умови (5.80) нульовий корінь дає мінімум цього потенціалу, якщо $\Theta < 4/3$, у той час як при $\Theta > 4/3$ він відповідає його максимуму, а при η_{0+}^2 — двом мінімумам.

Знайдемо далі умову існування кратних дійсних коренів рівняння (5.68) у даному випадку — шуму керуючого параметра. Для цього необхідно розглянути умову дорівнювання нулю дискримінанта рівняння екстремумів. При цьому змінною буде інтенсивність шуму керуючого параметра. Дорівнювання нулю дискримінанта задається виразом, що розкладається на такі рівняння:

$$\sigma_\epsilon^2 = 0, \quad \sigma_\epsilon^4 - \sigma_\epsilon^2 \left(27(1 - \Theta/3)/2 - \Theta^2/8 \right) + \Theta^3/2 = 0. \quad (5.86)$$

Їх розв'язок визначає існування кратних дійсних коренів, які лежать на двох кривих, позначених знаками + та - відповідно:

$$2\sigma_\epsilon^2 \pm = \left(\frac{27}{2} \left(1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right) \pm \left[\left(\frac{27}{2} \left(1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right)^2 - 2\Theta^3 \right]^{1/2}. \quad (5.87)$$

Як впливає з (5.87), лінія зі знаком - при $\Theta = 0$ починається з точки $\sigma_\epsilon^2 = \Theta = 0$. Інша (із знаком +) у разі відсутності впливу керуючого параметра на систему починається у точці $\sigma_\epsilon^2 = 27/2$, $\Theta = 0$. Точка дотику лінії (5.87) задається умовою для Θ :

$$\left(\frac{27}{2} - \frac{9\Theta}{2} - \frac{\Theta^2}{8} \right)^2 - 2\Theta^3 = 0. \quad (5.88)$$

Рівність (5.88) виконується при $\Theta = 2$, тоді точка дотику ліній (5.87) має координати

$$\Theta = 2, \quad \sigma_\epsilon^2 = 2. \quad (5.89)$$

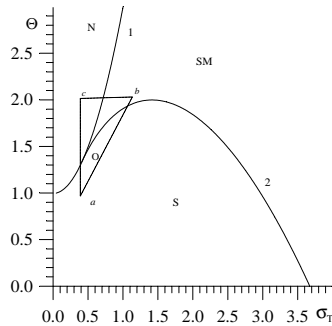


Рисунок 5.7 — Фазова діаграма при шумі керуючого параметра

Можна переконатися також, що крива $\sigma_{\epsilon-}$ у (5.87) і лінія (5.80) дотикаються у точці (5.85).

Проведений аналіз дозволяє побудувати фазову діаграму даної системи в умовах шуму керуючого параметра (рис.5.7). Вона показує, що область S нижче кривих (5.80), (5.87) відповідає стабільній симетричній фазі ($\eta = 0$), а область N (вище (5.80)) — стабільним несиметричним фазам. Область SM , обмежена (5.80) і (5.87), показує наявність абсолютно стійкої симетричної фазі і метастабільних несиметричних. Точка перетину ліній 1 і 2 є трикритичною (5.85). Якщо систему перевести із стану a у стан c , то реалізується перехід другого роду. На траєкторії $a \rightarrow b \rightarrow c$ система потрапляє в область стабільної несиметричної фазі c через метастабільний стан b . Характерно, що при цьому ефективний потенціал (5.79) стрибком змінює своє значення в точці $\eta_0 = 0$ від $-\infty$ в області 3 до нуля на кривій (5.80), а потім — від нуля до $+\infty$ в області 2. Така поведінка не дозволяє характеризувати даний перехід як перехід першого роду, хоча метастабільна несиметрична фаза на даній кривій стрибком перетворюється на стабільну η_{0+} у (5.84).

Біфуркаційні діаграми на рис.5.8 показують поведінку стаціонарних станів системи залежно від інтенсивності σ_{ϵ} при фіксованих значеннях Θ . Спостерігаємо, що на межі області S при $\sigma_{\epsilon}^2 > 1/6$ відбувається стрибкоподібна поява двох екстремальних точок потенціалу (5.79), одна з яких відповідає нестабільному стану η_u , а інша — метастабільному η_m .

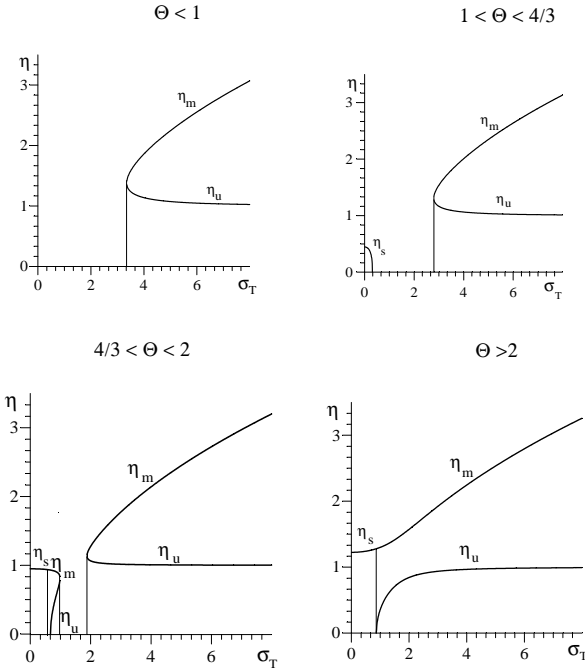


Рисунок 5.8 — Біфуркаційна діаграма при шумі керуючого параметра

Необхідно зазначити, що ефективний синергетичний потенціал (5.79) має логарифмічну особливість при $\eta \rightarrow 0$. Простежується, що $U_{ef}(\eta) \rightarrow -\infty$ нижче від кривої (5.80) і $U_{ef}(\eta) \rightarrow +\infty$ вище від неї. Згідно з класифікацією, наведеною у [6], перший випадок показує наявність в системі абсолютно поглинаючої границі в точці $\eta = 0$, а другий — абсолютно відображаючої. На самій кривій (5.80) границя зникає внаслідок занулення коефіцієнта перед $\ln \eta$ у (5.79). Розглянемо поведінку системи поблизу сингулярної точки $\eta = 0$. Обчислимо граничні функціонали. Для першого маємо

$$L_1(b, \beta) = \left(\frac{1 - \Theta}{\sigma_\epsilon^2} + 1 \right)^{-1} \left[\beta^{(1-\Theta)/\sigma_\epsilon^2 + 1} - b^{(1-\Theta)/\sigma_\epsilon^2 + 1} \right]. \quad (5.90)$$

У границі $b \rightarrow 0$ маємо $L_1 = \infty$ в області, яка обмежена інтенсивністю шуму:

$$\sigma_c^2 = \Theta - 1, \quad (5.91)$$

і $L_1 < \infty$ при $\sigma_c^2 > \sigma_c^2$. Для другого отримуємо

$$L_2(b, \beta) = (1 - \Theta + \sigma_c^2)^{-1} \ln \left(\frac{\beta}{b} \right). \quad (5.92)$$

При $\sigma_\Theta^2 > \sigma_c^2$ маємо $L_2 = \infty$. Отже, в області $\sigma_c^2 < \sigma_c^2$ ліва границя недосяжна навіть за нескінченний час, а при $\sigma_c^2 > \sigma_c^2$ вона досягається лише за нескінченний час ($t \rightarrow \infty$). Зазначимо, що така картина спостерігається тільки за відсутності шуму спряженого поля.

Сумісний вплив шумів спряженого поля і керуючого параметра.

Розглянемо більш загальний випадок, що враховує обидва мультиплікативні шуми ξ_h і ξ_Θ у рівнянні (5.61). Стаціонарна функція розподілу задається ефективним потенціалом записаним у загальному вигляді (5.76). На відміну від (5.79) він має скінченну границю при $\eta \rightarrow 0$. Вводячи параметр

$$a = 1 - \alpha, \quad (5.93)$$

а також перенормовані величини

$$\tilde{\sigma} \equiv \frac{\sigma_c}{a}, \quad \tilde{\Theta} \equiv \frac{\Theta}{a}, \quad \tilde{\eta}^2 = \frac{1 + \eta^2}{a} - 1, \quad (5.94)$$

при $\alpha < 1$ можна записати вираз (5.76) у вигляді $\tilde{U}_{ef}/\tilde{\sigma}^2$, де \tilde{U}_{ef} впливає з (5.79) із заміною σ_Θ , Θ , η на величини (5.94). При цьому шум спряженого поля зводиться до перенормування мінімального значення параметра порядку величиною $(a^{-1} - 1)^{1/2}$, так що область розбіжності $\tilde{\eta} \approx 0$ стає недосяжною.

Умова екстремуму потенціалу (5.76) розкладається на два рівняння, одне з яких зводиться до рівності $\eta = 0$, а інше задається виразом (5.68). Аналіз останнього показує, що лінія існування нульового кореня задається виразом, відмінним від (5.80) додатком $-4\sigma_h^2$ у правій частині.

Кратні дійсні корені лежать на кривій, яка проходить нижче, ніж попередня, дотикаючись до неї у точці

$$\Theta = \frac{4}{3}(1 - \sigma_h^2), \quad \sigma_\Theta^2 = \frac{1}{6} \left(1 + 8\sigma_h^2\right), \quad (5.95)$$

яка є трикритичною.

Вигляд фазової діаграми в змінних $\sigma_\Theta - \Theta$ при фіксованих значеннях σ_h наведений на рис.5.9. Спостерігається, що коли $\sigma_h^2 < 1$, то вона

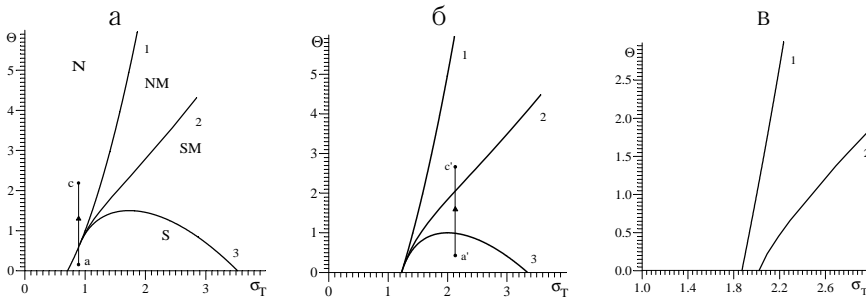


Рисунок 5.9 — Фазова діаграма з урахуванням шумів спряженого поля і керуючого параметра: а, б в — $\sigma_h^2 = 0.5, 1.0, 2.0$. Лінії 1, 2, 3 позначають спінодаль, бінодаль та лінію існування кратних коренів

якісно не відрізняється від наведеної на рис.5.7. У разі $\sigma_h^2 = 1$ трикритична точка (5.95) лежить на осі σ_ϵ , а при $\sigma_h^2 > 2$ потрапляє в область негативних Θ (на діаграмі не зображена). Крім того, внаслідок скінченності потенціалу (5.76) при всіх кінцевих значеннях параметра порядку на фазовій діаграмі з'являється лінія (крива 2 на рис.5.9а) співіснування симетричної й несиметричної фаз (*бінодаль*). Нижче від цієї лінії стабільною є симетрична фаза, а несиметрична — метастабільною. Вище бінодалі ситуація змінюється на протилежну, і лінія 1 (*спінодаль*) задає межу абсолютної втрати стійкості симетричної фази. Вище спінодалі система перебуває в стійкому несиметричному стані. Таким чином, при фіксованих σ_h (лінія $a \rightarrow c$ на рис.5.9а) спостерігається фазовий перехід

(при зміні Θ) другого роду, якщо σ_ϵ менше за критичне (див.(5.95)). Коли σ_ϵ перевищує це значення, то система зазнає переходу першого роду (лінія $a' \rightarrow c'$, рис.5.9).

5.2 Кінетика нерівноважних переходів

У даному підрозділі ми використовуємо польову схему, яка дозволяє знайти часові залежності найбільш імовірних значень стохастичної змінної [42]. Такий формалізм дозволяє визначити внесок траєкторій динамічної системи, які суттєво відхиляються від детерміністичних. Наявність таких траєкторій приводить до якісних змін у поведінці стохастичної системи.

Використовуючи схему, розвинуту у квантовій теорії поля [42], подамо функціонал імовірності розподілу стохастичної системи у вигляді експоненти із показником, який із точністю до знака зводиться до стандартної дії Евклідової теорії поля. У результаті опис нерівноважного переходу зводиться до використання принципу найменшої дії, мінімальне значення якої задає оптимальні траєкторії поведінки системи у фазовому просторі [38, 43–45].

5.2.1 Інтегрування у функціональних просторах

Сума за траєкторіями. У класичній механіці умова, що дозволяє виділити з усього набору траєкторій визначену, зводиться до принципу найменшої дії. Передбачається, що існує величина S , яку можна обчислити для кожної траєкторії. Класична траєкторія $x_{cl}(t)$ відповідає мінімальній (екстремальності) S . Величина S задається виразом, відомим із класичної механіки:

$$S \equiv S[f, i] = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt, \quad (5.96)$$

де $L(x, \dot{x})$ — лагранжіан системи. Для механічної системи, де розглядається частинка з масою m , яка розміщена в потенційному полі $V(x, t)$,

лагранжіан має вигляд

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x, t). \quad (5.97)$$

Вигляд екстремальної траєкторії знаходиться з варіаційного принципу, що дозволяє перейти до рівнянь Ойлера–Лагранжа:

$$\sum_n (-1)^{1+n} \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} = 0. \quad (5.98)$$

При розгляданні переходу системи з точки x_i у момент t_i у точку x_f у момент t_f необхідно врахувати, що система може вибрати будь-який із можливих шляхів. Тому кожна можлива траєкторія робить свій внесок $\varphi[x(t)]$ у характеристики руху

$$K(f, i) = \sum_{\text{За всіма переходами } (i \rightarrow f)} \varphi[x(t)], \quad (5.99)$$

де враховуються всі траєкторії системи. Частка $\varphi[x(t)]$ певної траєкторії є пропорційною дії $S[(t)]$.

Сума за траєкторіями будується аналогічно до ріманова інтеграла за рахунок розбиття підінтегральної функції $f(x)$ на відрізки малої довжини $h \rightarrow 0$. Тоді інтеграл I існує як гранична сума

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} [h \sum_i f(x_i)].$$

Вибиремо підмножину траєкторій. Для цього час t розбивається на інтервали довжиною Δt . Кожному такому моменту t_n відповідає точка x_n . Сполучаючи такі точки, одержуємо траєкторію. Суму за всіма подібними траєкторіями визначаємо обчисленням кратного інтеграла за усіма значеннями x_n ($n = 1, 2, \dots, N - 1$):

$$\begin{aligned} N\Delta t &= t_f - t_i, \\ \Delta t &= t_{n+1} - t_n, \\ t_0 &= t_i, \quad t_N = t_f, \\ x_0 &= x_i, \quad x_N = x_f. \end{aligned}$$

Тоді одержуємо

$$K(f, i) \sim \iiint \dots \int \varphi[x(t)] dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1}. \quad (5.100)$$

Якщо ввести позначення

$$\mathcal{D}x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_i [(\Delta t)^{1/2} dx(t_i)], \quad (5.101)$$

тоді зазначений інтеграл набирає вигляду

$$K(f, i) = \int \varphi[x(t)] \mathcal{D}x(t) \quad (5.102)$$

і буде називатися *інтегралом за траєкторіями* — континуальним інтегралом.

Функціональні похідні. Розглянемо функціонал $F[x(t)]$, визначений для заданої функції $x(t)$. При зміні траєкторії $x(t) \rightarrow x(t) + \epsilon(t)$ функціонал $F[x(t)]$ зміниться таким чином:

$$F[x + \epsilon] = F[x] + \int \frac{\delta F}{\delta x(s)} \epsilon(s) ds + \dots \quad (5.103)$$

Функціональна похідна в інтегралі є функціоналом від траєкторії $x(t)$ і функцією часу s .

Припустимо, що час розділений моментами t_i на багато відрізків довжиною Δt . Тоді функцію $x(t)$ можна задати її значеннями $x_i = x(t_i)$. У результаті функціонал перетвориться у функцію багатьох змінних:

$$F[x(t)] \rightarrow F(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots). \quad (5.104)$$

Варіаційна похідна тепер перетворюється у частинну похідну, тобто

$$\frac{\delta F}{\delta x(s)} \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (5.105)$$

Тоді зміна траєкторії $x(t)$ на $x(t) + \epsilon(t)$ приводить до зміни значень x_i на $x_i + \epsilon_i$. У результаті в першому наближенні одержуємо

$$F(\dots, x_i + \epsilon_i, x_{i+1} + \epsilon_{i+1}, \dots) - F(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \epsilon_i. \quad (5.106)$$

Згідно з визначенням диференціала від довільної функції

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

можна зробити висновок, що перша варіація функціонала набирає вигляду

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta x(s)} \delta x(s) ds, \quad (5.107)$$

де $\delta x(s)$ — варіація траєкторії $x(s)$. Виходячи з принципів квантової механіки, густина ймовірності статистичного ансамблю визначається за допомогою дії $S[x(t)]$:

$$p \sim \exp(-S[x(t)]). \quad (5.108)$$

Розглянемо перший момент функціонала згідно з даним розподілом:

$$\langle F \rangle = \int F[x(t)] \exp(-S[x(t)]) \mathcal{D}x(t), \quad (5.109)$$

де проводиться континуальне інтегрування. При зміні траєкторії перетворенням $x(t) \rightarrow x(t) + \epsilon(t)$ у зв'язку з визначенням $d[x_i + \epsilon_i] = dx_i$ одержуємо $\mathcal{D}[x(t) + \epsilon(t)] = \mathcal{D}x(t)$. Розглянемо можливі зміни в інтегралі:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \int F[x(t) + \epsilon(t)] e^{-S[x(t) + \epsilon(t)]} \mathcal{D}x(t) = \\ &= \int F[x(t)] e^{-S[x(t)]} \mathcal{D}x(t) + \int \left[\int \frac{\delta F}{\delta x(s)} \epsilon(s) ds \right] e^{-S[x(t)]} \mathcal{D}x(t) - \\ &\quad - \int F[x(t)] \left[\int \frac{\delta S}{\delta x(s)} \epsilon(s) ds \right] e^{-S[x(t)]} \mathcal{D}x(t) + \dots \end{aligned} \quad (5.110)$$

Виявляється, що доданок нульового порядку з точністю дорівнює $\langle F \rangle$. Тоді сума доданків першого порядку при будь-якій функції $\epsilon(t)$ повинна дорівнювати нулю. Звідси випливає

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle = \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle. \quad (5.111)$$

Розбиваючи вісь часу на інтервали Δt , можна отримати

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle F \frac{\partial S}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (5.112)$$

Вираз (5.111) оптимальніше записати у вигляді

$$\langle \delta F \rangle = \langle F \delta S \rangle, \quad (5.113)$$

що дозволяє не зазначати змінні, від яких залежать F і S .

Розглянемо застосування зазначених співвідношень на прикладі дії для механічної системи

$$S = \int dt \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V[x(t)] \right]. \quad (5.114)$$

Варіація дії дорівнює

$$\delta S = - \int dt [m\ddot{x} + V'(x)] \delta x(t). \quad (5.115)$$

Із співвідношення (5.113) випливає

$$\langle \delta F \rangle = - \langle F \int dt [m\ddot{x} + V'(x)] \delta x(t) \rangle. \quad (5.116)$$

Нехай $F \approx 1$, тоді $\delta F = 0$, і, отже, маємо

$$\langle m\ddot{x} \rangle = - \langle V'(x) \rangle. \quad (5.117)$$

Отриманий вираз є аналогом другого закону Ньютона.

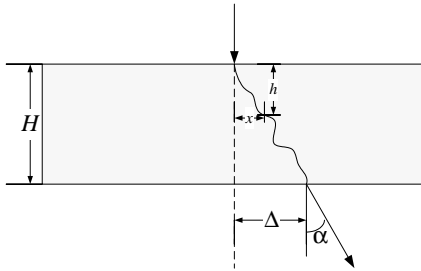


Рисунок 5.10 — Рух швидкої частинки (перпендикулярно до пластинки речовини)

Приклад 5.1 Проходження швидкої частинки через пластину речовини

При потраплянні частинки в пластину відбувається взаємодія з полями ядер, що зміщує її вбік випадково. Визначимо ймовірність того, що частинка відхилиться від первинної траєкторії на величину Δ і вилетить під кутом α . Нехай h — глибина проникнення в пластину, x — відхилення частинки від первинної траєкторії. Тоді $dx = \alpha dh$. Передбачається, що відхилення частинки відбуваються випадково, так що $d\alpha/dh \equiv \dot{\alpha} = \xi(h)$, нехай $\langle \xi(h) \rangle = 0$, $\langle \xi(h)\xi(h') \rangle = \sigma^2 \delta(h - h')$. У результаті еволюція відхилення описується рівнянням

$$\ddot{x} = \xi(h).$$

Флуктуації кута, розподілені за Гаусом:

$$P_{\xi}[\xi(h)] = \text{const} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^H [\xi(h)]^2 dh \right).$$

Задача полягає у визначенні розподілу $P(\Delta, \alpha)$, що визначає ймовірність входу з умовами $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ і виходу з умовами $x(H) = \Delta$, $\dot{x}(H) = \alpha$. Оскільки інтерес становить не точна траєкторія, а умови виходу, то розподіл шукаємо у вигляді інтеграла за траєкторіями

$$P(\Delta, \alpha) = \int \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^H \ddot{x}^2 dh \right) \mathcal{D}x(h).$$

При інтегруванні вибираються траєкторії, що задовольняють задані умови. Отриманий інтеграл є гаусівським. Він має екстремум для траєкторії

$$\ddot{x}(h) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння з даними граничними умовами має вигляд

$$x(h) = (3\Delta - \alpha H) \left(\frac{h}{H}\right)^2 + (\alpha H - 2\Delta) \left(\frac{h}{H}\right)^3.$$

У результаті отримуємо

$$\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^H \dot{x}^2 dh = \frac{6}{\sigma^2 H^3} \left(\Delta - \frac{\alpha H}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2 H}.$$

Використовуючи властивість гаусівського інтеграла — інтеграл за траєкторіями подається функцією від моментів часу в кінцевих точках, — маємо

$$P(\Delta, \alpha) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{6}{\sigma^2 H^3} \left(\Delta - \frac{\alpha H}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2 H}\right).$$

5.2.2 Оптимальні траєкторії

Дія шуму приводить до зростання флуктуацій у поведінці динамічної системи, тобто до відхилення від детерміністичної траєкторії $x_{det}(t)$. Траєкторії, які відхиляються від $x_{det}(t)$, відіграють важливу роль. Вони можуть досягати областей фазового простору, недосяжних для детерміністичної траєкторії навіть у широкому діапазоні початкових умов. Подібні області можуть характеризувати якісну зміну стану системи. Розглянемо методи, які дозволяють оцінити внесок таких траєкторій.

Основним об'єктом дослідження є система, яка описується рівнянням Ланжевена

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t). \quad (5.118)$$

Нехай шум є гаусівським і білим. Детерміністичний випадок $\sigma \rightarrow 0$ характеризується однією траєкторією $x = x_{det}(t)$, яка визначається при розв'язанні рівняння

$$\dot{x} = f(x).$$

Задача полягає у розгляді випадку, коли за час T система досягає точки Q фазового простору, яка розміщена далеко від $x_{det}(t)$. Існує сімейство траєкторій, що приводять до Q , і стартують із даної початкової умови. Такі траєкторії експоненційно поодинокі у границі слабкого шуму $\sigma^2 \rightarrow 0$. Проте можливим стає знаходження найімовірнішої — оптимальної траєкторії, що робить найбільший внесок в імовірність досягнення точки Q . Для визначення такої траєкторії використовуємо метод інтегрування у функціональних просторах [43]. Основний інструмент цієї теорії розвинутий у роботах Грехема, Михайлова [46–48].

Для отримання інтеграла за траєкторіями рівняння еволюції подається у дискретному вигляді

$$x_i - x_{i-1} = f_{i-1}\Delta t + g_{i-1}w_i \quad (5.119)$$

за рахунок розбиття інтервалу часу $t \in [0, T]$ на N відрізків довжиною $\Delta t = T/N$, тоді поточний час визначається згідно з $t_i = i\Delta t$ ($f_i = f(x_i)$, $g_i = g(x_i)$). Вінерівський процес w_i , розподілений за Гаусом:

$$P(\{w_i\}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta t} \sum_i w_i^2\right), \quad \sigma^2 = 1. \quad (5.120)$$

Рівняння (5.119) визначає перетворення $w_i \rightarrow x_i$. Якщо відомий розподіл w_i , то можна знайти розподіл для x_i :

$$P(\{x_i\}) = P(\{w_i\})J, \quad (5.121)$$

де J — якобіан переходу від однієї змінної до іншої:

$$J = \det \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_i'} \right\|. \quad (5.122)$$

Оскільки шум є чисто білим, то необхідно коректно виразити w_i . Для цього використовуємо стохастичний диференціал Іто, згідно з яким (5.119)

можна переписати у еквівалентному вигляді

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{g_{i-1}} = \left[\frac{f_{i-1}}{g_{i-1}} - \frac{g'_{i-1}}{2} \right] \Delta t + w_i. \quad (5.123)$$

Умова зв'язку змінних x_i і w_i , яка визначається (5.123), підставляється у (5.121) як аргумент дельта-функції. Тоді згідно з (5.123) маємо

$$P(\{x_i\}) = \int \prod_i dw_i \delta \left(w_i - \frac{1}{g_{i-1}} \left[x_i - x_{i-1} - \left(f_{i-1} - \frac{g_{i-1}g'_{i-1}}{2} \right) \Delta t \right] \right) \times \\ \times P(\{w_i\})J.$$

Для знаходження якобіана переходу використовуємо дискретний вигляд рівняння Ланжевена, з якого одержуємо

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{1}{g_{i-1}}.$$

Окрім того,

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_{i-1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \left[\frac{x_i + x_{i-1}}{g_{i-1}} - \left[\frac{f_{i-1}}{g_{i-1}} - \frac{g'_{i-1}}{2} \right] \Delta t \right], \\ \frac{\partial w_i}{\partial x_{i'}} = 0, \quad \text{при } i' \neq i, i-1.$$

Тому

$$J \equiv \det \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_{i'}} \right\| = \det \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right\| = \prod_i \frac{1}{g_{i-1}}. \quad (5.124)$$

Враховуючи еквівалентність аргумента дельта-функції рівнянню (5.123), записаному у континуальній формі, маємо

$$P(x(t)) \propto \int \mathcal{D}w(t) \delta \left(w(t) - \left[\frac{\dot{x}(t)}{g(x)} - \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2} \right) \right] \Delta t \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\int dt w^2(t)}{\Delta t} \right),$$

де взято позначення

$$\prod_i dw_i \rightarrow \mathcal{D}w(t).$$

Згідно з властивістю $\int dx \delta(x - y) f(y) = f(x)$ остаточно одержуємо

$$P[x(t)] \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int dt \mathcal{L}(x, \dot{x})\right), \quad (5.125)$$

де функція Онзагера–Махлупа L , яка відіграє роль лагранжіана евклідової теорії поля, має вигляд

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \left(\frac{\dot{x}}{g(x)} - \left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}\right]\right)^2. \quad (5.126)$$

З класичної механіки відомо, що лагранжіан визначено з точністю до повної похідної від деякої функції. Це дозволяє виділити в ньому ефективну кінетичну та потенційну енергію, записавши його у вигляді

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) + U(x), \quad (5.127)$$

де відповідна енергія задається функціями:

$$K(x, \dot{x}) = \left(\frac{\dot{x}}{g(x)}\right)^2, \quad U(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}\right)^2. \quad (5.128)$$

Для дослідження динаміки системи використовується варіаційний принцип і розглядаються рівняння Ойлера–Лагранжа.

Системи з адитивним шумом. Розглянемо випадок лінійної системи з адитивним шумом

$$\dot{x} = -\gamma x + \xi(t).$$

Вважається, що випадкова сила є гаусівською. Згідно з поданим формалізмом для функції Онзагера–Махлупа маємо

$$\mathcal{L} = (\dot{x} + \gamma x)^2. \quad (5.129)$$

Розглянемо поведінку оптимальних траєкторій. Рівняння Ойлера—Лагранжа з урахуванням дисипативної функції

$$R = \dot{x}^2 \quad (5.130)$$

набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}. \quad (5.131)$$

Обчисливши відповідні похідні, маємо

$$\ddot{x} = \gamma^2 x - \dot{x}. \quad (5.132)$$

Розв'язок цього рівняння записується у вигляді

$$x(t) = x(0)e^{(-1+\sqrt{1+4\gamma^2})t/2} + v(0)e^{-(1+\sqrt{1+4\gamma^2})t/2}. \quad (5.133)$$

Стационарний розв'язок задається координатами $(0, 0)$ на фазовій площині і являє собою особливу точку типу сідла. Така картина характерна для евклідової теорії, що описує статистичні (стохастичні) системи. Аналогія з механічними системами виявляється при розгляданні системи в інвертованому потенціалі. Математична природа такої поведінки стаціонарних точок полягає в тому, що статистичні (дисипативні) системи, на відміну від механічних, в інтегралах за шляхами розглядаються в уявному часі. Тоді стаціонарні точки будуть сідлами, у тому числі й мінімуми потенціалу.

Розглянемо нелінійну систему з потенціалом Ландау та адитивним шумом:

$$\dot{x} = f(x) + \xi(t), \quad f(x) = \varepsilon x - x^3. \quad (5.134)$$

Функція Онзагера—Махлупа має вигляд

$$\mathcal{L} = (\dot{x} - f(x))^2, \quad (5.135)$$

а рівняння Ейлера—Лагранжа записується як

$$\ddot{x} = x(\varepsilon - x^2)(\varepsilon - 3x^2) - \dot{x}. \quad (5.136)$$

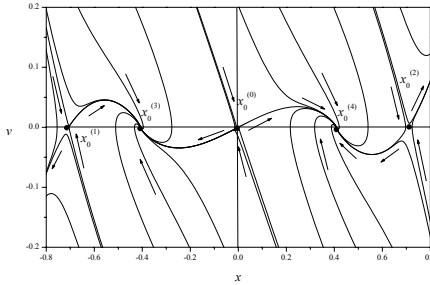


Рисунок 5.11 — Фазові діаграми системи з потенціалом Ландау та адитивним шумом

Стационарними розв'язками є

$$x_0^{(0)} = 0, \quad x_0^{(1,2)} = \pm\sqrt{\alpha}, \quad x_0^{(3,4)} = \pm\sqrt{\alpha/3}. \quad (5.137)$$

Розв'язок рівняння оптимальної траєкторії може бути поданий у вигляді фазових діаграм на площині координата – швидкість (x, v) (рис.5.11). Вони показують, що стаціонарним точкам (екстремумам потенціалу) відповідають сідлові точки фазових діаграм $x_0^{(1,2)}$. Допоміжним кореням стаціонарного рівняння відповідають фокуси $x_0^{(3,4)}$.

Питання для самоконтролю

- 1 Відмінність рівноважних від нерівноважних переходів.
- 2 Зміст параметра порядку при індукованих шумом переходах.
- 3 Особливості впливу границь дифузійного процесу.
- 4 Особливості застосування принципу підпорядкування у багатопараметричних системах.
- 5 Критична поведінка систем при індукованих шумом переходах.

Задачі до розділу 5

ЗАДАЧА 5.1 Провести моделювання поведінки випадкового процесу та стаціонарної густини ймовірності у моделі Мультуса-Ферхюльста при значеннях інтенсивності шуму, при яких змінюється характер границі дифузійного процесу та утворюється індукована шумом фаза.

ЗАДАЧА 5.2 Провести моделювання поведінки випадкового процесу та стаціонарної густини ймовірності у генетичній моделі при різних значеннях інтенсивності шуму, для ілюстрації ефекту самоорганізації та виявити вплив параметра α , який може бути як позитивним, так і негативним.

ЗАДАЧА 5.3 Чисельним моделюванням показати, що у моделі із довільною амплітудою шуму виникає поглинаючий стан при показнику мультиплікативної функції $a > 1/2$.

ЗАДАЧА 5.4 Провести моделювання поведінки випадкового процесу та стаціонарної густини ймовірності у системі Лоренца-Хакена у різних областях фазових діаграм, що відповідають дії різних стохастичних джерел.

Розділ 6

Еволюція стохастичної системи

У багатьох задачах виникає проблема з'ясування поведінки усереднених величин. Зміна їх із часом дозволяє охарактеризувати еволюцію всієї стохастичної системи. Оскільки основними величинами, що характеризують систему, є середнє, дисперсія та кореляційна функція, то для досить повного опису еволюції системи достатньо знати закони зміни цих величин. З іншого боку, опис поведінки системи в рамках середніх величин є іншою точкою зору на можливі індуковані шумом переходи і доповнює картину, створену найбільш імовірною поведінкою системи. Буде показано, що при цьому залежність моментів від інтенсивності шуму проявляє аномальну поведінку, властиву фазовому перетворенню [49]. Такими моментами є параметр порядку $\eta(t) \equiv \langle x(t) \rangle$, автокорелятор $S(t) \equiv \langle (\delta x)^2 \rangle$, $\delta x(t) \equiv x(t) - \langle x(t) \rangle$ та двочасова функція Гріна $G(t, t') \equiv \langle x(t)x(t') \rangle$. Для спрощення ми будемо розглядати нульвимірні системи, змінні станів яких не залежать від координати. Спочатку (підрозділ 6.1) буде досліджено систему у випадку білого та кольорового шумів, а в підрозділі 6.2 — нелінійну систему також із білим та кольоровим шумами окремо.

6.1 Еволюція лінійної системи

6.1.1 Процес Орнштайна–Уленбека

Цей процес описується рівнянням

$$\dot{x} = -\alpha x + \xi(t), \quad (6.1)$$

з такою шумовою кореляційною функцією:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'). \quad (6.2)$$

Відповідне рівняння Фоккера–Планка набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \int_{t_0}^t d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t). \quad (6.3)$$

Рівняння для характеристичної функції $\Phi(k) = \int e^{ikx} p(x, t)$ має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(k, t) = \alpha k \frac{\partial}{\partial k} \Phi(k, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \Phi(k, t). \quad (6.4)$$

Для його розв'язання скористаємося методом характеристик. Якщо

$$u(k, t, \Phi) = a, \quad v(k, t, \Phi) = b \quad (6.5)$$

(a, b — довільні сталі) є інтегралами допоміжних рівнянь

$$\frac{dt}{1} = \frac{dk}{\alpha k} = -\frac{d\Phi}{\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \Phi}, \quad (6.6)$$

тоді загальний розв'язок рівняння для характеристичної функції подається рівнянням

$$f(u, v) = 0. \quad (6.7)$$

Частинні інтеграли відшукуються за рахунок інтегрування з dt і dk або dk і $d\Phi$ відповідно. У результаті отримуємо

$$u(k, t, \Phi) = k e^{-\alpha t}, \quad (6.8)$$

$$v(k, t, \Phi) = \Phi e^{\sigma^2 k^2 / 4\alpha}. \quad (6.9)$$

Загальний розв'язок можна записати у вигляді $v = g(u)$, де $g(u)$ — довільна функція. Таким чином, загальний розв'язок буде мати вигляд

$$\Phi(k, t) = e^{-\sigma^2 k^2 / 4\alpha} g(k e^{-\alpha t}). \quad (6.10)$$

Виходячи з початкової умови

$$p(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad (6.11)$$

одержуємо

$$\Phi(k, 0) = e^{ix_0 k}, \quad (6.12)$$

з якого випливає

$$g(k) = e^{\sigma^2 k^2 / 4\alpha + ix_0 k}. \quad (6.13)$$

Тому

$$\Phi(k, t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{4\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) + ikx_0 e^{-\alpha t}\right), \quad (6.14)$$

що відповідає гаусівському розподілу з

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-\alpha t}, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha t}]. \quad (6.15)$$

Для знаходження кореляційної функції процесу $x(t)$ скористаємося розв'язком стохастичного диференціального рівняння, який можна записати у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} \xi(t') dt', \quad x_0 = x(t_0). \quad (6.16)$$

Використовуючи властивості $\xi(t) = dW(t)/dt$, одержуємо кореляційну функцію

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle &= x_0^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)} + \\ &+ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\alpha(t_1+t_2-t'_1-t'_2)} \sigma^2 \delta(t'_1 - t'_2) dt'_1 dt'_2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

У результаті інтегрування кореляційна функція має вигляд

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = x_0^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)} + \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(e^{-\alpha|t_1-t_2|} - e^{-\alpha(t_1+t_2)} \right). \quad (6.18)$$

Із умови великих значень часу t_1, t_2 , тобто $\alpha t_1 \gg 1, \alpha t_2 \gg 1$ випливає

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t_1-t_2|}. \quad (6.19)$$

Стационарний процес Орнштайна–Уленбека часто використовується як модель реального шумового сигналу, для якого значення $x(t_1), x(t_2)$ помітно корельовані при

$$|t_1 - t_2| \sim 1/\alpha \equiv \tau.$$

Для довільного процесу $x(s)$ час кореляції τ може бути визначений рівністю

$$\tau = \int_0^\infty dt |x(t)x(s)| / \langle (\delta x)^2 \rangle, \quad (6.20)$$

справедливою при будь-якому вигляді кореляційної функції.

6.1.2 Лінійна система із кольоровим шумом

Розглянемо рівняння з адитивним шумом

$$\dot{x} = -\alpha x + \zeta(t), \quad x(0) = 0. \quad (6.21)$$

Для випадкового процесу $\zeta(t)$ зробимо припущення:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = C(t - t'). \quad (6.22)$$

Формальний розв'язок рівняння Ланжевена має вигляд

$$x(t) = \int_{t_0}^t d\tau \zeta(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)}. \quad (6.23)$$

Останнє означає, що $x(t)$ — гаусівський процес із нульовим середнім та кореляційною функцією:

$$\langle x(t)x(t') \rangle = \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{t'} d\tau_2 C(\tau_1 - \tau_2) e^{-\alpha(t+t'-\tau_1-\tau_2)}. \quad (6.24)$$

Кореляція стохастичної сили та змінної $x(t)$ визначається формулою Новикова, за якою одержуємо

$$\langle \zeta(t)x(t) \rangle = \int_{t_0}^t d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau}. \quad (6.25)$$

Одноточкова густина ймовірності $p(x, t) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle$ описується рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} x p(x, t) + \int_{t_0}^t d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t). \quad (6.26)$$

Розглянемо еволюцію другого моменту стохастичної змінної. Для цього помножимо рівняння Фоккера—Планка на x^2 . Інтегруючи за частинами, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -2\alpha \langle x^2(t) \rangle + 2 \int_{t_0}^t d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau}. \quad (6.27)$$

При $t \rightarrow \infty$ процес $x(t)$ переходить у стаціонарний гаусівський процес із властивостями:

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau}, \quad \langle \zeta(t)x(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau C(\tau) e^{-\alpha\tau}. \quad (6.28)$$

Приклад 6.1 Експоненціально спадна кореляційна функція $C(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau/\tau_0}$

За одержаними вище формулами маємо

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma\tau_0}{\alpha(1 + \alpha\tau_0)}, \quad \langle \zeta(t)x(t) \rangle = \frac{\sigma\tau_0}{1 + \alpha\tau_0}.$$

У границі малого часу кореляції шуму $\tau_0 \rightarrow 0$ одержуємо

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma\tau_0}{\alpha}, \quad \langle \zeta(t)x(t) \rangle = \sigma\tau_0.$$

Помножимо рівняння Ланжевена на $x(t)$. Тоді можемо записати

$$x(t)\dot{x}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t) = -\alpha x^2(t) + \zeta(t)x(t),$$

яке після усереднення набирає вигляду

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -\alpha \langle x^2(t) \rangle + \langle \zeta(t)x(t) \rangle.$$

Його стаціонарний розв'язок

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle \zeta(t)x(t) \rangle$$

відповідає переходу до границь $t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$.

6.2 Еволюція нелінійної стохастичної системи [50, 51]

Розглянемо нелінійну систему з мультиплікативним шумом загального характеру. Будемо виходити з рівняння Ланжевена

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\zeta(t), \quad (6.29)$$

в якому детерміністична сила $f(x)$ визначається за допомогою потенціалу Ландау:

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad V(x) = -\frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad (6.30)$$

де параметр ε відіграє роль безрозмірної температури, відрахованої від критичного значення: $\varepsilon \equiv (T_c - T)/T_c$, $\varepsilon \in [-1, 1]$. Амплітуду мультиплікативного шуму взято у степеневому вигляді:

$$g(x) = |x|^a, \quad (6.31)$$

де a — позитивний показник, величина якого змінюється в інтервалі від 0 до 1 [32].

Дослідження стохастичних систем показує, що наближення білого шуму часто є недостатнім, оскільки враховує повний спектр флуктуацій, тоді як основний внесок дають складові, що обмежені кінцевим часом кореляції $0 < \tau < \infty$. Якщо цей час набагато менший від характерного часу еволюції самої системи τ_0 , то можна провести розвинення за параметром $(\tau/\tau_0)^{1/2} \ll 1$, що несуттєвим чином змінить картину самоорганізації [6]. У протилежному випадку $\tau \gg \tau_0$ може бути використаний метод динамічної релаксації, який показує, що кольоровий шум суттєво впливає на поведінку стохастичної системи [52, 53]. Однак випадок $\tau \gg \tau_0$ реалізується лише для вузького класу стохастичних систем. Тому основний інтерес становить дослідження систем із часом кореляції $\tau \sim \tau_0$. Підґрунтям опису таких систем є метод уніфікованої апроксимації кольорового шуму [54–57], у рамках якого розвивається наступний підхід.

Поведінка кольорового шуму $\zeta(t)$ задається рівнянням Орнштейна-Уленбека

$$\tau \dot{\zeta} = -\zeta + \xi(t), \quad (6.32)$$

якому відповідає кореляційна функція

$$C(t, t') \equiv \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right) \quad (6.33)$$

(як і раніше, $\xi(t)$ подає білий шум з інтенсивністю $\sigma^2 = 1$). Наближаючи час автокореляції шуму τ до нуля, переходимо до білого шуму, де $\tau = 0$.

Тепер наша система (6.29), (6.32) стає двопараметричною і немарківською, оскільки існує певне значення часу автокореляції τ процесу $\zeta(t)$. Для подальшого надамо рівнянням (6.29), (6.32) квазімарковського вигляду. Для цього візьмемо похідну за часом у рівнянні (6.29), підставляючи у результат $\dot{\zeta}$ із (6.32), а ζ із (6.29). Зазначені викладки приводять до немарковського стохастичного диференціального рівняння

$$\tau \left[\ddot{x} - \frac{g'(x)}{g(x)} \dot{x}^2 \right] + \sigma(x)\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t), \quad (6.34)$$

де введено позначення

$$\sigma(x) \equiv 1 - \tau f(x) \left[\ln \frac{f(x)}{g(x)} \right]'. \quad (6.35)$$

За методом уніфікованої апроксимації кольорового шуму скористаємося адіабатичним наближенням, у рамках якого складові, що містять величини \ddot{x} , \dot{x}^2 , дають внесок, який перевищує складову з \dot{x} . Нехтування зазначеними складовими надає марковських властивостей рівнянню (6.34), яке тепер набирає вигляду

$$\sigma(x)\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t). \quad (6.36)$$

6.2.1 Система з білим шумом

Припустивши $\tau = 0$ у (6.35), приходимо до системи із білим шумом. Відповідно до цього корелятор амплітуди шуму $g(x(t))$ та функції $\xi(t')$ підпорядковується умові

$$\langle g(x(t))\xi(t') \rangle = 0, \quad t \neq t'. \quad (6.37)$$

Усереднюючи рівняння Ланжевена, для першого моменту одержуємо $\dot{\eta} = \langle f(x) \rangle$, де $\langle f(x) \rangle \neq f(\eta)$. Усереднення такої сили дає складову $\langle x^3 \rangle$, яка зводиться до розкладання за кумулянтами $\eta \langle x^2 \rangle \equiv \eta(\eta^2 + S)$. У результаті еволюційне рівняння параметра порядку набирає вигляду

$$\dot{\eta} = \eta \left(\varepsilon - \eta^2 \right) - 3\eta S, \quad (6.38)$$

де η , S є функціями часу t . Відповідно до (6.37) маємо

$$\langle g(x(t))x(t')\zeta(t) \rangle = 0.$$

Тоді рівняння для двочасового корелятора набирає форми

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') = \{\varepsilon - 3[\eta^2(t) + S(t)]\}G(t, t'). \quad (6.39)$$

Отже, проблема полягає в розв'язанні рівняння для варіації $S \equiv \langle x^2 \rangle - \eta^2$. Використовуючи співвідношення $dx^2 \equiv (x + dx)^2 - x^2$, де dx визначається стохастичним диференціальним рівнянням, для $\langle x^2 \rangle$ одержуємо

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2\langle xf(x) \rangle + \langle g^2(x) \rangle. \quad (6.40)$$

Підставляючи визначення мультиплікативної функції та детерміністичної сили, одержуємо середнє $\langle x^{2a} \rangle$ із дробовим степенем, яке слід розкласти за стандартними кумулянтами.

Обчислення дробового середнього. Доповнимо вихідний розподіл $p(x)$ допоміжним $p_q(x)$, де $0 < q < 1$ на основі зв'язку

$$x^q p(x) dx \equiv y p_q(y) dy. \quad (6.41)$$

Тоді нормований розподіл $p_q(y)$ нової стохастичної змінної $y \equiv x^q$ набирає вигляду

$$p_q(y) = q^{-1} y^{(1-q)/q} p(y^{1/q}). \quad (6.42)$$

Використовуючи позначення $\langle \dots \rangle_q$ для середнього за $p_q(y)$ та $\langle \dots \rangle$ за $p(x)$, одержуємо:

$$\begin{aligned} \langle x^q \rangle &= \langle y \rangle_q, & (6.43) \\ \langle x^q \rangle &\equiv \int x^q p(x) dx, & \langle y \rangle_q &\equiv q^{-1} \int y y^{(1-q)/q} p(y^{1/q}) dy. \end{aligned}$$

Таким чином, використання розподілу (6.42) дозволяє знайти середнє від степеневі функції x^q із дробовим показником $q < 1$.

Однорідна функція розподілу самоподібної стохастичної системи має асимптотику [32]:

$$p(x) \simeq Ax^{-2a}, \quad A \equiv \frac{1}{2}|1 - 2a|b^{|1-2a|}, \quad (6.44)$$

де стала нормування A задається параметром обрізання $b \rightarrow 0$:

$$2 \int_b^{1/b} p(x) dx = 1. \quad (6.45)$$

Використання (6.44) для цілого $n > 0$ сприяє одержанню

$$\langle x^{nq} \rangle \equiv A \int x^{nq} x^{-2a} dx = A(1 - 2a + nq)^{-1} x^{1-2a+nq}. \quad (6.46)$$

Тоді з (6.43) випливає

$$\langle x^{nq} \rangle = \alpha_n(q) \langle x^n \rangle^{p_n(q)}, \quad (6.47)$$

де показник $p_n(q)$ та множник $\alpha_n(q)$ задаються виразами:

$$p_n(q) = \frac{1 - 2a + nq}{1 - 2a + n}, \quad \alpha_n(q) = A^{\frac{n(1-q)}{(1-2a+n)}} p_n^{-1}(q) (1 - 2a + n)^{p_n(q)-1}. \quad (6.48)$$

Тепер знайдемо рівняння для автокорелятора $S = \langle x^2 \rangle - \eta^2$, яке ґрунтується на (6.40), (6.47), (6.48). Поведінка системи з мультиплікативним шумом визначається показником a . При $1/2 < a < 1$, коли випадає детерміністичний конденсат, система завжди неупорядкована, і її поведінка задається лише функцією $G(t, t')$ та автокорелятором $S(t)$. Перший визначається рівнянням (6.39), а для другого з урахуванням (6.40), (6.47), (6.48) маємо:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 2S(\varepsilon - 3S) + \alpha_2 S^{p_2}, \quad (6.49) \\ \alpha_2 \equiv \alpha_2(a) &= A^{2(1-a)p_2} p_2^{-p_2}, \quad p_2 \equiv p_2(a) = (3 - 2a)^{-1}, \end{aligned}$$

де $q = a$; $n = 2$. В області $0 < a < 1/2$ система може бути впорядкованою (характер границь дифузійного процесу не зумовлюється) і замість

(6.49) одержуємо:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 2S [\varepsilon - 3(\eta^2 + S)] + \alpha_1 \eta^{p_1}, & (6.50) \\ \alpha_1 \equiv \alpha_1(2a) &= A^{(1-2a)p_1} p_1^{-p_1}, & p_1 \equiv p_1(a) = [2(1-a)]^{-1}, \end{aligned}$$

де $q = 2a$, $n = 1$.

Невпорядкована система. Цей випадок реалізується для показника $a > 1/2$, і еволюція системи задається рівняннями (6.49), (6.39), що визначають часові залежності одно- та двочасового кореляторів $S(t)$, $G(t, t')$. Форму першої з них подано на рис.6.1а, де зображено, що $S(t)$ монотонно зростає до стаціонарного значення S_0 , визначеного рівнянням

$$\varepsilon - 3S_0 + (\alpha_2/2)S_0^{p_2-1} = 0. \quad (6.51)$$

У межах $S \ll 1$, коли $S^{p_2} \gg S \gg S^2$, рівняння (6.49) являє собою

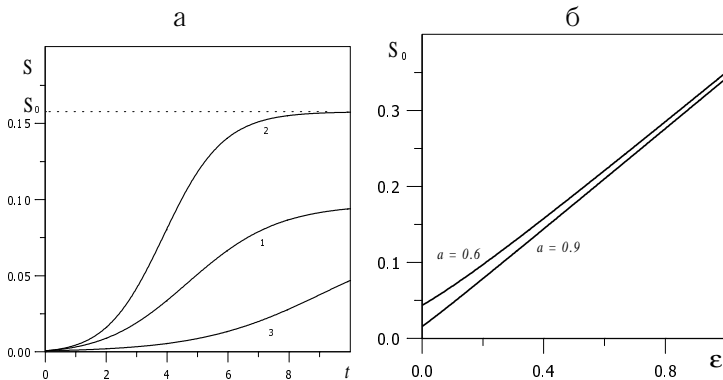


Рисунок 6.1 — Поведінка автокорелятора при $a > 1/2$: а) часова залежність $S(t)$ (криві 1, 2, 3 відповідають $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.2$; $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$; $a = 0.9$, $\varepsilon = 0.2$); б) стаціонарна точка S_0 залежно від температури ε для декількох значень показника a

степеневу форму часової залежності:

$$S(t) = Bt^{1/(1-p_2)}, \quad B \equiv \left[\frac{A^{2(1-a)}}{p_2(1-p_2)} \right]^{p_2/(1-p_2)}, \quad p_2 \equiv (3-2a)^{-1}, \quad (6.52)$$

де $S(t=0) = 0$. У протилежному разі $S_0 - S \ll S_0$ маємо експоненціальну залежність $S - S_0 \propto e^{-\lambda t}$, $\lambda \equiv 6(2-p_2)S_0 - 2(1-p_2)\varepsilon$. Згідно з (6.51) зростання температури ε монотонно збільшує стаціонарну величину S_0 від мінімального значення $(\alpha_2/6)^{1/(2-p_2)}$ (див. рис.6.1б).

Часову залежність корелятора $G(t, 0)$, що визначається розв'язанням рівняння (6.39), подано на рис.6.2 при різних показниках a , температурах ε та однакових початкових умовах. Характерно, що корелятор $G(t, 0)$ спочатку досягає максимуму, а потім монотонно спадає до нуля. Зростання ε та a приводить до підсилення зазначеного максимуму.

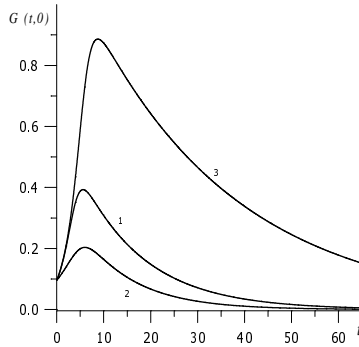


Рисунок 6.2 — Часова залежність грінівської функції в домені $a > 1/2$ для декількох значень показника a та температури ε (криві 1, 2, 3 відповідають $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$; $a = 0.6$, $\varepsilon = 0.2$; $a = 0.9$, $\varepsilon = 0.4$)

Упорядкована система. Тепер розглянемо випадок $a < 1/2$, який відповідає формуванню конденсату. При цьому поведінка системи задається диференціальними рівняннями (6.38), (6.39), (6.50), для аналізу яких доцільно скористатися методом фазової площини. Фазові діаграми

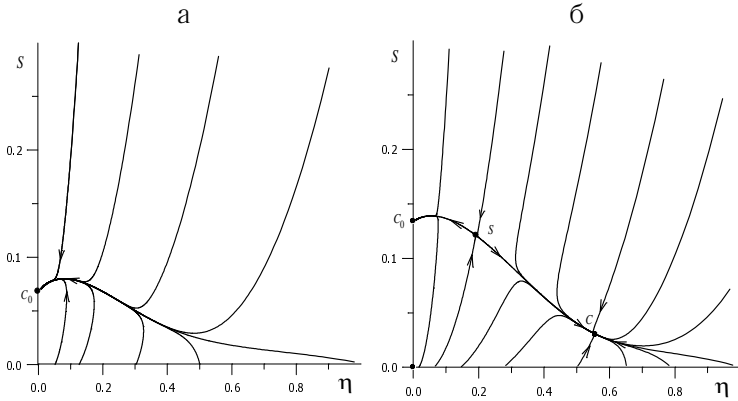


Рисунок 6.3 — Фазові портрети при $a > 1/2$: а) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$; б) $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$

на рис.6.3а показують, що при малих температурах ε існує лише одна притягувальна точка $\eta_0 = 0$, $S_0 = \varepsilon/3$. Зростання ε приводить до біфуркації у точці $\eta_c = [(2 - p_1)(4 - p_1)^{-1}\varepsilon_0]^{1/2}$, $S_c = (2/3)(4 - p_1)^{-1}\varepsilon_0$, що відповідає температурі

$$\varepsilon_0 = \frac{4 - p_1}{2 - p_1} \left[\frac{3}{8}(2 - p_1)\alpha_1 \right]^{2/(4-p_1)}. \quad (6.53)$$

Як свідчить рис.6.4, значення ε_0 нескінченно зростає з наближенням показника a до критичної величини $a = 1/2$. Координати сідла та вузла, що створюються внаслідок біфуркації, визначаються рівняннями:

$$\varepsilon - \eta_0^2 - (3/4)\alpha_1\eta_0^{p_1-2} = 0, \quad S_0 = (4\alpha_1)^{-1}(\varepsilon - 3S_0)^{(p_1/2)-1}, \quad (6.54)$$

які впливають з (6.38), (6.50) при $\dot{\eta} = 0$, $\dot{S} = 0$. Температурні залежності стаціонарних значень η_0 , S_0 подані на рис.6.5, де штрихова лінія відповідає сідловій точці S , а суцільна — вузловій C . Характерно, що зображений перехід належить до першого роду, тоді як вихідний x^4 -потенціал відповідає неперервному перетворенню. Таким чином, при малих значеннях показника мультиплікативного шуму ($a < 1/2$) флукту-

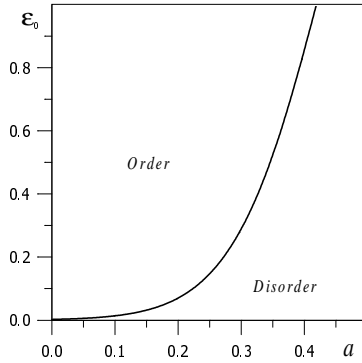


Рисунок 6.4 — Фазова діаграма системи

ації трансформують рід переходу, в той час як при $a > 1/2$ шум узагалі переважає процес упорядкування (див. [49]).

Розглянемо часові залежності основних статистичних моментів. Спочатку проаналізуємо невпорядкований стан, що відповідає точці C_0 на рис.6.3, у границі великих часових інтервалів $t \rightarrow \infty$. Наявність середніх дробового порядку в рівнянні (6.50) не дозволяє використовувати звичайний метод показників Ляпунова, що відповідає експоненціальним часовим залежностям. Цього можна уникнути, використовуючи узагальнену експоненту Цалліса [37]:

$$e^{qt} \rightarrow \exp_q(t) \equiv [1 + (1 - q)t]^{1/1-q}, \quad (6.55)$$

де параметр q відіграє роль показника Ляпунова. Ця експонента підпорядковується правилу диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_q(t) = \left(\exp_q(t) \right)^q \equiv \exp_q^q(t). \quad (6.56)$$

У границі малих та великих часових інтервалів маємо такі асимптотики:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp_q(t) \rightarrow 1 + t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \exp_q(t) \rightarrow [(1 - q)t]^{1/1-q}, \quad (6.57)$$

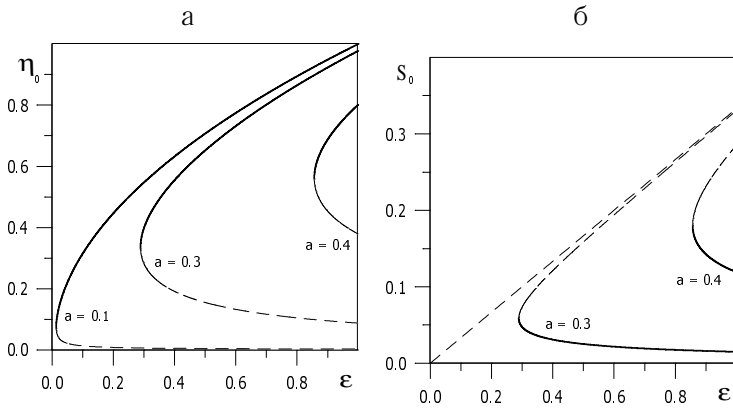


Рисунок 6.5 — Стационарні стани системи при $a > 1/2$: а) параметр порядку η залежно від температури ϵ при різних значеннях a ; б) автокорелятор S залежно від температури ϵ при різних значеннях a

першу з яких буде застосовано для визначення множників Ляпунова, а за допомогою другої встановлюється індекс q . Характерно, що при значеннях параметра $q \neq 1$ експонента Цалліса змінюється за степеневим законом у границі $t \rightarrow \infty$.

Будемо шукати розв'язки рівнянь (6.38), (6.50) у вигляді

$$\eta(t) = m \exp_{\mu}(t), \quad S(t) = S_0 + n \exp_{\nu}(t), \quad (6.58)$$

де $S_0 = \epsilon/3$ відповідає точці C_0 , а індекси μ, ν підлягають визначенню. Оскільки множник n визначає величину поправки в розкладі (6.58), то він підпорядковується умові $n \ll 1$, тоді як значення єдиної складової m може бути довільним. З фізичної точки зору це означає, що параметр порядку поводить себе нелінійно, тоді як автокорелятор — лінійно. Підставляючи (6.58) в (6.38) та враховуючи складові не вище першого порядку за амплітудами $m, n \ll 1$, маємо

$$3n \exp_{\mu}^{1-\mu}(t) \exp_{\nu}(t) = -1. \quad (6.59)$$

Тоді, використовуючи (6.57), у границі великого часового інтервалу одержуємо

$$n^{-1} = 3(1 - \mu), \quad \nu = 2. \quad (6.60)$$

Підставляючи (6.58) у (6.50), для m та μ знаходимо

$$\exp_{\nu}^{1-\nu}(t) \left[2\varepsilon n - \alpha_1 m^{p_1} \exp_{\mu}^{p_1}(t) \exp_{\nu}^{-1}(t) \right] = -n. \quad (6.61)$$

Вище зазначалося, що у границі малого часового інтервалу функція $\exp_{\nu}^{1-\nu}(t)$ зводиться до 1 і для множника Ляпунова одержуємо

$$3\alpha_1 m^{p_1} = -(1 + 2\varepsilon). \quad (6.62)$$

Відповідно у границі великих масштабів часу маємо $\exp_{\mu}^{p_1}(t) \exp_{\nu}^{-1}(t) = p_1^{-1}$, звідки

$$\mu = 1 + p_1 \equiv 1 + [2(1 - a)]^{-1}. \quad (6.63)$$

Таким чином, у границі $t \rightarrow \infty$ автокорелятор прямує до стійкого значення S_0 за гіперболічним законом

$$S(t) = S_0 + (2/3)(1 - a)t^{-1}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (6.64)$$

Параметр порядку спадає степеневим способом

$$\eta(t) = \eta_0 - [2(1 - a)]^{2(1-a)} |m| t^{-2(1-a)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (6.65)$$

де амплітуда m подається рівнянням (6.62).

Таким чином, при малих відхиленнях температури від критичної точки ($\varepsilon < \varepsilon_0$) спостерігається монотонне спадання параметра порядку $\eta(t)$, тоді як автокорелятор поводить себе немонотонно (див. фазові діаграми на рис.6.3а). Більш складною є поведінка статистичних моментів в області $\varepsilon > \varepsilon_0$, де біфуркація приводить до упорядкування. Діаграми рис.6.3б показують, що фазова площина розділяється на дві області, які відповідають малим та великим значенням параметра порядку. У першій поведінка системи є аналогічною до попереднього випадку $\varepsilon < \varepsilon_0$. Якщо початкові значення величин забезпечують потрапляння

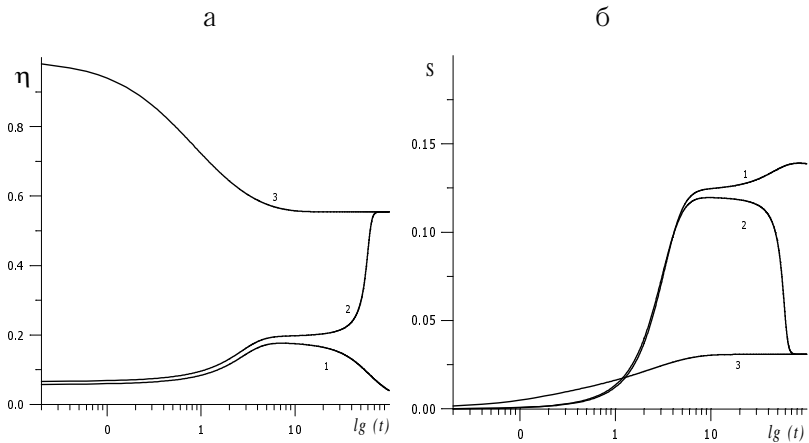


Рисунок 6.6 — Часові залежності різних траєкторій фазових діаграм: а) часові залежності параметра порядку зображено при $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$ та $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.057$, $\eta(0) = 0.066$, $\eta(0) = 1.0$); б) часові залежності автокорелятора при $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$ та $S(0) = 0$ (криві 1, 2, 3 відповідають $\eta(0) = 0.057$, $\eta(0) = 0.066$, $\eta(0) = 1.0$)

фазової точки до області, що лежить праворуч від сепаратриси, то система еволюціонує до притягувального вузла C . Відповідна часова залежність на рис.6.6 (див. криву 2) показує критичне уповільнення поблизу сепаратриси C_0SC на рис.6.3б, яке виявляється і в області неупорядкованого стану (крива 1).

Проведений розгляд свідчить про те, що нелінійна поведінка системи поблизу неупорядкованого стану, що відповідає точці C_0 , потребує узагальнення експоненти Ляпунова відповідним виразом Цалліса (6.55). Поблизу вузла C , який відповідає упорядкованому стану, параметр порядку та автокорелятор набувають скінченних значень, що дозволяє використовувати лінійне наближення. У результаті в експоненті (6.55) стає суттєвою лише друга складова, що подає ядро перетворення Мелліна. Однак якщо експонента Цалліса характеризується одним значенням па-

раметра q , то перетворення Мелліна містить їх спектр:

$$\eta(t) = \eta_0 + \int m_q t^q dq, \quad (6.66)$$

$$S(t) = S_0 + \int n_q t^q dq. \quad (6.67)$$

Підставляючи ці визначення в лінеаризовані рівняння (6.38), (6.50), для амплітуд $m_q, n_q \ll 1$ одержуємо:

$$(q/t + 2\eta_0^2)m_q - 3\eta_0 n_q = 0, \quad (6.68)$$

$$[4\eta_0(\varepsilon - \eta_0^2) - \alpha_1 \eta_0^{p_1-1} p_1]m_q + [q/t + 2(\varepsilon + \eta_0^2)]n_q = 0. \quad (6.69)$$

Ця система має розв'язок за умови

$$c = (\varepsilon + \eta_0^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\eta_0^2(2\varepsilon - \eta_0^2) - 3\alpha_1 \eta_0^{p_1} p_1}{\varepsilon + 2\eta_0^2}} \right], \quad (6.70)$$

де введено сталу $c = -q/t$. У результаті параметр порядку (6.66) та автокорелятор (6.67) змінюються поблизу упорядкованої точки C таким чином:

$$\eta(t) = \eta_0 + m \exp(-ct \ln t), \quad (6.71)$$

$$S(t) = S_0 + n \exp(-ct \ln t), \quad (6.72)$$

де амплітуди m, n відповідають індексу $q = -ct$.

6.2.2 Кольоровий шум

Як і раніше, будемо описувати стохастичну систему рівнянням Ланжевена (6.29), а шум подається процесом Орнштайна—Уленбека. Використання наближення уніфікованої апроксимації кольорового шуму приводить до рівняння (6.36), усереднення якого дає

$$\langle \sigma(x) \dot{x} \rangle = \langle f(x) \rangle. \quad (6.73)$$

Підставляючи сюди вираз (6.35) для $\sigma(x)$ та виносячи знак похідної за часом за усереднення, після розкладання за кумулянтами одержуємо

$$[\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)]\dot{\eta} + \kappa\eta\dot{S} = \eta(\epsilon - \eta^2) - 3\eta S, \quad (6.74)$$

де введено позначення

$$\epsilon = 1 - \epsilon\tau(1 - a), \quad \kappa = \tau(3 - a). \quad (6.75)$$

Для конструювання рівняння автокорелятора використовуємо допоміжний стохастичний процес $dy \equiv \sigma dx$, для якого врахування складових одного порядку за dt дає $dy^2 \equiv (y + dy)^2 - y^2 = \epsilon^2 dx^2 + (2\epsilon\kappa/3)dx^4 + (\kappa/3)^2 dx^6$. Нехтуючи внеском $x^6 \ll 1$, одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} 2\epsilon\eta \left[\epsilon + 4\kappa \left(\frac{1}{3}\eta^2 + S \right) \right] \dot{\eta} + \epsilon[\epsilon + 4\kappa(\eta^2 + S)]\dot{S} = \\ 2 \left[\epsilon\epsilon(\eta^2 + S) - \left(\epsilon - \frac{\kappa\epsilon}{3} \right) (\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2) \right] + \langle x^{2a} \rangle, \end{aligned} \quad (6.76)$$

де останній член задається виразом (6.47).

Невпорядкована система. Як і для білого шуму, неспорядкована система реалізується в області показників $a > 1/2$. Еволюція такої системи задається рівнянням

$$\dot{S} \left(\frac{\epsilon}{2} + 2\kappa S \right) = S \left(\epsilon - S \left(3 - \frac{\epsilon\kappa}{\epsilon} \right) \right) + \alpha_2 S^{p_2}, \quad (6.77)$$

розв'язання якого подано на рис.6.7.

Бачимо, що автокорелятор монотонно досягає стаціонарного стану, визначеного рівнянням

$$\epsilon - \left(3 - \frac{\epsilon\kappa}{\epsilon} \right) S_0 + \alpha_2 S_0^{p_2-1} = 0, \quad (6.78)$$

де $S_0 \neq -\epsilon/4\kappa$. На рис.6.8 наведено залежність стаціонарних станів від температури ϵ та часу кореляції τ . Бачимо, що зростання обох параметрів ϵ , τ приводить до збільшення стаціонарного значення S_0 . При ма-

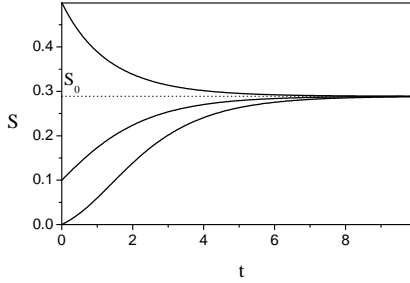


Рисунок 6.7 — Часова залежність автокорелятора S при $\varepsilon = 0.6$, $\tau = 0.5$, $a = 0.8$

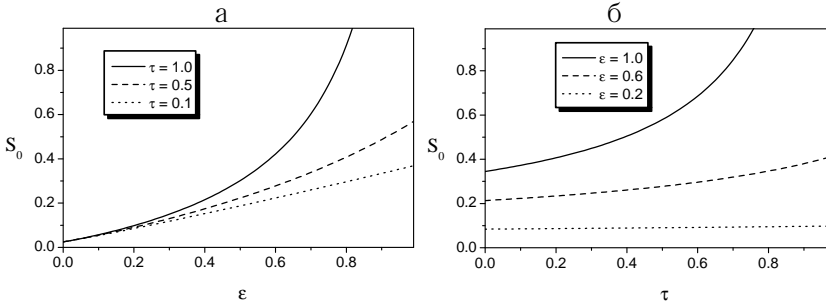


Рисунок 6.8 — Стаціонарні стани системи при $a = 0.8$: а) залежність S_0 від керуючого параметра при різних τ ; б) залежність S_0 від часу кореляції шуму при різних ε

лому часі $t \ll 1$ реалізується границя $S \ll 1$, в якій $S^{p_2} \gg S \gg S^2$, і рівняння (6.77) приводить до степеневій залежності

$$S = Bt^{\frac{1}{1-p_2}}, \quad B = \left[\frac{2(1-p_2)\alpha_2}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-p_2}}, \quad t \rightarrow 0. \quad (6.79)$$

У протилежному разі $S - S_0 \ll S_0$ маємо експоненціальну поведінку

$$S - S_0 \propto e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{-\varepsilon + S_0(3 - \varepsilon\kappa/\varepsilon) - \alpha_2 p_2}{\varepsilon/2 + 2\kappa S_0}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (6.80)$$

Упорядкована система. Перейдемо до випадку $a < 1/2$ коли система упорядковується. Тоді її динаміка описується рівняннями

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, S)\dot{\eta} = & \eta[\epsilon - \eta^2 - 3S][\epsilon + 4\kappa(\eta^2 + S)] \\ & - 2\kappa\eta \left[\epsilon(\eta^2 + S) - \left(1 - \frac{\kappa\epsilon}{3\epsilon}\right) (\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2) \right] - \kappa\epsilon\alpha_1\eta^{p_1+1}, \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} \beta(\eta, S)\dot{S} = & \left[\epsilon(\eta^2 + S) - \left(1 - \frac{\kappa\epsilon}{3\epsilon}\right) (\eta^4 + 6\eta^2 S + 3S^2) \right] [\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)] \\ & - \eta^2 \left[\epsilon + 4\kappa \left(\frac{\eta^2}{3} + S \right) \right] [\epsilon - \eta^2 - 3S] + [\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)]\alpha_1\eta^{p_1}, \end{aligned} \quad (6.82)$$

що визначають параметр порядку та автокорелятор. Тут множники, які задають швидкість зміни величин, мають вигляд

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, S) = & [\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)][\epsilon + 4\kappa(\eta^2 + S)] - \\ & - 2\eta^2\kappa \left[\epsilon + 4\kappa \left(\frac{\eta^2}{3} + S \right) \right], \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} \beta(\eta, S) = & \left[\frac{\epsilon}{2} + 2\kappa(\eta^2 + S) \right] [\epsilon + \kappa(\eta^2 + S)] = \\ & - \kappa\eta^2 \left[\epsilon + 4\kappa \left(\frac{\eta^2}{3} + S \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Одержана система диференціальних рівнянь розв'язується методом фазової площини, використання якого показує, що зафарбовування шуму несуттєво змінює вигляд фазового портрета, наведеного на рис.6.3. Розглянемо спочатку стаціонарний стан, в якому $\dot{\eta} = 0$, $\dot{S} = 0$. Малим значенням параметра ϵ відповідає єдина особлива точка з координатами

$$\eta_0 = 0, \quad S_0 = \frac{1 - \epsilon\tau(1 - a)}{1 - 2\epsilon\tau(1 - 2a/3)} \frac{\epsilon}{3}, \quad (6.85)$$

що характеризують невпорядкований стан. Подібно до випадку білого шуму підвищення параметра ϵ приводить до бифуркації в точці $\epsilon = \epsilon_0$.

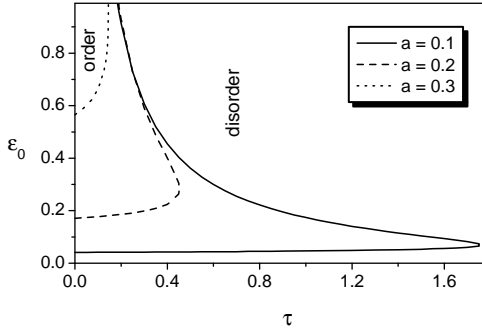


Рисунок 6.9 — Фазова діаграма системи

У результаті виникають сідло та вузол з координатами, що задаються рівняннями:

$$\begin{aligned}
 & [\epsilon - \eta_0^2 - 3S_0][\epsilon + 4\kappa(\eta_0^2 + S_0)] = \\
 & = 2\kappa \left[\epsilon(\eta_0^2 + S_0) - \left(1 - \frac{\kappa\epsilon}{3\epsilon}\right) (\eta_0^4 + 6\eta_0^2 S_0 + 3S_0^2) \right] + \kappa\epsilon\alpha_1\eta_0^{p_1}, \quad (6.86)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\epsilon(\eta_0^2 + S_0) - \left(1 - \frac{\kappa\epsilon}{3\epsilon}\right) (\eta_0^4 + 6\eta_0^2 S_0 + 3S_0^2) \right] [\epsilon + \kappa(\eta_0^2 + S_0)] = \\
 & = \eta_0^2 \left[\epsilon + 4\kappa \left(\frac{\eta_0^2}{3} + S_0 \right) \right] [\epsilon - \eta_0^2 - 3S_0] - [\epsilon + \kappa(\eta_0^2 + S_0)]\alpha_1\eta_0^{p_1}. \quad (6.87)
 \end{aligned}$$

Згідно з фазовою діаграмою на рис.6.9 при великих показниках a зростання часу кореляцій шуму τ монотонно звужує область упорядкування. З іншого боку, зменшення значення a забезпечує немонотонне розширення області упорядкування, так що при сталому часі τ зростання ϵ_0 приводить спочатку до упорядкування, а потім до розупорядкування. Таким чином, при значеннях параметра кореляції τ , обмежених зверху і знизу, упорядкований стан виникає також на скінченному відрізьку значень температури ϵ . Інакше кажучи, фазовий перехід проявляє реверсивний характер, однак на відміну від переходу, індукованого

шумом, обмежена область параметрів системи відповідає упорядкованому стану. Найбільше це позначається на температурних залежностях стаціонарних значень параметра порядку (рис.6.10а) та автокорелятора (рис.6.11а), тоді як на відповідних залежностях від часу кореляції (див. рис.6.10б, 6.11б) реверсивний характер переходу не проявляється.

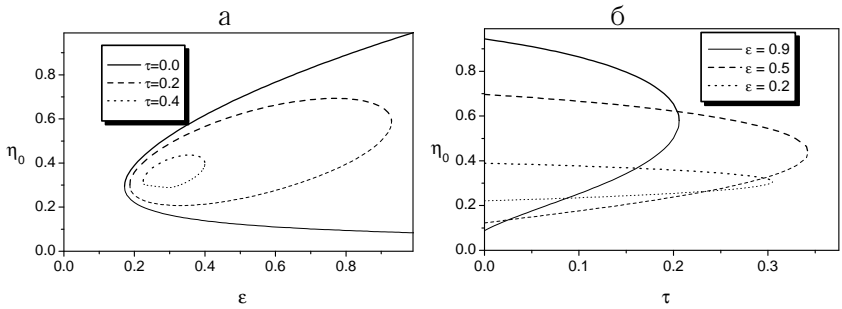


Рисунок 6.10 — Стаціонарні стани системи при $a = 0.2$; а) параметр порядку залежно від температури; б) параметр порядку залежно від часу кореляції шуму (тонкі лінії відповідають сідловій стаціонарній точці, товсті — притягувальному вузлу)

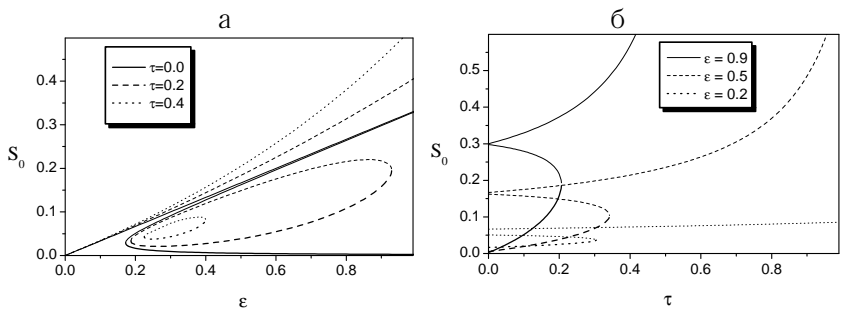


Рисунок 6.11 — Стаціонарні стани системи при $a = 0.2$; а) автокорелятор залежно від температури; б) автокорелятор залежно від часу кореляції шуму (тонкі лінії відповідають сідловій стаціонарній точці, товсті — притягувальному вузлу)

Дослідження еволюції системи поблизу стаціонарних точок досягається використанням експоненти Цалліса та перетворень Мелліна. Поблизу стаціонарної точки, що відповідає неупорядкованій фазі, для амплітуд одержуємо

$$m^{p_1} = \frac{(\epsilon + \kappa S_0)(\epsilon + 4\kappa S_0)}{\kappa \epsilon \alpha_1}, \quad n = \frac{1}{\kappa \epsilon p_1} \frac{(\epsilon + \kappa S_0)(\epsilon + 4\kappa S_0)}{\epsilon/2 - \epsilon + 2\kappa S_0}, \quad (6.88)$$

тоді як показники визначаються виразами (6.60) (6.63), що відповідають асимптотикам $\eta(t) \propto t^{-2(1-a)}$, $S(t) \propto t^{-1}$, властивим білому шуму. Із відповідного фазового портрета випливає, що упорядкування системи потребує перевищення початковим значенням параметра порядку критичної величини η_c , яка відповідає перетинанню сепаратриси з віссю абсцис. Зростання часу кореляції приводить лише до слабкого збільшення критичного значення η_c . Дослідження еволюції системи поблизу упорядкованого стану показує, що, незважаючи на значне ускладнення формалізму, зафарбовування шуму не змінює вигляду залежностей (6.71), (6.72).

Таким чином, зафарбовування шуму приводить до якісної зміни характеру фазового переходу, який стає реверсивним. Однак оскільки клас універсальності не змінюється, то динаміка системи не зазнає якісних змін.

Питання для самоконтролю

- 1 Принципи та підходи дослідження еволюції лінійних систем.
- 2 Принцип одержання еволюційних рівнянь статистичних характеристик у нелінійних системах.
- 3 Особливості застосування методу уніфікованої апроксимації кольорового шуму.
- 4 Поняття та особливості реверсивного переходу.
- 5 Причини виникнення реверсивних переходів у стохастичних системах.

Задачі до розділу 6

Задача 6.1 Провести дослідження поведінки параметра порядку та автокорелятора у випадку мультиплікативного процесу (розглянути окремо підходи Іто та Стратоновича).

Задача 6.2 Провести дослідження поведінки параметра порядку та автокорелятора у випадку осцилятора Кубо (розглянути окремо підходи Іто та Стратоновича).

Задача 6.3 Провести дослідження поведінки параметра порядку та автокорелятора у випадку білого шуму у моделі Мальтуса-Ферхюльста (розглянути окремо підходи Іто та Стратоновича).

Задача 6.4 Провести дослідження поведінки параметра порядку та автокорелятора у випадку білого шуму у генетичній моделі (розглянути окремо підходи Іто та Стратоновича).

Розділ 7

Самоорганізація розподілених стохастичних систем

У даному розділі розглядаються просторові d -вимірні системи, у яких визначну роль відіграють просторові кореляції, що обумовлені міжчастинковою взаємодією. У таких системах розподіл за станами може зазнавати більш суттєвих змін, аніж при індукованих шумом переходах, а саме — втрати симетрії відносно зміни знака стохастичної змінної. Якщо спостерігається подібна картина, то такий перехід означає термодинамічне перетворення (фазовий перехід), при якому параметр порядку η , що зводиться до статистичного середнього, набуває ненульових значень. За концепцією фазових переходів виникнення упорядкованої фази із параметром порядку $\eta \neq 0$ приводить до порушення симетрії неупорядкованої фази, що відповідає тривіальному значенню $\eta = 0$. За відсутності мультиплікативного шуму симетрія стаціонарного розподілу за станами порушується завдяки міжчастинковій взаємодії. Принципова особливість сильно нерівноважних систем із кольоровим шумом полягає у тому, що така симетрія може бути поновлена завдяки мультиплікативному шуму та нелінійності системи [51, 57–60].

При викладенні матеріалу спочатку розглянемо загальні властивості та способи подання просторово розподілених стохастичних систем (підрозділ 7.1). Методи дослідження кінетики індукованого шумом фазового переходу подано у підрозділі з польовою теорією ??, де розглядається як білий, так і кольоровий шум. Еволюційне рівняння параметра порядку для дослідження стійкості неупорядкованої фази подано у підрозділі 7.2. Наближення теорії середнього поля подано у підрозділі 7.3. Підрозділ 7.4 містить основні формули для моделювання розподіленої системи з кольоровим шумом. Фазові переходи, індуковані дією одного шуму у синергетичній системі Лоренца-Хакена, обговорюються у підрозділі 7.5. Випадок впливу двох випадкових джерел на картину самоорганізації, які можуть бути скорельованими, подано у підрозділі ??.

7.1 Загальний підхід

Системи із хімічною реакцією та дифузією подають клас просторово розподілених систем. Оскільки елементи таких систем розділені у просторі, то загалом опис таких систем подається детерміністичною картиною, де у розгляд уводяться локальні величини типу концентрація, температура, потенціали електромагнітної взаємодії тощо. При детерміністичному опису вважається, що такі змінні, які відіграють роль полів, підпорядковуються рівнянням із частковими похідними, типу рівнянь Нав'є-Стокса у гідродинаміці, рівнянь хімічної реакції із дифузією, рівнянь Максвелла у електродинаміці. У даному розділі будуть розглянуті рівняння типу хімічних реакцій із дифузією.

Розглянемо просторово розподілену систему, що параметризується концентрацією $x(\mathbf{r}, t)$ хімічної речовини у точці простору \mathbf{r} в момент часу t . За законом Фіка дифузійний потік подається у вигляді

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -D\nabla x(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}, \quad (7.1)$$

D — коефіцієнт дифузії. За відсутності хімічних реакцій цей потік входить до рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (7.2)$$

Підстановка закону Фіка дає рівняння дифузії

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\mathbf{r}, t) = D\Delta x(\mathbf{r}, t), \quad \Delta \equiv \partial^2/\partial\mathbf{r}^2. \quad (7.3)$$

Якщо присутні локальні хімічні реакції і виробництво речовини подається функцією $f(x(\mathbf{r}, t))$, то рівняння неперервності перетворюється у рівняння еволюції концентрації

$$\frac{\partial}{\partial t}x = f(x) + D\Delta x. \quad (7.4)$$

Таке саме рівняння можна отримати із термодинамічного підходу, якщо ввести у розгляд функціонал вільної енергії

$$\mathcal{F} = \int \left[V(x) + \frac{D}{2} |\nabla x|^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (7.5)$$

де $V(x)$ — питомий термодинамічний потенціал. Тоді, записуючи рівняння руху для поля x , маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}x = -\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x(\mathbf{r}, t)}, \quad (7.6)$$

де γ — кінетичний коефіцієнт, який загалом може залежати від x .

Величина $\mathcal{F}(x(\mathbf{r}, t))$ не збільшується з часом, оскільки

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial x}{\partial t} d\mathbf{r} = - \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} \right)^2 d\mathbf{r}. \quad (7.7)$$

Як і раніше, стійким станам відповідають мінімуми $\mathcal{F}(x(\mathbf{r}, t))$. Під дією збурень система може перейти з локального мінімуму у глобальний.

Однорідні розподіли, що відповідають мінімумам потенціалу \mathcal{F} , називають фазами, причому локальному мінімуму відповідає метастабільна фаза. Метастабільна фаза є нестійкою до збурень. На відміну від попередніх розділів, де поняття фази відповідало макроскопічним станам, у випадку просторово розподілених систем фази, що утворюються, набувають термодинамічного змісту (різні фази тепер відповідають, наприклад, газу, рідині, твердому тілу, упорядкованому стану магнетика і неупорядкованому його стану; різні фази можуть відноситися до двох або більшої кількості речовин при розпаді однорідного їх розчину, наприклад, розчин із молекул/атомів сорту A і B розпадається на речовину із молекул/атомів A та речовину із молекул/атомів B). Переходи між такими термодинамічними фазами є істинними фазовими переходами. Якщо у фазі виник доволі великий зародок стійкої фази, то він починає зростати, даючи початок двом хвилям перемикання, які розбігаються. Після їх розходження середовище переходить у найбільш стійкий однорідний стан. Критичний розмір зародка визначається конкуренцією двох факторів: 1) створення зародка є енергетично вигідним, якщо x у його середині знаходиться поблизу мінімуму \mathcal{F} ; 2) наявність зародка означає неоднорідність системи, що обумовлює складову $(\nabla x)^2$.

Якщо два мінімуми потенціалу є рівнозначними, то стає можливим стаціонарне існування обох фаз, що розділяються міжфазною межею (тонким перехідним шаром). Коли розмір перехідного шару зіставляється з розміром системи, то область поділу виштовхується на межу й

система стає однорідною. В іншому випадку система розбивається на домени, утворюючи структури.

Флуктуації можуть бути введені в розгляд у такий спосіб. Стохастичне джерело векторного типу $\zeta_d(\mathbf{r}, t)$ може бути додане у закон Фіка:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -D\nabla x(\mathbf{r}, t) + \zeta_d(\mathbf{r}, t). \quad (7.8)$$

Можна припустити умови

$$\langle \zeta_d(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_d^{(i)}(\mathbf{r}, t) \zeta_d^{(j)}(\mathbf{r}', t') \rangle = C_d(\mathbf{r}, t) \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (7.9)$$

які свідчать про незалежність флуктуацій у різних точках простору та різних моментах часу, або локальність флуктуацій.

Виробництво речовини завжди породжує флуктуації, тому до модифікованого рівняння неперервності можна додати випадкову силу ζ_{ch} із властивостями

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{ch}(x, \mathbf{r}, t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta_{ch}(x, \mathbf{r}, t) \zeta_{ch}(x, \mathbf{r}', t') \rangle &= C_{ch}(x; \mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C(t - t'), \end{aligned} \quad (7.10)$$

яка може бути також пов'язана із флуктуаціями керуючого параметра. У результаті загальний вигляд рівняння Ланжевена буде таким:

$$\frac{\partial}{\partial t} x(\mathbf{r}, t) = f(x(\mathbf{r}, t), t) + D\Delta x(\mathbf{r}, t) + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (7.11)$$

де

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = -\nabla \zeta_d(\mathbf{r}, t) + \zeta_{ch}(\mathbf{r}, t), \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle &= C_{ch}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C(t - t') + \\ &+ \nabla \nabla' [C_d(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')] \end{aligned} \quad (7.13)$$

Для одержання відповідного рівняння Фоккера-Планка застосовується перехід до ґраткового подання. Для цього достатньо скористатися рецептом з книги [19], де подаючи кореляцію

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (7.14)$$

можна одержати функціональне рівняння Фоккера–Планка (густина ймовірності тепер стає функціоналом $p = p\{x\}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p\{x\} = & - \int d\mathbf{r} \frac{\delta}{\delta x(\mathbf{r})} (D\Delta x(\mathbf{r}) + f(x(\mathbf{r}))) p\{x\} + \\ & + \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left(\frac{\delta^2}{\delta x(\mathbf{r}) \delta x(\mathbf{r}')} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p\{x\} \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

При цьому знайти розв'язок такого рівняння у загальному випадку неможливо. Тому для дослідження статистичних властивостей системи використовують інші підходи та наближення, що спрощують опис.

Приклад 7.1 Модель фазових переходів другого роду

Розглянемо модель Гінзбурга–Ландау фазових переходів другого роду, де польова змінна $x(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} x(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon x - x^3 + D\Delta x + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad \varepsilon = (T - T_c)/T_c. \quad (7.16)$$

Припустимо, що флуктуації є гаусівськими і білими як у просторі, так і в часі, отже:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = 2T \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (7.17)$$

Відповідне рівняння Фоккера–Планка набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} p\{x(\mathbf{r}), t\} = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\delta}{\delta x(\mathbf{r})} [(\varepsilon x(\mathbf{r}) + x^3(\mathbf{r}) - D\Delta x(\mathbf{r})) + T \frac{\delta^2}{\delta x^2(\mathbf{r})}] p\{x(\mathbf{r}), t\}, \right) \quad (7.18)$$

а його стаціонарний розв'язок стає таким:

$$p = Z^{-1} \exp(-\mathcal{F}\{x(\mathbf{r})\}/T), \quad (7.19)$$

де функціонал вільної енергії

$$\mathcal{F}\{x(\mathbf{r})\} = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\varepsilon}{2} x^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} x^4(\mathbf{r}) + \frac{D}{2} (\nabla x(\mathbf{r}))^2 \right). \quad (7.20)$$

Однак навіть у такому вигляді незручно користуватися стаціонарним розподілом.

7.2 Усереднені характеристики

7.3 Наближення середнього поля

Теорія середнього поля являє собою наближений підхід до дослідження систем із просторовою взаємодією і дає якісний результат. Уживаний у теорії рівноважних систем, її формалізм може бути успішно використаний при аналізі просторово—розподілених систем із шумами [5, 58, 59, 65]. Ідея теорії полягає у такому. Дифузія частинки розглядається як елементарні акти взаємодії даної частинки з іншими частинками. Теорія середнього поля дозволяє усереднити всі міжчасткові взаємодії і замінити сукупність набору взаємодій одним параметром, що відіграє роль середнього поля впливу сусідів на дану частинку.

Розглянемо стохастичну польову модель

$$\frac{\partial}{\partial t}x = f(x) + D\Delta x + g(x)\zeta(t). \quad (7.21)$$

Далі континуальний простір розбивають на однакові домени і в дискретному просторі розглядають набір стохастичних диференціальних рівнянь для кожного вузла ґратки k , що створює домен

$$\dot{x}_k = f(x_k) + \frac{D}{2d} \sum_j \hat{D}_{kj} x_j + g(x_k)\zeta_k(t), \quad (7.22)$$

де \hat{D}_{kj} є аналогом оператора Лапласа в дискретному просторі:

$$\Delta \rightarrow \sum_j \hat{D}_{kj} = \sum_{j \in nn(k)} (\delta_{nn(k)} - 2d\delta_{kj}), \quad (7.23)$$

тут $nn(k)$ — являє собою набір найближчих сусідів вузла k . У результаті рівняння (7.22) набирає вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}x_k = f(x_k) + \frac{D}{2d} \sum_{j \in nn(i)} (x_j - x_k) + g(x_k)\zeta_k(t), \quad (7.24)$$

де стохастичні складові вибрані у вигляді

$$\langle \zeta_k(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_k(t)\zeta_l(t') \rangle = \delta_{kl}\delta(t - t'). \quad (7.25)$$

Тоді повна густина ймовірності буде залежати вже не від одного поля $x(\mathbf{r}, t)$, а від набору стохастичних змінних $\{x\}$, тобто $p(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = p(\{x\}, t)$. У результаті маємо рівняння Фоккера—Планка для набору $\{x\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\{x\}, t)}{\partial t} = & - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f(x_k) + \frac{D}{2d} \sum_{j \in nn(i)} (x_j - x_k) \right] p(\{x\}, t) + \\ & + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} g^2(x_k) p(\{x\}, t). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Одноточкова функція розподілу визначається інтегруванням $p(\{x\}, t)$ за всіма вузлами, окрім даного:

$$p(x_k, t) = \int \prod_{j \neq k} dx_j p(\{x\}, t). \quad (7.27)$$

Визначимо умовне середнє

$$E(x, t) = \int dx' x' p(x'|x, t), \quad p(x'|x, t) = p(x', x, t)/p(x, t). \quad (7.28)$$

Тоді для одноточкової функції розподілу маємо

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x) - D(x - E(x, t))] p(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} g^2(x) p(x, t). \quad (7.29)$$

У стаціонарному режимі одержуємо розв'язок

$$p_s(x) = N \exp \left(\int^x dz \frac{f(z) - D[z - E(z)]}{g^2(z)} + \ln g^2(x) \right). \quad (7.30)$$

Наближення середнього поля передбачає, що умовне середнє не залежить від величини поля в даній точці, тоді $E(x) = E_s = \langle x \rangle \equiv \eta$. Розглядаючи систему в наближенні середнього поля, дифузійний процес подають елементарними актами взаємодії найближчих вузлів на ґратці. У

гармонійному наближенні пружна енергія такої взаємодії апроксимується параболою

$$V_{int} = \frac{c}{2} \sum_j (x - x_j)^2, \quad (7.31)$$

де c відіграє роль жорсткості ефективної пружини, що зв'язує вузли гра-тки; підсумовування проводиться за положеннями найближчих сусідів. У рамках положень теорії середнього поля вплив найближчих вузлів x_j на виділений вузол замінюється середнім ефективним самоузгодженим полем $\eta \equiv \langle x_j \rangle$. У результаті сила $f_{int} = -\partial V_{int}/\partial x$ взаємодії виділеного вузла з найближчими сусідами записується як

$$f_{int} = -D(x - \eta). \quad (7.32)$$

Тут за параметр взаємодії ми використовуємо $D \equiv cz$, де z — кількість найближчих сусідів даного вузла.

Таким чином, формалізм теорії середнього поля дозволяє замінити систему диференціальних рівнянь одним рівнянням

$$\dot{x} = f(x) + f_{int}(x; \eta) + g(x)\zeta(t). \quad (7.33)$$

Таким чином, функція розподілу стає функцією першого моменту, для якого маємо самоузгоджене рівняння

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; \eta)dx \equiv \mathcal{F}(\eta). \quad (7.34)$$

Відмінний від нуля розв'язок рівняння (7.34) характеризує упорядкований стан, що виражається в порушенні симетрії системи (еквівалентності мінімумів потенціалу U_{ef} справа та зліва від початку координат). Наближення середнього поля Кюри–Вейса дозволяє встановити лінію переходу між несиметричною й симетричною фазами, яка визначається з розв'язку рівняння

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 1. \quad (7.35)$$

7.4 Способи моделювання

Моделювання розподіленої системи проводиться на ґратках із періодичними граничними умовами, що дозволяє розглядати систему у термодинамічній границі. Розмір ґратки L достатньо брати таким, щоб він не перевищував 128×128 точок.

Для розв'язання системи стохастичних рівнянь може бути використаний метод Ойлера

$$x_k(t+h) = x_k(t) + h \left(f(x_k) - \frac{D}{2d} \sum_{j \in n(k)} (x_k - x_j) + g(x_k) \zeta_k \right), \quad (7.36)$$

де $\zeta_k(t)$ — кольоровий шум, який моделюється процесом Орнштейна—Уленбека:

$$\zeta(t+h) = \zeta(t) e^{-\frac{h}{\tau}} + \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{2h}{\tau}}}{2\tau}} U(t+h), \quad \zeta(0) = \sqrt{(2\tau)^{-1}} U(0), \quad (7.37)$$

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t' - t|}{\tau}\right). \quad (7.38)$$

Для процесу $U(t)$ використовуємо метод Бокса—Мюллера.

Параметр порядку обчислюється за формулою

$$\eta = \left\langle \left| \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^N x_i \right| \right\rangle, \quad (7.39)$$

де верхня риска означає усереднювання за часом, а кутові дужки — усереднювання за ансамблем. Час усереднювання вибирається достатньо великим порівняно з часом кореляції самого процесу.

Обчислення сприйнятливості проводиться згідно з алгоритмом

$$S = \left\langle \left(\frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - \eta^2 \right\rangle. \quad (7.40)$$

Обчислення кореляційних функцій за простором та часом проводиться за такими формулами:

$$C(n) = \frac{\langle x_i x_{i+n} \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_{i+n} \rangle}{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2}, \quad (7.41)$$

$$C(t) = \frac{\langle x(t+t')x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}. \quad (7.42)$$

7.5 Індуковані шумом фазові переходи у синергетичній системі

Застосуємо вищевикладений формалізм до системи Лоренца, що параметризується полями $x(\mathbf{r}, t)$, $h(\mathbf{r}, t)$ та $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ з урахуванням шумів кожного з них [66]:

$$\begin{aligned} t_x \dot{x} &= (-x + a_x h) + D_x \Delta x + \sigma_x \zeta_x(\mathbf{r}, t), \\ t_h \dot{h} &= (-h + a_h x \epsilon) + D_h \Delta h + \sigma_h \zeta_h(\mathbf{r}, t), \\ t_\epsilon \dot{\epsilon} &= [(\epsilon_e - \epsilon) - a_\epsilon x h] + D_\epsilon \Delta \epsilon + \sigma_\epsilon \epsilon(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

де амплітуди шумів задаються величинами σ_x , σ_h та σ_ϵ . Будемо вважати шуми гаусівськими:

$$\langle \zeta_\mu(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_\mu(\mathbf{r}, t) \zeta_\nu(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C_{\mu\nu}(t - t'). \quad (7.44)$$

Тут кореляційні функції вибираються у найпростішому вигляді

$$C_{\mu\nu}(t - t') = \frac{v}{\tau_{\mu\nu}} \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau_{\mu\nu}}\right), \quad (7.45)$$

де v — характерний об'єм кореляції, індекси μ, ν зводяться до набору $\{x, h, \epsilon\}$, у якому величини $\tau_{\mu\mu}$ визначають часи автокореляції відповідних шумів, а $\tau_{\mu\nu}$ з $\mu \neq \nu$ — масштаби крос-кореляції.

Розглянемо випадок однієї повільної моди x , коли у рівняннях (7.43) можна припустити $D_h = D_\epsilon = 0$, опускаючи індекс у ненульового параметра $D \equiv D_x$. Перейдемо до безрозмірних величин, вимірюючи час t у

масштабі у t_x , параметр порядку $x \sim (a_h a_\epsilon)^{-1/2}$, спряжене поле $h \sim (a_x^2 a_h a_\epsilon)^{-1/2}$, керуючий параметр $\epsilon \sim (a_x a_h)^{-1}$, інтенсивності шумів σ_x^2 , σ_h^2 та $\sigma_\epsilon^2 \sim$ у масштабах $(a_h a_\epsilon)^{-1}$, $(a_x^2 a_h a_\epsilon)^{-1}$ та $(a_x a_h)^{-2}$ відповідно. Тоді умова адіабатичності

$$t_x \gg t_h, t_\epsilon$$

приводить до виразу для спряженого поля

$$h = \epsilon_e \frac{x}{1+x^2} + \frac{\sigma_h \zeta_h(\mathbf{r}, t) + \sigma_\epsilon x \zeta_\epsilon(\mathbf{r}, t)}{1+x^2}. \quad (7.46)$$

Підставляючи (7.46) у перше рівняння системи (7.43), одержуємо

$$\dot{x} = f(x) + D\Delta x + \sigma_\mu g_\mu(x) \zeta_\mu(\mathbf{r}, t), \quad (7.47)$$

де повторення індексу μ означає підсумовування за шумами, детерміністична сила $f(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ визначається синергетичним потенціалом

$$V(x) = \frac{1}{2} [x^2 - \epsilon_e \ln(1+x^2)], \quad (7.48)$$

а мультиплікативні функції мають вигляд

$$g_x = 1, \quad g_h = (1+x^2)^{-1}, \quad g_\epsilon = x(1+x^2)^{-1}. \quad (7.49)$$

Розвинення потенціалу (7.48) у ряд

$$V(x) \simeq \frac{1-\epsilon_e}{2} x^2 + \frac{\epsilon_e}{4} x^4$$

приводить рівняння Ланжевена (7.47) до форми Гінзбурга-Ландау, доповненої двома шумами. Знайдена модель задовольняє положення, що флуктуації керуючого параметра завжди приводять до виникнення мультиплікативного шуму. Його характерна особливість полягає у тому, що флуктуації керуючого параметра мають сингулярний характер, оскільки при $x = 0$ їхня амплітуда (7.49) стає тривіальною. За відсутності флуктуацій спряженого поля це приводить до виникнення поглинаючого стану при $x = 0$, оскільки тривіальними стають як амплітуда шуму $g_\epsilon(x=0) = 0$, так і детерміністична сила $f(x=0) = 0$.

Аналіз поведінки системи з одним кольоровим шумом ґрунтується на методі уніфікованої апроксимації, що доповнена наближенням теорії середнього поля. Їхнє застосування дозволяє подати лапласіан силою міжчастинкової взаємодії $f_\eta(x) = D(\eta - x)$, де параметр порядку $\eta \equiv \langle x \rangle$ визначається умовою самоузгодження. У результаті приходимо до стохастичного диференціального рівняння

$$\gamma_\eta(x)dx = [f(x) + f_\eta(x)]dt + g(x)dW(t), \quad (7.50)$$

де $W(t)$ — вінерівський процес,

$$\gamma_\eta(x) \equiv 1 - \tau[f(x) + f_\eta(x)] \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\frac{f(x) + f_\eta(x)}{g(x)} \right], \quad (7.51)$$

τ — час автокореляції процесу $\zeta(t)$ (індекс шуму опущено).

Застосовуючи диференціал Іто, надамо рівнянню (7.50) стандартного вигляду рівняння Ланжевена

$$\dot{x} = \phi_\eta(x) + \varphi_\eta(x) + \sigma \varrho_\eta(x) \xi(t) \quad (7.52)$$

з білим шумом $\xi(t) = dW(t)/dt$, який розуміється у сенсі Іто. Перенормована сила задається виразом

$$\phi_\eta(x) = \frac{f(x) + f_\eta(x)}{\gamma_\eta(x)}, \quad (7.53)$$

а індукований шумом дрейф та мультиплікативна функція є такими:

$$\varphi_\eta(x) = -\frac{\sigma^2}{2} \varrho_\eta^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \ln \gamma_\eta(x), \quad \varrho_\eta(x) = \frac{g(x)}{\gamma_\eta(x)}. \quad (7.54)$$

Рівняння Ланжевена (7.52) відповідає рівнянню Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} p_\eta(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -[\phi_\eta(x) + \varphi_\eta(x)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \varrho_\eta^2(x) \right\} p_\eta(x, t). \quad (7.55)$$

Стационарний розподіл має квазігібсівську форму

$$p_\eta(x) = \mathcal{Z}_\eta^{-1} \exp \left[-\frac{U_\eta(x)}{\sigma^2} \right], \quad (7.56)$$

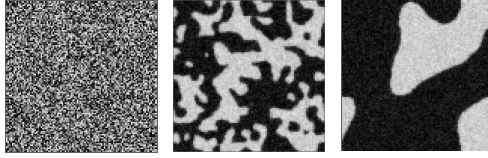


Рисунок 7.1 — Чисельний розв'язок рівняння Ланжевена — типовий хід еволюції у розподіленій системі

де Z_η — стала нормування, а ефективний синергетичний потенціал задається виразом

$$U_\eta(x) = \sigma^2 \ln \left[\frac{g^2(x)}{\gamma_\eta(x)} \right] - 2 \int \frac{f(x) + f_\eta(x)}{g^2(x)} \gamma_\eta(x) dx. \quad (7.57)$$

Величина параметра порядку η визначається розв'язком рівняння самоузгодження.

Типова картина еволюції стохастичної системи подана на рис.7.1, де із початкової неупорядкованої конфігурації система переходить до упорядкованого стану, де утворюються дві фази (біла з позитивним значенням x та чорна з негативним значенням x), які визначають параметр порядку та хід упорядкування.

7.5.1 Вплив кореляцій адитивного шуму

У разі адитивного кольорового шуму $g_{0x} = 1$, $\sigma_h = \sigma_\epsilon = 0$. Для визначення області стійкості неупорядкованого стану лінійне наближення для фур'є-образу $x_{\mathbf{k}}(t) = \int x(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$, усередненого за реалізаціями шуму, дає

$$\langle \dot{x}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = (\epsilon_e - 1 - D|\mathbf{k}|^2) \langle x_{\mathbf{k}}(t) \rangle. \quad (7.58)$$

Звідси випливає, що розв'язок $\langle x_{\mathbf{k}} \rangle = 0$ стає нестійким за умови

$$\epsilon_e > 1 + D|\mathbf{k}|^2.$$

Вона означає, що неоднорідність розподілу параметра порядку підвищує критичне значення керуючого параметра ϵ_e , сприяючи стабілізації неупорядкованої фази.

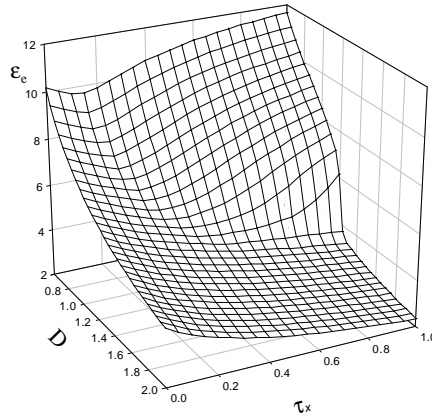


Рисунок 7.2 — Фазова діаграма системи з адитивним шумом при $\sigma_x^2 = 9.0$. Упорядкована фаза знаходиться в області над поверхнею

Ефективний синергетичний потенціал (7.57), що задає стаціонарний розподіл $p(x; \eta)$, подається сумою

$$U_\eta(x) = U_s(x) + U_a(x) \quad (7.59)$$

симетричної $U_s(x)$ та асиметричної $U_a(x)$ складових:

$$\begin{aligned} U_s(x) = & (1 + D^2)(1 + \tau_x)x^2 + \frac{\epsilon_e \tau_x}{1 + x^2} \left[2(1 + D) + \epsilon_e \frac{x^2}{1 + x^2} \right] - \\ & - \sigma_x^2 \ln \left[1 + \tau_x(1 + D) + \epsilon_e \tau_x \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \right] - \epsilon_e \ln(1 + x^2), \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$U_a(x) = -2D\eta \left[1 + \tau_x(1 + D) + \frac{\tau_x \epsilon_e}{1 + x^2} \right] x. \quad (7.61)$$

Розв'язки рівняння станів (7.35), що відповідає границі упорядкування $\eta = 0$, подано на рис.7.2. Із нього випливає, що зростання параметра

просторової взаємодії D приводить до розширення області упорядкування за рахунок спадання критичного значення керуючого параметра ϵ_e . Характерно, що при великих значеннях D зростання часу автокореляції τ_x посилює тенденцію до упорядкування, тоді як спадання D , навпаки, приводить до реверсивного переходу. Найбільш яскраво це проявляється на рис.7.3, де показана залежність $\eta(\epsilon_e, \tau_x)$. Із рисунка бачимо,

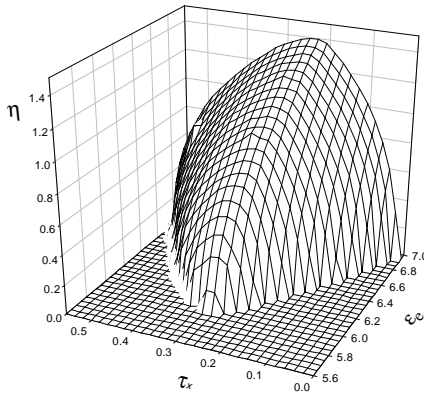


Рисунок 7.3 — Залежність параметра порядку η від керуючого параметра ϵ_e та часу автокореляції шуму τ_x при $D = 1.0$, $\sigma_x^2 = 9.0$

що процес упорядкування потребує величин керуючого параметра ϵ_e , які перевищують критичне значення, починаючи з якого збільшення часу автокореляції приводить спочатку до зростання параметра порядку, а далі — до його спадання. При цьому збільшення ϵ_e сприяє розширенню інтервалу значень τ_x , у якому спостерігається процес упорядкування.

Чисельне моделювання такої системи підтверджує існування реверсивних фазових переходів (див. рис.7.4). Дійсно, згідно з висновком про наявність реверсивних перетворень залежність $\eta(\tau_x)$ проявляє куполоподібну форму. При цьому сприйнятливість $S(\tau_x)$ має характерні піки, які означають критичне зростання флуктуацій моди x в околі границь упорядкування [27]. Даний висновок підтверджується виглядом просторових та часових кореляційних функцій $C(i) = \langle x_j(t)x_{j+i}(t) \rangle$,

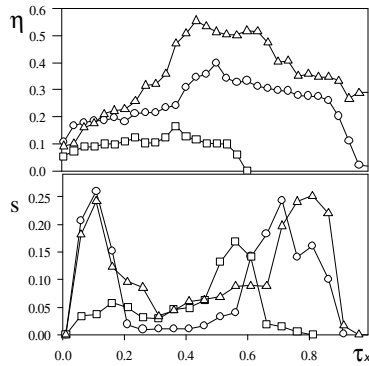


Рисунок 7.4 — Залежність параметра порядку η та сприйнятливості S від часу автокореляції адитивного шуму τ_x виконувалася на двовимірній квадратній ґратці розміром $L = 64$ при $D = 1.0$, $\sigma_x^2 = 9.0$, $\epsilon_e = 4.5$ (ромби); $D = 1.0$, $\sigma_x^2 = 9.0$, $\epsilon_e = 4.0$ (квадрати) и $D = 0.7$, $\sigma_x^2 = 9.0$, $\epsilon_e = 4.0$ (кола))

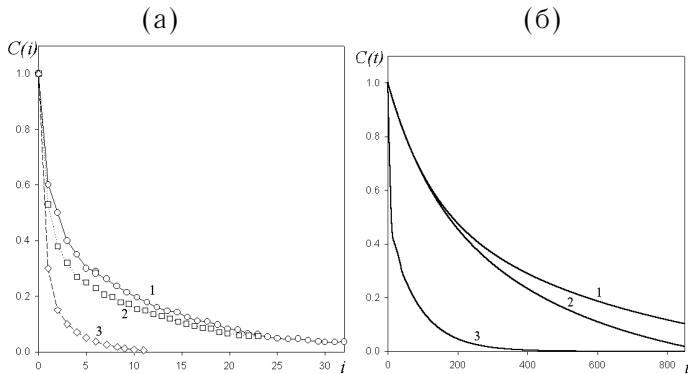


Рисунок 7.5 — Просторова (а) та часова (б) кореляційні функції при значеннях $D = 1.0$, $\epsilon_e = 4.5$, $\sigma_x^2 = 9.0$. Криві 1 та 2 побудовані в околі точок фазового переходу $\tau_x = 0.1$ та $\tau_x = 0.8$; криві 3 одержані у проміжній області упорядкованої фази ($\tau_x = 0.5$)

$C(t) = \langle x_i(t)x_i(0) \rangle$, поданих на рис.7.5. Із них випливає, що в околі прямого та зворотного фазових переходів просторово-часові кореляції мають дальнодіючий характер, який віддзеркалює перехід системи у критичний режим.

Таким чином, за наявності адитивного кольорового шуму синергетична система зазнає реверсивного фазового переходу, властивого нерівноважним системам.

7.5.2 Вплив кореляцій шуму спряженого поля

Для системи із шумом спряженого поля для фур'є-образу параметра порядку у лінійному наближенні маємо таке рівняння:

$$\langle \dot{x}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = \lambda_{\mathbf{k}} \langle x_{\mathbf{k}}(t) \rangle \quad (7.62)$$

де інкремент

$$\lambda_{\mathbf{k}} \equiv \{(1 - 4\sigma_h^2 \tau_h) \epsilon_e - [1 + 2\sigma_h^2(1 - \tau_h)]\} - D|\mathbf{k}|^2. \quad (7.63)$$

Неупорядкована фаза втрачає стійкість за умови

$$\epsilon_e > \frac{[1 + 2\sigma_h^2(1 - \tau_h)] + D|\mathbf{k}|^2}{1 - 4\sigma_h^2 \tau_h}, \quad (7.64)$$

згідно з якою мультиплікативний шум спряженого поля зміщує критичне значення керуючого параметра в область великих значень ϵ_e , стабілізуючи неупорядковану фазу. Вплив часу автокореляції τ_h стає більш складним.

Ефективний синергетичний потенціал (7.57) має такі симетричну та

асиметричну складові:

$$\begin{aligned}
 U_s(x) = & \frac{1}{3}(1 + D)[1 + 3\tau_h(1 + D)]x^6 + \\
 & + \frac{1}{2}\left\{(1 + D) + (1 + D - \epsilon_e)[1 + 4\tau_h(1 + D)] + 2\tau_h D^2 \eta^2\right\}x^4 + \\
 & + \left\{(1 + D - \epsilon_e)[1 + \tau_h(D + 1 - \epsilon_e)] + 2\tau_h D^2 \eta^2\right\}x^2 - \\
 & - 2\sigma_h^2 \ln(1 + x^2) - \\
 & - \sigma_h^2 \ln \left\{ [1 + 3\tau_h(1 + D)] - \tau_h \frac{[\epsilon_e + 2(1 + D)] + 4D\eta x}{1 + x^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

$$\begin{aligned}
 U_a(x) = & -\frac{2}{5}\left\{[1 + 3\tau_h(1 + D)] + 2\tau_h D(1 + D)\eta\right\}x^5 - \\
 & - \frac{2}{3}D\eta\left\{2[1 + 3\tau_h(D + 1)] - 3\tau_h\epsilon_e\right\}x^3 - \\
 & - 2D\eta[1 + \tau_h(D + 1 - \epsilon_e)]x.
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

Розглянемо фазові діаграми, подані на рис.7.6. Із рис.7.6а бачимо що, на відміну від адитивного шуму, флуктуації спряженого поля приводять до реверсивного фазового переходу при малих значеннях часу автокореляції τ_h та інтенсивності флуктуацій σ_h^2 . При цьому область упорядкованої фази обмежена низу та зверху як вздовж осі керуючого параметра ϵ_e , так і по осі параметра D (див. криву 1). Несуттєве підвищення τ_h (крива 2) сприяє розширенню області упорядкування при зміні ϵ_e та D . Зростання інтенсивності шуму приводить до розширення області існування упорядкованої фази (крива 3). Рис.7.6б показує, що велика інтенсивність шуму пригнічує упорядкування при малих ϵ_e , віддаляючи на нескінченність верхню межу розупорядкування при малих τ_h . Тому при короткочасовій кореляції шуму зростання керуючого параметра приводить до єдиного переходу до упорядкованого стану (крива 1). Спадання інтенсивності шуму σ_h^2 та зростання параметра взаємодії D розширює область упорядкування у такий спосіб, що вздовж осі ϵ_e перехід є реверсивним, а зростання τ_h приводить лише до розупорядкування (див. криві 2, 3).

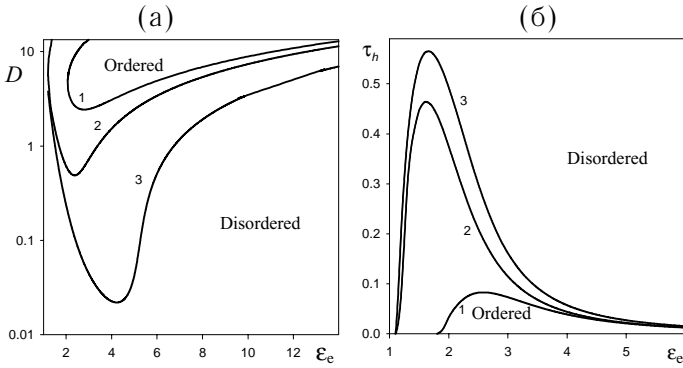


Рисунок 7.6 — Фазові діаграми системи з шумом спряженого поля. Криві 1, 2, 3 на полі (а) відповідають $\tau_h = 0.01, \sigma_h^2 = 1.0$; $\tau_h = 0.07, \sigma_h^2 = 1.0$; $\tau_h = 0.07, \sigma_h^2 = 1.96$. На полі (б) криві 1, 2, 3 відповідають $\sigma_h^2 = 1.96, D = 0.9$; $\sigma_h^2 = 1.0, D = 0.9$; $\sigma_h^2 = 1.0, D = 1.2$

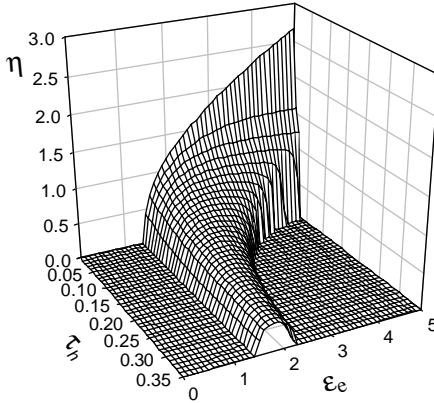


Рисунок 7.7 — Залежність параметра порядку від часу автокореляції шуму спряженого поля та ϵ_e при $D = 1.2, \sigma_h^2 = 1.0$

Картина реверсивного фазового переходу ілюструється на залежності параметра порядку η від часу автокореляції τ_h та керуючого параме-

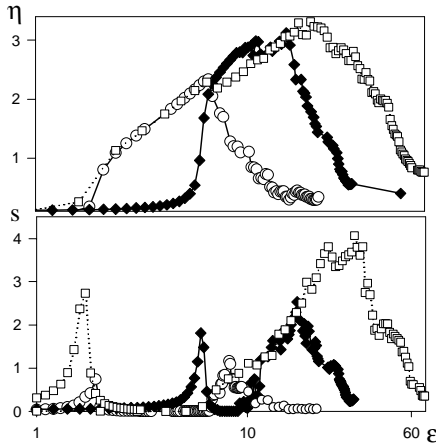


Рисунок 7.8 — Залежність параметра порядку η та сприйнятливості S від керуючого параметра ϵ_e у випадку шуму спряженого поля, одержана чисельним моделюванням на квадратній ґратці лінійним розміром $L = 64$. Прийнято $\sigma_h^2 = 4.0$, $\tau_h = 0.2$; квадрати відповідають $D = 2.0$, кола — $D = 1.0$, ромби — $D = 0.7$

тра ϵ_e на рис.7.7. Із нього випливає, що зростання часу τ_h сприяє монотонному спаданню параметра порядку, тоді як при збільшенні ϵ_e спостерігається реверсивний перехід.

Проведений аналіз підтверджується результатами чисельного експерименту на рис.7.8. Бачимо, що параметр порядку η відрізняється від нуля в області керуючого параметра, обмеженого нижньою та верхньою межами, в околі яких спостерігається аномальне зростання сприйнятливості S . При цьому просторова та часова кореляційні функції поведуться аналогічно до випадку адитивних флуктуацій.

7.5.3 Вплив шуму керуючого параметра

Особливість цього випадку полягає у тому, що амплітуда флуктуацій керуючого параметра $g_\epsilon(x) = x(1+x^2)^{-1}$ набуває нульового значення у точці $x = 0$, завдяки чому виникає поглинальний стан, який порушує ер-

годинність системи. У результаті її еволюція визначається конкуренцією процесів втрати ергодичності та упорядкування.

У лінійному режимі зміна параметра порядку задається рівнянням (7.62) з інкрементом

$$\lambda_{\mathbf{k}} = (\epsilon_e - 1 + \sigma_\epsilon^2) - D|\mathbf{k}|^2, \quad (7.67)$$

із якого випливає, що неупорядкована фаза втрачає стійкість за умови

$$\epsilon_e > (1 - \sigma_\epsilon^2) + D|\mathbf{k}|^2. \quad (7.68)$$

На відміну від попереднього випадку така умова означає, що мультиплікативний шум керуючого параметра зменшує критичне значення ϵ_e .

В околі поглинального стану $x = 0$ стаціонарний розподіл (7.56) має таку асимптотику:

$$p(x) = Ax^{-\alpha}, \quad \alpha \equiv 3 + 2\frac{1 + D - \epsilon_e}{\sigma_\epsilon^2}, \quad (7.69)$$

де стала нормування $A \neq \infty$ за умови

$$\epsilon_e > 1 + D + \sigma_\epsilon^2. \quad (7.70)$$

У протилежному випадку розподіл (7.56) набуває δ -подібного доданка, що спричиняє конденсацію станів стохастичної системи на поглинальній границі $x = 0$ [32]. Така конденсація приводить до втрати ергодичності та пригнічення дальнього порядку.

Зі зміною параметрів ϵ_e , D , σ_ϵ^2 , яка забезпечує умову (7.70), поглинальна границя $x = 0$ стає притягуючою. При цьому густина ймовірності подається аналітичною залежністю (7.56), яка не має δ -подібної особливості і тому стає можливим виникнення упорядкованої фази. Дійсно, рис.7.9 показує, що при зростанні керуючого параметра ϵ_e , коли виконується умова (7.70), система переходить із поглинального стану до неупорядкованого. Із подальшим збільшенням параметра ϵ_e стохастична змінна має ненульовий момент $\langle x \rangle \equiv \eta$, який означає виникнення упорядкованого стану. Таким чином, особливість системи із шумом керуючого параметра полягає у наявності двох типів переходів: перший

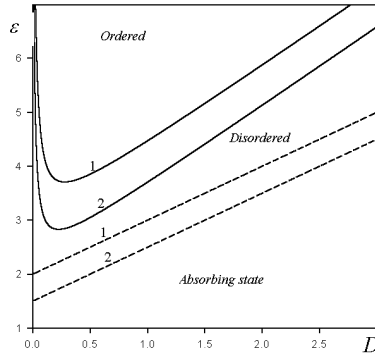


Рисунок 7.9 — Фазова діаграма системи із шумом керуючого параметра при $\tau_\epsilon = 0.01$. Криві 1, 2 побудовані при $\sigma_\epsilon^2 = 1.0$ та $\sigma_\epsilon^2 = 0.49$. Суцільні лінії відповідають фазовому переходу, пунктирні — виникненню поглинальної границі

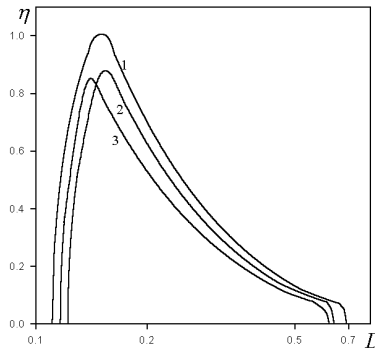


Рисунок 7.10 — Залежність параметра порядку η від D при $\epsilon_e = 4.0$. Криві 1, 2, 3 побудовані при $\tau_\epsilon = 0.01$, $\sigma_\epsilon^2 = 0.96$; $\tau_\epsilon = 0.01$, $\sigma_\epsilon^2 = 1.0$; $\tau_\epsilon = 0.15$, $\sigma_\epsilon^2 = 1.0$

пов'язаний зі зміною характеру границі процесу; другий — із фазовим переходом, індукованим шумом.

Як бачимо з рис.7.9, перехід до упорядкованого стану проявляє реверсивний характер при зміні параметра міжчастинкової взаємодії D .

Це підтверджується рис.7.10, із якого випливає, що параметр порядку набуває ненульових значень лише у двократно обмеженій області значень D . Порівняння кривих 1 та 2 показує, що спадання інтенсивності шуму σ_ϵ^2 приводить до збільшення параметра порядку η у всій області значень параметра D , тоді як зростання часу автокореляції τ_ϵ зміщає область упорядкування у бік малих D (пор. криві 2 та 3).

Питання для самоконтролю

- 1 Принципи одержання стохастичних рівнянь для розподілених систем.
- 2 Рівняння Фоккера-Планка для розподілених систем.
- 3 Підходи теорії середнього поля.

Список літератури

1. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980. — 404 с.
2. Хакен Г. Синергетика и иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. — 423 с.
3. Николис Дж., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
4. San Miguel M. Toral R. Stochastic Effects in Physical Systems. — xxx.lanl.gov/cond-mat/9707147.
5. Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M., Noise in Spatially Extended Systems. — New York: Springer-Verlag, 1999. — p.307.
6. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. — М.: Мир, 1990. — 399 с.
7. Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications // Phys.Rep. — 1990. — V.195. — P.127–293.
8. Metzler R., Klafter J. The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys.Rep. — 2000. — V.339. — P.1–77.
9. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. — 2003. — V.173. — №8. — С.847–876.
10. Wisenfeld K. Minireview of stochastic resonance // Chaos. — 1998. — V.8. — N3. — P.539–548.
11. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С.Анищенко, А.Б.Нейман, Ф.Мосс, Л.Шиманский-Гайер // УФН. — 1999. — Т.169. — №1. — С.7–38.

12. Munoz M.A. Pastor-Satorras R. Stochastic theory of synchronization in extended systems // *Phys.Rev.Lett.* — 2003. — V.90. — P.204101(4).
13. Vespignani A., Zapperi S. How self-organized criticality works: A unified mean-field picture // *Phys. Rev. E.* — 1998. — V.57. — P.6345–6362.
14. Bak P. How nature works. — Oxford: Oxford Univ.Press., 1997. — 212 p.
15. Jensen H.J. Self-organized criticality. — Cambridge: Cambridge Univ.Press., 1998. — 153 p.
16. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
17. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968. — 368 с.
18. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высш.шк., 1990. — 376 с.
19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.
20. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2 томах. — М.: Мир, 1990. — 400 с.
21. MacKeown P. Stochastic Simulation in Physics. — Singapore: Springer-Verlag, 1997. — P.456.
22. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
23. Novikov E.A. Functionals and the random-force method in turbulence theory // *Sov.Phys.JETP.* — 1965. — V.20. — P.1290–1295.
24. Розанов А.М. Случайные процессы. — М. Высш.шк., 1979.

25. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. — М.: Наука, 1973. — 424 с.
26. Репке Г. Неравновесная статистическая механика. — М.: Мир, 1990. — 320 с.
27. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — Ч.1. — 586 с.
28. Risken H. The Fokker–Plank equation. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. — P.471.
29. Олемской О.І., Харченко Д.О. Теорія самоподібних стохастичних систем (Частина I) // Журн.Фіз.Досл. — 2002. — Т.6. — №3. — С.253–288.
30. Олемской О.І., Харченко Д.О. Теорія самоподібних стохастичних систем (Частина II) // Журн.Фіз.Досл. — 2003. — Т.7. — №1. — С.1–26.
31. Харченко Д.О. Зміна фрактальної вимірності стохастичної системи з кольоровим мультиплікативним шумом // Журн.Фіз.Досл. — 1999. — Т.3. — №1. — С.37–41.
32. Олемской А.И. Теория стохастической системы с мультипликативным шумом // УФН. — 1998. — №168. — С. 287.
33. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 264 с.
34. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
35. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. — М.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. — 256 с.
36. Лифшиц И.Н., Слезов В.В. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов // ЖЭТФ. — 1958. — Т.35, Вып.2(8). — С.479–492.

37. Tsallis C. Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications // in *Lecture Notes in Physics* (eds. by S. Abe and Y. Okamoto). New York: Springer-Verlag, 2000. — P.1–103.
38. Mikhailov A.S., Loskutov A.Yu. *Foundations in synergetics II*. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1996. — 274 p.
39. Николис Дж. *Динамика иерархических систем: эволюционное представление*. — М.: Мир, 1989. — 488 с.
40. Николис Г., Пригожин И. *Познание сложного*. — М.: Мир, 1990. — 344 с.
41. Торопов Е.А., Харченко Д.О. Влияние шума на характер синергетического перехода // *Изв.вузов. Физика*. — 1996. — №4. — С.75–82.
42. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena*. — Oxford: Clarendon Press, 1994. — 966 p.
43. Фейнман Р., Хибс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. — М.: Мир, 1968. — 382 с.
44. Weiss U. *Quantum dissipative systems*. — Singapore: World Scientific, 2000. — 464 p.
45. *Quantum transport and dissipation*/ T.Dittrich, P.Hänggi, G.-L.Ingold, B. Kramer, G. Schon, and W. Zwerger. — Weinheim: Wiley-VCH, 1998. — 372 p.
46. Graham R. *Stochastic Methods in Nonlinear Thermodynamics* // in *Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry and Biology*. (eds. L.Arnold, R.Lefever). — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. — P.202–212.
47. Förster A., Mikhailov A.S., *Application of Path Integral to Stochastic Reaction–Diffusion Equations* // in *Self-Organization by Nonlinear Irreversible Processes*. (ed. by W.Ebeling, H.Ulbricht). — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. — P.89–94.

48. Mikhailov A.S., Loskutov A.Yu., Foundations in Synergetics II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. — P.273.
49. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. On Symmetry and Ergodicity Breaking i Stochastic Systems with Multiplicative Noise and Interparticle Interaction // Met.Phys.Adv.Tech. — 1996. — №16. — P.841–855.
50. Olemskoi A.I., Kharchenko D.O. Evolution of the System with Multiplicative Noise // Physica A. — 2001. — №293. — P.178–188.
51. Kharchenko D.O., Kohan S.V. Coloured Noise Influence on System Evolution // EPJ B. — 2002. — №29. — P.97–103.
52. Солдатов А.В. Кинетическое уравнение в теории неравновесных фазовых переходов, индуцированных “окрашенным” мультипликативным шумом // ТМФ. — 1990. — V.85. — №2. — С.288–301.
53. Харченко Д.О. Польове представлення стохастичної системи з поглинаючими станами // Журн.Фіз.Досл. — 1999. — Т.3. — №4. — С.415–421.
54. Castro F., Wio H.S. and Abramson G. Colored-noise problem: A Markovian interpolation procedure // Phys.Rev.E. — 1995. — V.52. — P.159–164.
55. Garcia-Ojalvo J. and Sancho J.M. Colored noise in spatially extended systems// Phys. Rev. E. — 1994. — V.49. — P.2769–2772.
56. Mangioni S., Deza R., Wio H.S, and Toral R. Disordering effects of color in nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V.79. — P.2389–2393.
57. Mangioni S.E., Deza R.R., Toral R., Wio H.S. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise: effects of self-correlation // Phys.Rev.E. — 2000. — V.61. — N1. — P.223–232.

58. Van der Broeck C. Nonequilibrium phase transitions // Phys.Rev.Lett. — 1994. — V.73. — N 25. — P.3395–3398.
59. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise / C.Van der Broeck, J.M.R.Parrondo, R.Toral, R.Kawai // Phys. Rev. E. — 1997. — V.55. — N 4. — P.4084–4094.
60. Kharchenko D.O. Path Integral Solution of the System with Coloured Multiplicative Noise // Physica A. — 2002. — №308. — P.113 — 124.
61. Николис Дж., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
62. Николис Дж. Динамика иерархически соподчиненных систем: Эволюционное представление. — М.: Мир, 1989. — 488 с.
63. Олемской А.И., Харченко Д.О. Кинетика фазового перехода с сингулярным мультипликативным шумом // ФТТ. — 2000, **42**. — №3. — С.520–526.
64. Харченко Д.О. Польове представлення стохастичної системи з поглинаючими станами // Журн.Фіз.Досл. — 1999. — Т.3. — №4. — С.415–421.
65. Mangioni S.E., Deza R., Toral R., Wio H.S.. Nonequilibrium Phase Transitions Induced by Multiplicative Noise: Effects of Self-Correlation // Phys.Rev.E. — 2000.— №61. — P.223–232.
66. Харченко Д.О., Князь И.А. Фазовые переходы с нарушением симметрии в синергетической системе с флуктуационным воздействием // Металлофизика. — 2002. — **24**. — №3. — С.389–405.

Предметний покажчик

- диференціал Іто 71
- інтеграл
 - Іто 69, 71
 - Стратоновича 70
- коефіцієнт кореляції 26
- перехід
 - нерівноважний 108
 - фазовий 176, 185
- принцип
 - підпорядкування 129
- процес
 - вінерівський 45, 46
 - дельта-корельований 51–53
 - Орнштайна–Уленбека 62, 152, 184
 - стаціонарний 33
- рівняння
 - кінетичне 83
 - Ланжевена 66, 179
 - Фоккера–Планка 85, 87, 90, 92, 180
 - Чепмена–Колмогорова 81
- розподіл
 - нестационарний 98
 - стаціонарний 96, 98, 101
- ряд
 - Крамерса–Мойала 85
- теорема
 - Вонга–Закаї 73
 - ергодична 101
 - центральна гранична 20
- теорія
 - середнього поля 181
- траєкторії
 - оптимальні 145
- умова
 - границь процесу 92
 - марковості 44
 - Ліпшица 92
- формула
 - Айнштайна 63
 - Новікова 50, 89
- функціонал
 - кумулянтів 48
 - характеристичний 48
- функція
 - автокореляційна 34
 - крос-кореляційна 35
 - кумулянтна 15
 - нормована кореляційна 35
 - спектральної густини 43
 - характеристична 14
- шум
 - білий 43, 158
 - кольоровий 62, 157, 168

Навчальне видання

Харченко Дмитро Олегович

МЕТОДИ ОПИСАННЯ І МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Дизайн обкладинки	Д.О.Харченка
Редактор	Т.Г.Чернишова
Комп'ютерне верстання	Д.О.Харченка

Підп. до друку 23.10.2007.

Формат 60×84/16. Папір офс. Гарнітура Literat. Друк.офс.

Ум.друк. арк.12,09. Обл.-вид.арк.11,91. Тираж 300 пр. Вид.№ 235.

Зам. №

Видавництво СумДУ при Сумському державному університеті

40007, Суми, вул. Римського-Корсакова, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру

ДК № 2365 від 08.12.2005.

Надруковано у друкарні СумДУ

40007, Суми, вул. Римського-Корсакова, 2.